



Aplicações da Série de Taylor

Student Dezes Perado

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
student.perado@ufu.br

Hopera Dorderi Wada

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
hopera.dorderi@ufu.br

Alge Brabu Leana

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
alge.leana@ufu.br

Introdução

A chamada *série de Taylor* é uma forma de representação de funções. Esse tipo de série tem um grande número de aplicações. Uma das aplicações reside no desenvolvimento de métodos de resolução numérica para equações diferenciais. Em essência, desde que a função envolvida possua derivadas de qualquer ordem em um ponto de seu domínio, a série de Taylor representa essa função por meio de uma série de potências. Assim sendo, vamos primeiramente formalizar a série de Taylor pelo Teorema 1.

Teorema 1: Fórmula da Série de Taylor com resto de Lagrange

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ um função com n derivadas contínuas e $f^{(n+1)}$ definida em todo intervalo (a, b) . Se $x_0 \in [a, b]$, $\exists \varepsilon$ entre x_0 e x tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (1)$$

O Teorema de Taylor com Resto de Lagrange garante simplesmente que existe uma função para o resto e que seu valor existe para algum número entre x_0 e x . A questão nesse ponto é que na maioria dos casos não é possível obter o valor de ε para cada valor de x que permita obter o erro.

Observando ainda o teorema dado, se desprezarmos o resto, a série de Taylor é um polinômio de grau n expresso, ao abrir a série, por

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

e representa uma aproximação, com um determinado grau de precisão, para a função original $f(x)$, em uma região em torno de x_0 e quanto mais próximo de x_0 for a variável x , mais preciso será essa aproximação. Se observarmos a expressão do resto no teorema, pode se ver esse resto tende a zero quando x tende a x_0 . Além disso, ressalta-se que quanto maior for o valor de n melhor é a aproximação. Para exemplificar, considere a expansão da função $f(x) = \cos(x)$, em termos de série de Mac-Laurin (que é caso quando $x_0 = 0$) até $n = 8$, a qual é dada abaixo.

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} \quad (2)$$

A Fig. 1 apresenta o gráfico da função $f(x) = \cos(x)$ e as demais figuras os gráficos desta juntamente com os polinômios de Taylor de graus 2, 4, 6 e 8 no intervalo $[-6, 6]$.

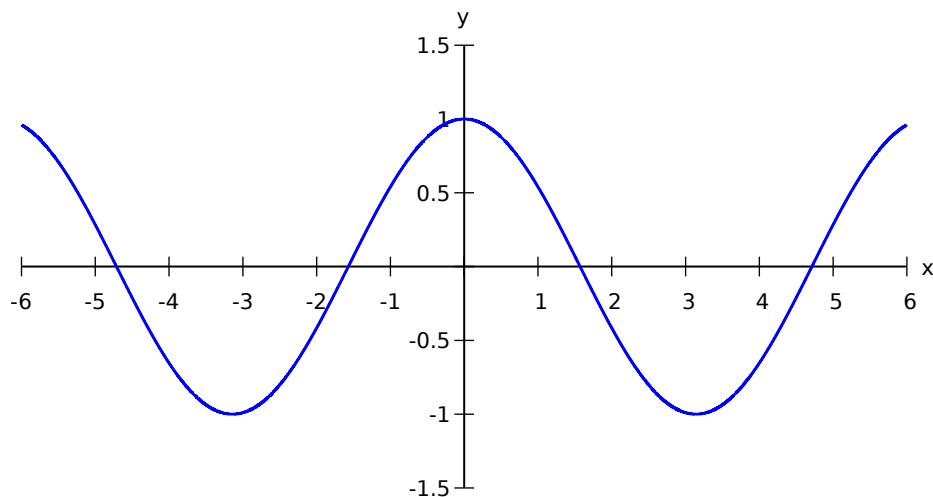


Figura 1: Gráfico da função $f(x) = \cos(x)$

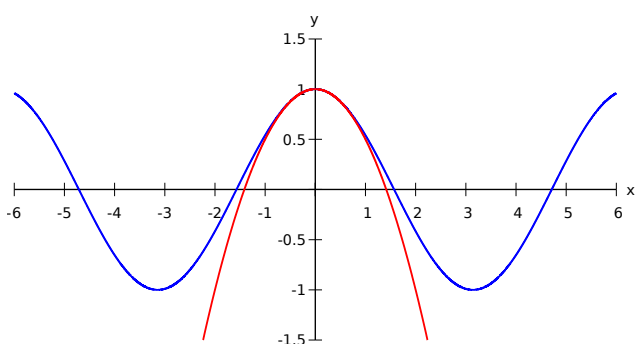


Figura 2: Função $f(x) = \cos(x)$ com $p_2(x)$.

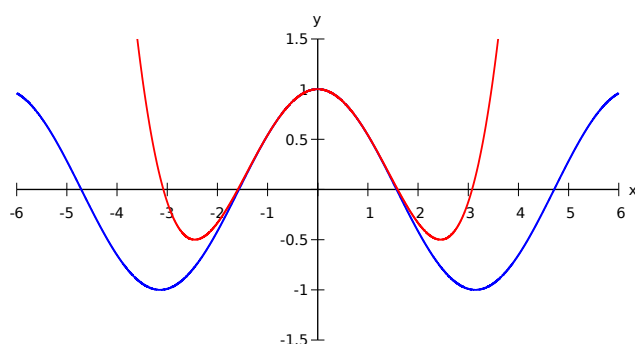


Figura 3: Função $f(x) = \cos(x)$ com $p_4(x)$.

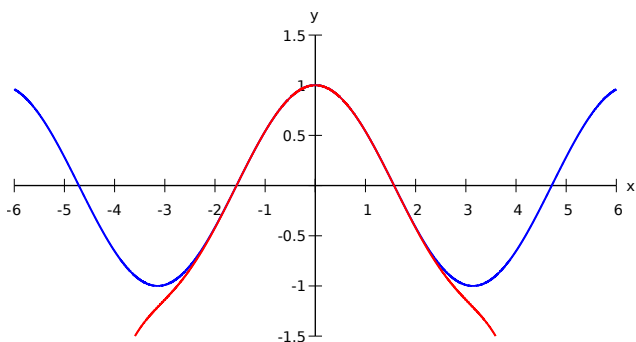


Figura 4: Função $f(x) = \cos(x)$ com $p_6(x)$.

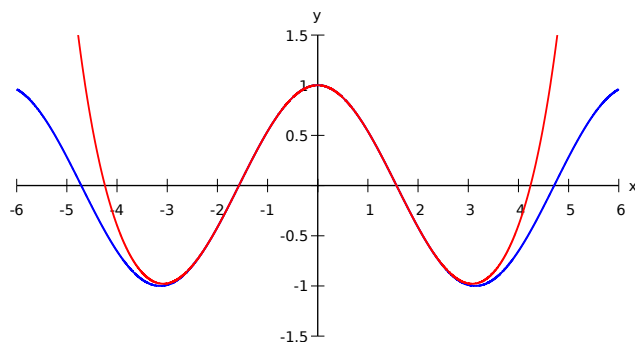


Figura 5: Função $f(x) = \cos(x)$ com $p_8(x)$.

Pode-se observar que o aumento do grau do polinômio de Taylor faz com que o polinômio se ajuste sobre a função $f(x) = \cos(x)$. Assim sendo, quando $n \rightarrow +\infty$ temos que $p_n(x) \rightarrow f(x)$.

Nas seções a seguir serão apresentadas algumas aplicações da Série de Taylor.

Cálculo de aproximações de integrais

Não é possível obter analiticamente a primitiva da maioria das integrais que aparecem em situações práticas. A série de Taylor pode ser empregada para obter aproximações de integrais definidas onde o integrando não pode ser integrado analiticamente. Assim sendo, para exemplificar, vamos obter uma aproximação para a integral da função $f(x) = e^{-x^2}$ no intervalo $[-1, 1]$, ou seja, vamos calcular a integral definida

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \quad (3)$$

aproximando $f(x) = e^{-x^2}$ por uma série de Taylor, em torno de $x = 0$, e integrar o polinômio gerado pela série de Taylor no intervalo $[-1, 1]$. Considerando o polinômio de Taylor de grau 2 para aproximar f , temos que

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \Rightarrow f(x) \approx f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2.$$

As derivadas de primeira e segunda ordens de f são, respectivamente,

$$f^{(1)}(x) = -2xe^{-x^2} \quad \text{e} \quad f^{(2)}(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

Avaliando essas derivadas em $x = 0$, segue que $f^{(1)}(0) = 0$ e $f^{(2)}(0) = -2$. Portanto, a aproximação de $f(x)$ por um polinômio de Taylor de ordem 2 é

$$f(x) \approx 1 - x^2.$$

Continuando,

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \approx 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx \Rightarrow \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \approx 2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \Rightarrow \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{4}{3}.$$

E com isso temos uma aproximação para a integral da função $f(x) = e^{-x^2}$ no intervalo $[-1, 1]$. Ressalta-se que quanto mais termos tiver o polinômio gerado pela série de Taylor melhor vai ser a aproximação.

Fórmulas de diferenças finitas

As chamadas **Fórmulas de Diferenças Finitas (FDF)** são fórmulas de aproximações para derivadas e tem uma grande aplicação no desenvolvimento de métodos de resolução numérica de EDO e EDP. O chamado **Método de Diferenças Finitas** é um método de resolução numérica de equações diferenciais que tem por base a aproximação das derivadas dessas equações por fórmulas de diferenças finitas. Essas fórmulas são obtidas utilizando expansões em série de Taylor da função incógnita. Vamos exemplificar isso obtendo uma fórmula de diferença finita para a derivada segunda de uma função f . Suponha que se tenha interesse em obter uma fórmula para aproximar a derivada segunda de uma função f de tal forma que

$$f^{(2)}(x) = \alpha f(x - \Delta x) + \beta f(x) + \gamma f(x + \Delta x). \quad (4)$$

Expandindo $f(x - \Delta x)$ e $f(x + \Delta x)$ em torno de x , temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x f^{(1)}(x) + \frac{\Delta x^2 f^{(2)}(x)}{2} - \frac{\Delta x^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{\Delta x^4 f^{(4)}(x)}{24} - \dots \end{array} \right. \quad (5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f^{(1)}(x) + \frac{\Delta x^2 f^{(2)}(x)}{2} + \frac{\Delta x^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{\Delta x^4 f^{(4)}(x)}{24} + \dots \end{array} \right. \quad (5b)$$

Substituindo (5a) e (5b) em (4), segue que

$$f^{(2)}(x) = \alpha \left[f(x) - \Delta x f^{(1)}(x) + \frac{\Delta x^2 f^{(2)}(x)}{2} - \frac{\Delta x^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{\Delta x^4 f^{(4)}(x)}{24} - \dots \right] + \beta f(x) + \gamma \left[f(x) + \Delta x f^{(1)}(x) + \frac{\Delta x^2 f^{(2)}(x)}{2} + \frac{\Delta x^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{\Delta x^4 f^{(4)}(x)}{24} + \dots \right]. \quad (6)$$

Agrupando e colocando em evidência os termos que envolvem $f(x)$, $f^{(1)}(x)$ e $f^{(2)}(x)$,

$$f^{(2)}(x) = (\alpha + \beta + \gamma) f(x) + (-\alpha + \gamma) \Delta x f^{(1)}(x) + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) \Delta x^2 f^{(2)}(x) + \dots \quad (7)$$

Desprezando os termos que envolvem as derivadas de terceira ordem em diante, para determinar α , β e γ , temos

que resolver o sistema linear

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = \frac{2}{\Delta x^2} \end{cases} \xrightarrow{\text{solução}} \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\Delta x^2} \\ \beta = -\frac{2}{\Delta x^2} \\ \gamma = \frac{1}{\Delta x^2} \end{cases} \quad (8)$$

Com esses valores obtemos a fórmula

$$f^{(2)}(x) \approx \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (9)$$

de aproximação para a derivada segunda da função $f(x)$, a qual pode ser empregada fornecendo o valor de x e de Δx . Claro que para obter uma aproximação razoável para $f^{(2)}(x)$ o valor de Δx tem que ser pequeno, entre $(0, 10^{-2})$, por exemplo.

Referências

- [1] Louis Leithold , *O Cálculo com Geometria Analítica*, Harbra , vol.2 , 1994.
- [2] Doug Pagnutti e Carl Ollivier-Gooch, *A generalized framework for high order anisotropic mesh adaptation*, Computers and Structures, 2009.
- [3] Rafael Yuri Medeiros Barbosa e Alessandro Alves Santana, *Resolução da Equação de Advecção Difusão Via Método dos Volumes Finitos Baseado em Reconstrução de Alta Ordem Santana*, XVIII Semana da Matemática e VII Semana da Estatística, Anais da SEMAT e SEMEST, 2018.
- [4] Gabriel Marcos Magalhães, *Resolução Numérica da Equação de Advecção-Difusão Bidimensional via Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas usando um Método de Reconstrução de Alta Ordem*, monografia de graduação, UFU-FEMEC, 2016.
- [5] Gaussian Quadrature, https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature, acessado: 21/06/2019.