

### Introdução

Neste trabalho, estamos interessados em discutir...

### Seção 1

Vejamos como usar os ambientes para definições, teoremas, corolários.

#### Definição

Coloque aqui sua primeira definição.

#### Teorema

Coloque aqui seu primeiro teorema.

**Demonstração:** Veja [2, Teorema 1 (Pág. 3)].

#### Corolário

Coloque aqui seu primeiro corolário.

**Demonstração:** Veja [2, Corolário 2 (Pág. 5)].

### Seção 2

Vamos agora dar uma resposta para a primeira pergunta apresentada na Introdução...

**Exemplo 1.** O conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é equinumeroso à  $\mathbb{N}$ . De fato, podemos considerar a função  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que associa a cada par  $(m, n)$  o valor, mostrado na figura abaixo, que se encontra no ponto de coordenadas  $(m, n)$ . Observe que a função  $f$  é bijetora.

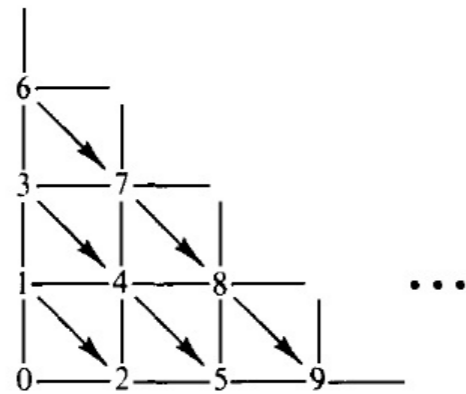


Figura: Legenda da Figura.

**Exemplo 3.** O intervalo aberto  $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$  é equinumeroso à  $\mathbb{R}$ . Para provar isto, vamos considerar uma construção geométrica que nos dá uma bijeção, mostrada na figura abaixo. Podemos “dobrar”  $(0, 1)$  em um semicírculo com centro P. Cada ponto em  $(0, 1)$  está em correspondência com sua projeção na reta real.

#### Definição

Um conjunto  $X$  diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Nesse caso,  $f$  chama-se uma *enumeração* dos elementos de  $X$ .

Observe que  $X$  é enumerável se, e somente se,  $X$  é equinumeroso à  $\mathbb{N}$ . Pelos Exemplos 1 e 2, temos que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  e  $\mathbb{Q}$  são enumeráveis. Ainda obtemos o seguinte resultado.

#### Teorema

*A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

**Demonstração:** Veja [2, Corolário 4 (Pág. 8)].

Vejamos na seção a seguir um interessante exemplo relacionado a enumerabilidade de conjuntos.

### Seção 3

Segundo [3], o Hotel de Hilbert é um famoso hotel que nunca deixou um viajante sem quarto, isso ocorria por ter infinitos quartos e um engenhoso gerente. Os quartos do hotel são todos numerados utilizando-se os números naturais.



Figura: Desenho do Hotel de Hilbert.

#### Teorema (Teorema de Cantor)

*O conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais não é equinumeroso ao conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais.*

**Demonstração:** Mostraremos que nenhuma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser sobrejetora. Imagine uma lista dos valores de  $f$ , expressos como decimais infinitos:

$$\begin{aligned} f(0) &= a_{01} \dots a_{0n_0} b_{01} b_{02} b_{03} \dots \\ f(1) &= a_{11} \dots a_{1n_1} b_{11} b_{12} b_{13} \dots \\ f(2) &= a_{21} \dots a_{2n_2} b_{21} b_{22} b_{23} \dots \end{aligned}$$

Contruiremos um  $z \in \mathbb{R}$  que não aparece nessa lista. Tome

$$z = 0, c_1 c_2 c_3 \dots,$$

onde

$$c_j = \begin{cases} 7, & \text{se } b_{j-1,j} \neq 7 \\ 6, & \text{se } b_{j-1,j} = 7. \end{cases}$$

Então, por construção,  $z$  é diferente de  $f(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $f$  não é sobrejetora.

A grosso modo, esse teorema nos mostra que o conjunto infinito  $\mathbb{R}$  é maior que o conjunto infinito  $\mathbb{N}$ , isto é, o infinito dos reais é maior que o infinito dos naturais.

- **Texto em negrito** Texto aqui
- Item 2;
- Item 3;
- Item 4.

### Agradecimentos

Na condição de bolsista do PPGMAT da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço a CAPES/FAPEMIG pelo fomento.

### Referências Bibliográficas

- 1 Herbert B. Enderton, *Elements of set theory*, Academic press, 1977.
- 2 Elon Lages Lima, *Análise Real*, Impa, Volume 1, 2004.
- 3 Desafio: Hotel de Hilbert, <http://clubes.obmep.org.br/blog/desafio-hotel-de-hilbert/>, acessado: 26/09/2019.