XVIII SEMAT E VIII SEMEST
Universidade Federal de Uberlândia
02 a 05 de outubro de 2018

# Extensão de operadores multilineares em espaços de Hilbert

Luis A. Garcia*[1] e Geraldo Botelho †[1]

[1]FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia

**Palavras-chave:** *Espaços normados. Espaços de Hilbert. Operadores multilineares.*

## Resumo

Neste trabalho mostraremos que operadores multilineares contínuos definidos em um subespaço de um espaço de Hilbert a valores em um espaço de Banach sempre podem ser estendidos continuamente ao espaço todo. Para lograr nosso objetivo mostraremos que operadores multilineares contínuos podem ser estendidos ao fecho e também quando os subespaços são complementados.

## Introdução

Sejam $G_1$ subespaço do espaço de Hilbert $H_1$,..., $G_n$ subespaço do espaço de Hilbert $H_n$ e $F$ um espaço de Banach. Se $A$ é um operador multilinear contínuo de $G_1 \times \cdots \times G_n$ em $F$. Mostraremos que o operador $A$ pode ser estendido a $H_1 \times \cdots \times H_n$ para um operador multilinear contínuo preservando a norma. Para mostrar este resultado faremos uso de dois tipos de extensões: a primeira é a extensão ao fecho e a segunda é a extensão quando os subespaços são $\lambda$-complementados, $\lambda \geq 1$. Mais precisamente, se $G_j$ são subespaços do espaço normado $E_j, j = 1, \ldots, n$ então $A$ podem ser estendido ao fecho de $G_j, j = 1, \ldots, n$; e se os espaços $E_j$ são espaços de Banach, também $A$ pode ser estendido de maneira contínua ao espaço todo, sempre que os subespaços $G_j \subseteq E_j$ são $\lambda_j$-complementados.
Dados $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n, F$, por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ denotamos o espaço dos operadores $n$-lineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em $F$ com a norma usual de operadores, isto é,

$$\|A\| = \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_n)\| : x_j \in E_j, \|x_j\| \leq 1, j = 1, \ldots, n\}.$$

## Resultados

O seguinte resultado nos diz que entre os conjunto $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\mathcal{L}(E_1, ; \mathcal{L}(E_2, \ldots, E_n; F))$ existe um isomorfismo isométrico, mais precisamente temos o

**Teorema 1.** [3, Proposition 1.4] *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados e $F$ um espaço de Banach. Então*

$$\psi : \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, ; \mathcal{L}(E_2, \ldots, E_n; F)),\ \psi(A)(x_1)(x_2, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n)$$

*é um isomorfismo isométrico.*

Combinaremos agora o Teorema (1) com um argumento de indução sobre o grau de multilinearidade para provar o seguinte teorema de extensão:

**Teorema 2.** *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados, $F$ espaço de Banach, $G_1$ subespaço de $E_1, \ldots, G_n$ subespaço de $E_n$. Para todo $A \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$ existe um único $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(\overline{G_1}, \ldots, \overline{G_n}; F)$ que estende $A$ e $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.*

*Demonstração.* Faremos a demonstração por indução sobre o grau de multilinearidade. Para $n = 1$, isto é, para o caso linear, o resultado pode ser encontrado em [2, Lema 3.32]. Suponhamos que o teorema seja válido para $n = k$,

*luis.santisteban@ufu.br
†botelho@ufu.br

isto é, a hipótese indutiva é que se $B \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_k; F)$, então existe um único $\widetilde{B} \in \mathcal{L}(\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_k; F)$ que estende $B$ e $\| \widetilde{B} \| = \|B\|$. Mostremos que o teorema é valido para $n = k+1$. Pelo Teorema 1,

$$\psi_1 : \mathcal{L}(G_1, \dots, G_{k+1}; F) \longrightarrow \mathcal{L}(G_1; \mathcal{L}(G_2, \dots, G_{k+1}; F)),$$

dado por $\psi_1(A)(x_1)(x_2, \dots, x_{k+1}) = A(x_1, \dots, x_{k+1})$, é um isomorfismo isométrico. Para cada $x_1 \in G_1$, $\psi_1(A)(x_1) \in \mathcal{L}(G_2, \dots, G_{k+1}; F)$, pela hipótese indutiva existe um único $\widetilde{\psi_1(A)(x_1)} \in \mathcal{L}(\overline{G}_2, \dots, \overline{G}_{k+1}; F)$ que estende $\psi_1(A)(x_1)$ e

$$\| \widetilde{\psi_1(A)(x_1)} \| = \|\psi_1(A)(x_1)\|.$$

Basta então definir $A_1 : G_1 \longrightarrow \mathcal{L}(\overline{G}_2, \dots, \overline{G}_{k+1}; F),\ A_1(x_1) = \widetilde{\psi_1(A)(x_1)}$, e usar o caso linear para o operador $A_1$ e o isomorfismo isométrico $\psi_2 : \mathcal{L}(\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_{k+1}; F) \longrightarrow \mathcal{L}(\overline{G_1}; \mathcal{L}(\overline{G}_2, \dots, \overline{G}_{k+1}; F))$ do Teorema 1. ∎

Uma outra demonstração do teorema acima segue do fato que operadores multilineares contínuos são uniformemente contínuos sobre limitados.

**Definição 3.** (a) Seja $E$ um espaço de Banach. Um operador linear contínuo $P : E \longrightarrow E$ é uma *projeção* se $P^2 := P \circ P = P$.

(b) Um subespaço $F$ do espaço de Banach $E$ é *complementado* se existe uma projeção $P : E \longrightarrow E$ cuja imagem coincide com $F$, ou, equivalentemente, se existe um subespaço fechado $G$ de $E$ tal que $E = F \oplus G$. Dizemos que $F$ é $\lambda-$*complementado*, $\lambda \geq 1$, se $\|P\| \leq \lambda$.

Também temos outra maneira de estender operadores multilineares contínuos definidos em subespaços $\lambda$-complementados, $\lambda \geq 1$, que nos ajudará a provar o resultado principal.

**Teorema 4.** *Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços de Banach, $G_j$ subespaço $\lambda_j-$complementado de $E_j$, $j = 1, \dots, n$, e $F$ espaço normado. Se $A \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; F)$, então existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ extensão de $A$ e $\|A\| \leq \|\widetilde{A}\| \leq \|A\| \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_n$.*

*Demonstração.* Para cada $j = 1, \dots, n$, tome $P_j : E_j \longrightarrow E_j$ projeção sobre $G_j$ e chame $Q_j : E_j \longrightarrow G_j$, $Q_j(x) = P_j(x)$. Basta definir $\widetilde{A} : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$, $\widetilde{A}(x_1, \dots, x_n) = A(Q_1(x_1), \dots, Q_n(x_n))$. □ ∎

Por fim temos a extensão de operadores multilineares contínuos definidos em subespaços de um espaço de Hilbert.

**Teorema 5.** *Sejam $H_1, \dots, H_n$ espaços de Hilbert, $F$ espaço de Banach e $G_1$ subespaco não trivial de $H_1$,...,$G_n$ subespaco não trivial de $H_n$. Se $A \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; F)$ então existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(H_1, \dots, H_n; F)$ que estende $A$, mais ainda $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.*

*Demonstração.* Segue do Teorema 2 e do Teorema 4 usando que todo subespaço fechado não-nulo de um espaço de Hilbert é $1$-complementado (veja [1, Corolário 5.2.7]). ∎

## Referências


[1] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[2] LOPES, W. A. **O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações**. 2009. 58 f. Dissertação (Mestrado)- UFU, Uberlândia, 2009.

[3] MUJICA, J. **Analysis in Banach Spaces**. 1. ed. New York: Dover, 2010.