

Introdução

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Seção 1

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Definição

Coloque aqui sua primeira definição.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Teorema

Coloque aqui seu primeiro teorema.

Demonstração: Veja [2, Teorema 1 (Pág. 3)].

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Corolário

Coloque aqui seu primeiro corolário.

Demonstração: Veja [2, Corolário 2 (Pág. 5)].

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Seção 2

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Exemplo 1. O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é equinumeroso à \mathbb{N} .

De fato, podemos considerar a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que associa a cada par (m, n) o valor, mostrado na figura abaixo, que se encontra no ponto de coordenadas (m, n) . Observe que a função f é bijetora.

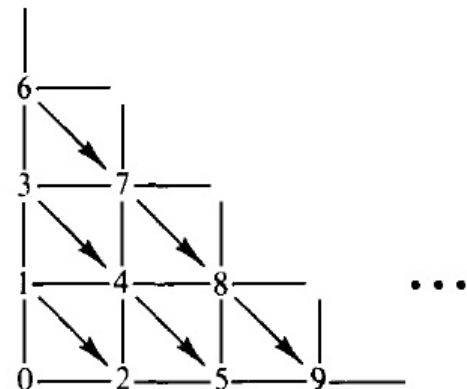


Figura: Legenda da Figura.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Exemplo 3. O intervalo aberto $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$ é equinumeroso à \mathbb{R} .

Para provar isto, vamos considerar uma construção geométrica que nos dá uma bijeção, mostrada na figura abaixo. Podemos “dobrar” $(0, 1)$ em um semicírculo com centro P. Cada ponto em $(0, 1)$ está em correspondência com sua projeção na reta real.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Definição

Um conjunto X diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Nesse caso, f chama-se uma *enumeração* dos elementos de X .

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Observe que X é enumerável se, e somente se, X é equinumeroso à \mathbb{N} . Pelos Exemplos 1 e 2, temos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e \mathbb{Q} são enumeráveis. Ainda obtemos o seguinte resultado.

Teorema

A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração: Veja [2, Corolário 4 (Pág. 8)].

Vejamos na seção a seguir um interessante exemplo relacionado a enumerabilidade de conjuntos.

Seção 3

Segundo [3], o Hotel de Hilbert é um famoso hotel que nunca deixou um viajante sem quarto, isso ocorria por ter infinitos quartos e um engenhoso gerente. Os quartos do hotel são todos numerados utilizando-se os números naturais.



Figura: Desenho do Hotel de Hilbert.

Teorema (Teorema de Cantor)

O conjunto \mathbb{N} dos números naturais não é equinumeroso ao conjunto \mathbb{R} dos números reais.

Demonstração: Mostraremos que nenhuma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser sobrejetora. Imagine uma lista dos valores de f , expressos como decimais infinitos:

$$f(0) = a_{01} \dots a_{0n_0} b_{01} b_{02} b_{03} \dots$$

$$f(1) = a_{11} \dots a_{1n_1} b_{11} b_{12} b_{13} \dots$$

$$f(2) = a_{21} \dots a_{2n_2} b_{21} b_{22} b_{23} \dots$$

Construiremos um $z \in \mathbb{R}$ que não aparece nessa lista. Tome

$$z = 0, c_1 c_2 c_3 \dots,$$

onde

$$c_j = \begin{cases} 7, & \text{se } b_{j-1,j} \neq 7 \\ 6, & \text{se } b_{j-1,j} = 7. \end{cases}$$

Então, por construção, z é diferente de $f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, f não é sobrejetora.

A grosso modo, esse teorema nos mostra que o conjunto infinito \mathbb{R} é maior que o conjunto infinito \mathbb{N} , isto é, o infinito dos reais é maior que o infinito dos naturais.

- **Texto em negrito** Texto aqui
- Item 2;
- Item 3;
- Item 4.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PPGMAT da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço a CAPES/FAPEMIG pelo fomento.

Referências Bibliográficas

- Herbert B. Enderton, *Elements of set theory*, Academic press, 1977.
- Elon Lages Lima, *Análise Real*, Impa, Volume 1, 2004.
- Desafio: Hotel de Hilbert, <http://clubes.obmep.org.br/blog/desafio-hotel-de-hilbert/>, acessado: 26/09/2019.