XVIII SEMAT E VIII SEMEST
Universidade Federal de Uberlândia
02 a 05 de outubro de 2018

Variedade afim tórica

Rejiane Aparecida Calixto[*1] **e Victor Gonzalo Lopez Neumann**[†1]

[1]FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia

Palavras-chave: *Conjunto Tórico. Variedade Tórica. Ideal Tórico.*

Resumo

Dada uma matriz D com determinadas características, podemos definir sobre um corpo K o que chamamos de conjunto tórico Γ e variedade afim tórica $V(P)$. Tendo em vista que nem sempre um conjunto tórico é uma variedade tórica, nosso objetivo neste trabalho é apresentar um resultado que caracteriza quando $\Gamma = V(P)$, nos termos da estrutura do corpo K. Ao final apresentamos também alguns exemplos.

Introdução

Seja K um corpo qualquer e $D = (d_{ij})$ uma matriz $m \times n$ fixada com entradas inteiras d_{ij} não negativas e colunas não nulas. Sejam $R = K[x_1, \dots, x_n]$ e $K[t_1, \dots, t_m]$ dois anéis polinomiais sobre K, graduados por $deg(x_j) = d_{1j} + \dots + d_{mj}$ para todo $j = 1, \dots, n$ e $deg(t_i) = 1$ para todo $i = 1, \dots, m$. Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, denotamos por $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ o monômio correspondente em R.

Definição 1. *O produto cartesiano $K^n = K \times \dots \times K$ de n cópias de K, é chamado **espaço afim** de dimensão n sobre K e será denotado por $\mathbb{A}_K^n$. O **conjunto tórico** Γ determinado pela matriz D é o subconjunto de $\mathbb{A}_K^n$ dado parametricamente por $x_j = t_1^{d_{1j}} \dots t_m^{d_{mj}}$ para todo $j = 1, \dots, n$. Assim,*

$$\Gamma = \left\{ \left(t_1^{d_{11}} \dots t_m^{d_{m1}}, \dots, t_1^{d_{1n}} \dots t_m^{d_{mn}} \right) \in \mathbb{A}_K^n \mid t_1, \dots, t_m \in K \right\}.$$

Definição 2. *Seja $\phi : K[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow K[t_1, \dots, t_m]$ o homomorfismo graduado de K-álgebras induzido por $\phi(x_j) = t^{d_j}$. Em que $d_j = (d_{1j}, \dots, d_{mj})$ é o vetor composto pelas entradas da j-ésima coluna de D e $t^{d_j} = t_1^{d_{1j}} \dots t_m^{d_{mj}}$ o seu respectivo monômio em $K[t_1, \dots, t_m]$. O núcleo de ϕ, denotado por $P = ker(\phi)$, é chamado de **ideal tórico** associado a D.*

Observe que o homomorfismo $\psi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^m$, determinado pela matriz D nas bases canônicas de $\mathbb{Z}^n$ e $\mathbb{Z}^m$ está intimamente ligado a ϕ. De fato, denotando por $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, temos que $\phi(x^\alpha) = t^{\psi(\alpha)}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Definição 3. *Seja $I \subset R$ um ideal. A **variedade afim** de I, denotada por $V(I)$ é o conjunto*

$$V(I) = \{a \in \mathbb{A}_K^n \mid f(a) = 0, \text{ para todo } f \in I\}.$$

*Dizemos que o conjunto tórico Γ é uma **variedade afim tórica** se Γ é a variedade do ideal tórico P associado a D.*

Conjunto Tórico

Teorema 4. *([1], Teorema VIII.1.1). Sejam $m \geq 1$ e $n \geq 1$ dois inteiros. Seja $(\mathcal{D}, \varphi)$ um domínio euclidiano e seja $\mathcal{M} = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$ com entradas em $\mathcal{D}$. Então, através de uma sucessão finita de operações elementares*

*rejicalixto@ufu.br
†victor.neumann@ufu.br

em suas linhas e colunas, a matriz $\mathcal{M} = (a_{ij})$ pode ser transformada numa matriz diagonal da forma

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & \mathbf{0} & \\ & & & \lambda_s & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ & \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} & \\ & & & & & & & \end{array}\right]$$

com $0 \leq s \leq min\{m, n\}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ pertencentes a $\mathcal{D}\backslash\{0\}$ e λ_j dividindo λ_{j+1}, para cada $j = 1, 2, \ldots, s-1$. Isso é o mesmo que dizer que para toda matriz $\mathcal{M}$ com entradas num domínio euclidiano existem matrizes $U = (u_{ij})$ e $Q = (q_{ij})$ invertíveis de ordens m e n respectivamente, tais que $A = U\mathcal{M}Q$.

Para os resultados apresentados a seguir, vamos fixar algumas notações. Consideraremos Γ o conjunto tórico determinado pela matriz $D = (d_{ij})_{m\times n}$ definida como na seção anterior. Pelo Teorema 4 sabemos que existem matrizes $U = (u_{ij})$ e $Q = (q_{ij})$ invertíveis de ordens m e n respectivamente, tais que $L = U\mathcal{M}Q = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_s, 0, \ldots, 0)$, sendo $0 \leq s \leq min\{m, n\}$ e $\lambda_j | \lambda_{j+1}$, para cada $j = 1, 2, \ldots, s-1$. No caso particular da nossa matriz D definida em $\mathbb{Z}$, tem-se que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{Z}$ podem ser tomados positivos. Como U e Q são invertíveis, denotaremos suas inversas, respectivamente, por $U^{-1} = (f_{ij})$ e $Q^{-1} = (b_{ij})$.

Lema 5. *([2], Teorema 2.1) Se $\psi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^m$ é o homomorfismo determinado por D, então $ker(\psi) = \mathbb{Z}q_{s+1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}q_n$, em que q_i corresponde a i-ésima coluna de Q.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{Z}^n$ e façamos $y = Q^{-1}x$. Como $L = UDQ$ segue que

$$Dx = 0 \Leftrightarrow U^{-1}LQ^{-1}x = 0 \Leftrightarrow U^{-1}Ly = 0 \Leftrightarrow Ly = 0.$$

Vejamos que $q_i \in ker(\psi)$ para $i \geq s+1$. De fato, $Dq_i = U^{-1}LQ^{-1}q_i = U^{-1}Le_i$, sendo e_i o vetor em $\mathbb{Z}^n$ que tem 1 na i-ésima coordenada e 0 nas demais. Mas para $i \geq s+1$, tem-se $Le_i = 0$. Logo $Dq_i = 0$ e $q_i \in ker(\psi)$ para $i \geq s+1$.

Por outro lado, se $x \in ker(\psi)$, então $Ly = 0$. Assim, escrevendo $y = (y_1, \ldots, y_n)$, temos para $i = 1, \ldots, s$ que $\lambda_i y_i = 0$ e consequentemente $y_i = 0$. Portanto, $x = Qy = \sum_{i=s+1}^{n} y_i q_i$. Além disso, o fato de Q ser invertível, implica que suas colunas são linearmente independentes, o que completa a demonstração.

■

Proposição 6. *([2], Proposição 2.2) Seja $\psi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^m$ uma aplicação linear determinada por D e $v_j = \sum_{i=1}^{s} b_{ij}q_i$, sendo q_i a i-ésima coluna de Q. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{Z}^n$, então $\{v_j - e_j\}_{j=1}^{n}$ é um conjunto gerador de $ker(\psi)$.*

Demonstração. Observe inicialmente que $e_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}q_i$ para todo $1 \leq j \leq n$, pois $Q^{-1}Q$ é igual a matriz identidade. Dessa forma, podemos escrever

$$v_j = \sum_{i=1}^{s} b_{ij}q_i = e_j - \sum_{i=s+1}^{n} b_{ij}q_i \Rightarrow v_j - e_j = -\sum_{i=s+1}^{n} b_{ij}q_i \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

e pelo Lema 5, concluímos que $v_j - e_j \in ker\psi$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Observe que podemos escrever a matriz identidade da seguinte forma, $I_{id} = (\delta_{ik})$, com $\delta_{ik} = 1$ se $i = k$ e $\delta_{ik} = 0$ caso contrário. Da igualdade (1) segue que,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} q_{jk}(e_j - v_j) &= \sum_{j=1}^{n} q_{jk}\left(\sum_{i=s+1}^{n} b_{ij}q_i\right) \\ &= \sum_{i=s+1}^{n} q_i\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}q_{jk}\right) \end{aligned}$$

Agora, $\sum_{j=1}^{n} q_{jk} b_{ij} = \delta_{ik}$, pois é o produto da i-ésima linha de Q^{-1} pela k-ésima coluna de Q. Logo,

$$\sum_{j=1}^{n} q_{jk}(e_j - v_j) = \sum_{i=s+1}^{n} q_i \delta_{ik} = q_k$$

para $k \geq s+1$. Consequentemente, q_k está no subgrupo de $\mathbb{Z}^n$ gerado por $\{e_j - v_j\}_{i=1}^{n}$ para todo $k \geq s+1$, provando o que queríamos.

■

Teorema 7. *([2], Teorema 2.3) Sejam K um corpo, Γ o conjunto tórico determinado por D e P o seu ideal tórico. Então $\Gamma = V(P)$ se, e somente se, as duas seguintes condições são satisfeitas:*

(a) Se $(a_1, \ldots, a_n) \in V(P)$ e $a_i \neq 0$ $\forall i$, então $a_1^{q_{1i}} \ldots a_n^{q_{ni}}$ tem raiz λ_j-ésima em K para $i = 1, \ldots, s$.

(b) $V(P, x_i) \subset \Gamma$ para $i = 1, \ldots, n$.

Exemplos

Exemplo 1. *Seja $K = \mathbb{C}$ e D dada abaixo*

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Temos que $P = \langle x_1x_3 - x_2^2, x_1x_4 - x_2x_3, x_2x_4 - x_3^2 \rangle$ e $\Gamma = \{(t_1^3, t_1^2t_2, t_1t_2^2, t_2^3) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{C}\}$. Como K é algebricamente fechado, temos a condição (a) do Teorema 7 imediatamente satisfeita. Assim, basta verificarmos a condição (b). Note que

$$\begin{aligned}
V(P, x_1) &= \{(0,0,0,a_4) \mid a_4 \in \mathbb{C}\}; \\
V(P, x_2) &= \{(a_1,0,0,a_4) \in \mathbb{C} \mid a_1 = 0 \quad \text{ou} \quad a_4 = 0\}; \\
V(P, x_3) &= V(P, x_2); \\
V(P, x_4) &= \{(a_1,0,0,0) \in \mathbb{C}\}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $V(P, x_i) \subset \Gamma$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto, pelo Teorema 7 segue que $V(P) = \Gamma$.

O próximo exemplo mostra que há casos em que um conjunto tórico Γ é uma variedade afim, mas não uma variedade afim tórica.

Exemplo 2. *Considere agora $K = \mathbb{Z}_3$ e $D = (2,4)$. Então,*

$$\Gamma = \{(0,0),(1,1)\} = V(x_1 - x_2, x_2^2 - x_2) \quad , \quad P = \langle x_2 - x_1^2 \rangle.$$

É fácil verificar que neste caso $L = (2,0)$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, $\lambda_1 = 2$. Note que $(2,1) \in V(P)$, logo $V(P) \neq \Gamma$. Observe que não existe $a \in \mathbb{Z}_3$ tal que $a^2 = 2^1.1^0 = 2$, isto é, a condição (a) do Teorema 7 não é satisfeita.

Se K é um corpo qualquer temos que para a mesma matriz D, $\Gamma = \{(t^2, t^4) \mid t \in K\} = V(x_2 - x_1^2) = \{(t, t^2) \mid t \in K\}$ se, e somente se, todos os elementos de K possuem raiz quadrada em K.

Agradecimentos

Agradeço a CAPES pelo auxílio financeiro e ao meu orientador Victor Gonzalo pelas sugestões no trabalho.

Referências

[1] GARCIA, A; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[2] REYES, E; VILLARREAL, R. H.; ZÁRATE, L. A note on affine toric varieties. **Linear Algebra and its Applications**, v. 318, p. 173–179, out. 2000. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002437950000166X>. Acesso em: 20 set. 2018.