Aplicações da Série de Taylor

Primeiro autor
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
sarahmazzini@ufu.br

Segundo autor
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
sarahmazzini@ufu.br

Terceiro autor
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
sarahmazzini@ufu.br

Introdução

A chamada *série de Taylor* é uma forma de representação de funções. Esse tipo de série tem um grande número de aplicações. Uma das aplicações reside no desenvolvimento de métodos de resolução numérica para equações diferenciais. Em essência, desde que a função envolvida possua derivadas de qualquer ordem em um ponto de seu domínio, a série de Taylor representa essa função por meio de uma série de potências. Assim sendo, vamos primeiramente formalizar a série de Taylor pelo Teorema 1.

Teorema 1: Fórmula da série de Taylor com resto de Lagrange

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função com n derivadas contínuas e $f^{(n+1)}$ definida em todo o intervalo (a,b). Se $x_0 \in [a,b]$, $\exists\ \epsilon$ entre x_0 e x tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\epsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{1}$$

O Teorema de Taylor com Resto de Lagrange garante simplesmente que existe uma função para o resto e que seu valor existe para algum número entre x e x_0 [1], [2], [3]. A questão nesse ponto é que na maioria dos casos não é possível obter o valor de ϵ para cada valor de x que permita obter o erro.

Observando ainda o teorema dado, se desprezarmos o resto, a série de Taylor é um polinômio de grau n expresso, ao abrir a série, por

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

e representa uma aproximação, com um determinado grau de precisão, para a função original $f(x)$, em uma região em torno de x_0 e quanto mais próximo de x_0 for a variável x mais preciso será essa aproximação. Se observarmos a expressão do resto no teorema, pode se ver esse resto tende a zero quando x tende a x_0. Além disso, ressalta-se que quanto maior for o valor de n melhor é a aproximação. Para exemplificar, considere a expansão da função $f(x) = \cos x$ em termos de série de Mac-Laurin (que é caso quando $x_0 = 0$) até $n = 8$, a qual é dada abaixo.

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} \tag{2}$$

A Fig. 1 representa o gráfico da função $f(x) = \cos x$ e as demais figuras os gráficos desta juntamente com os polinômios de Taylor de graus 2,4,6 e 8 no intervalo $[-6,6]$.

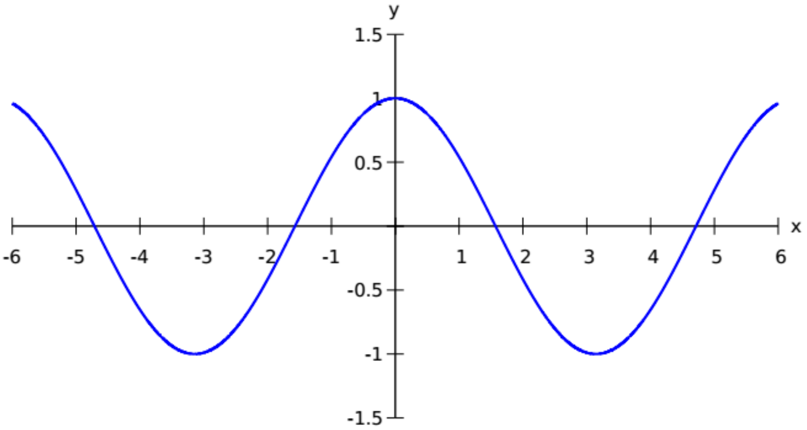

Figura 1: Gráfico da função $f(x) = \cos x$

Pode-se observar que o aumento do grau do polinômio de Taylor faz com que o polinômio se ajuste sobre a função $f(x) = cos(x)$. Assim sendo, quando $n \rightarrow +\infty$ temos que $p_n(x) \rightarrow f(x)$.

Primeira Seção

Digitar o texto aqui

Segunda Seção

Digitar o texto aqui

Referências

[1] Louis Leithold, *O cálculo com geometria analítica,* Harbra, Vol2, 1994.

[2] Doug Pagnutti e Carl Ollivier-Gooch, *A generalized framework for high order anisotropic mesh adaptation*, Computers and Structures, 2009.

[3] Rafael Yuri Medeiros Barbosa e Alessandro Alves Santana, *Resolução da Equação de Advecção Difusão Via Método dosVolumes Finitos Baseado em Reconstrução de Alta Ordem Santana*, XVIII Semana da Matemática e VII Semana da Estatística, Anais da SEMAT e SEMEST, 2018.