XVIII SEMAT E VIII SEMEST
Universidade Federal de Uberlândia
02 a 05 de outubro de 2018

$L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é espaçável para cada $p > 0$

Fidel Huayhuas Chipana[*1] **e Vinícius Vieira Fávaro**[†1]

[1]FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia
[2]FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia

Palavras-chave: *Espaços de funções mensuráveis, espaçabilidade.*

Resumo

Neste trabalho provaremos que o conjunto $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é espaçável, para cada $p > 0$.

Introdução

O termo *lineabilidade* foi introduzido por V. I. Gurariy no início da década de 2000 e, de maneira bem informal, lineabilidade é a busca por linearidade em ambientes em que, *a priori*, não se tem uma estrutura linear. Mais precisamente, seja E um espaço vetorial topológico. Dizemos que $A \subset E$ é λ*-lineável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão λ (aqui λ pode ser um número natural ou um cardinal transfinito). Dizemos que $A \subset E$ é *espaçável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão infinita e fechado em E.

Neste trabalho estamos interessados em estudar a espaçabilidade de um certo subconjunto do espaço das funções mensuráveis p-integráveis. Mais precisamente, para $0 \leq p < \infty$, denotamos por $L_p[0,1]$ o espaço vetorial

$$L^p[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : f \quad \text{é mensurável e} \int |f|^p < \infty\}.$$

Apesar de estarmos escrevendo $f \in L^p[0,1]$ na verdade estamos considerando a classe de equivalência $[f]$ de todas as funções que são iguais a f quase sempre. Assim, se $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p[0,1]$ se torna um espaço de de Banach com a norma

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e, se $0 < p < 1$, $\|\cdot\|_p$ é uma p-norma que torna $L_p[0,1]$ um espaço quase-Banach.

Não é difícil ver que se $q > p$ então $L^q[0,1] \subset L^p[0,1]$ e a inclusão é contínua e própria. Logo faz sentido se perguntar se $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é não vazio. Essa pergunta já não é trivial de se responder, mas é verdade que $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1] \neq \varnothing$. Sendo assim, faz sentido perguntar se $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é λ-lineável, para algum λ ou se é espaçável.

Neste trabalho vamos provar que $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é espaçável. Exibiremos aqui a prova detalhada deste fato que foi provado em [1] e cuja demonstração omite alguns detalhes.

Resultado principal

Iniciaremos essa seção definindo os espaços de sequências absolutamente p-somáveis que serão necessários na demonstração do resultado principal.

Definição 1. Seja $0 \leq p < \infty$. Definimos

$$\ell_p = \{(a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{R} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty\},$$

*fidel.chipana@ufu.br
†vvfavaro@ufu.br

o qual se torna um espaço de Banach (p-Banach se $0 < p < 1$) com a norma (p-norma se $0 < p < 1$)

$$\|f\|_p = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 2. $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é espaçável para cada $p > 0$.

Demonstração. Primeiro vamos a considerar a seguinte representação do intervalo semi aberto $[0,1)$ como uma união disjunta de intervalos:

$$[0,1) = [0, 1-1/2) \cup [1-1/2, 1-1/4) \cup [1-1/4, 1-1/8) \cdots = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

onde $I_n := [a_n, b_n) = [1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n})$. Além disso para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $x \in I_n$ existe um único $t_{x,n} \in [0,1)$ tal que

$$x = (1 - t_{x,n})a_n + t_{x,n} b_n.$$

Agora, dado $p > 0$, tome uma função $f \in L_p[0,1] - \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ e definamos a seguinte sequência de funções $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, com $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(t_{x,n}) & \text{se } x \in I_n \\ 0 & \text{se } x \notin I_n \end{cases} \tag{1}$$

A ideia geometrica é reproduzir o grafico da f no intervalo I_n. Por construção $\|f_n\|_p = (b_n - a_n)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p < \|f\|_p$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Também note que as funções f_n são linearmente independentes (pois elas têm suporte disjuntos) e

$$\operatorname{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1].$$

Este último prova que $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é $\aleph_0$- lineable. Agora para provar a espaçabilidade a estratégia é definir um operador linear injetivo $T : F \longrightarrow L_p[0,1]$, onde F é um espaço de Banach, tal que $\overline{T(F)} \bigcap L_q[0,1] = \{0\}$ para cada $q > p$. Isso prova que $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é espaçável. De fato, se $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s$, onde $s = 1$ se $p \geq 1$ e $s = p$ se $0 < p < 1$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n f_n\|_p^s = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^s \|f_n\|_p^s \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^s \|f\|_p^s = \|f\|_p^s \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_s^s < +\infty$$

Já que $L_p[0,1]$ é um espaço de Banach para $p > 1$ e é quase- Banach para $0 < p < 1$ (convergência absoluta implica convergência) segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \in L_p[0,1]$ e assim

$$T : \ell_s \longrightarrow L_p[0,1], T((\alpha_j)_{j=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$$

o operador está bem definido. Além disso, T é injetora, de fato se $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n = 0$, então dado qualquer $k \in \mathbb{N}$ temos que , para qualquer $x \in I_k$,

$$\alpha_k f_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(x) = 0$$

e, já que cada $f_k \neq 0$, segue que $\alpha_k = 0$. Logo T é injetora e consequentemente $T(\ell_s)$ é um subespaço vetorial de $L_p[0,1]$. Considerando o fecho $\overline{T(\ell_s)}$ de $T(\ell_s)$ em $L_p[0,1]$ provaremos que $\overline{T(\ell_s)} \bigcap L_q[0,1] = \{0\}$ para todo $q > p$. De fato, seja $g \in \overline{T(\ell_s)} \setminus \{0\}$. Assim $g \neq 0$ *q.t.p.*, isto é o conjunto $A = \{x \in [0,1] : g(x) \neq 0\}$ tem medida positiva. Assim existem sequências $\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_s (k \in \mathbb{N})$ tal que $g = \lim_{k\to\infty} T\left(\left(a_i^{(k)}\right)\right)$ em $L_p[0,1]$. Assim, temos que $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} f_n - g\right\|_p \longrightarrow 0$ quando $k \to \infty$. Em particular, existe uma subsequência $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k_j)} f_n\right)_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{k_j} f_n(x_0) \longrightarrow g(x) q.t.p. \text{ quando } j \to \infty.$$

Daí, o conjunto $B^c = [0,1] - B)$ onde $B = \{x \in [0,1] :$ o limite acima existe$\}$, tem medida zero. Já que $A = (B \cap A) \cup (B^c \cap A)$, $B^c \cap A$ tem medida zero e A tem medida positiva, segue que $A \cap B$ tem medida positiva. Daí existe $x_0 \in B \cap A$ com $x_0 \neq 1$, isto é, $g(x_0) \neq 0$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{k_j} f_n(x_0) \longrightarrow g(x_0) \text{ quando } j \to \infty.$$

Já que $x_0 \in [0,1)$, existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in I_r$. Assim

$$a_r^{k_j} f_r(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{k_j} f_n(x_0) \longrightarrow g(x_0) \text{ quando } j \to \infty.$$

Observe que f pode ser escolhido tal que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in [0,1]$, daí $f_r(x) \neq 0$,para todo $x \in [0,1]$. Assim

$$\lim_{j\to\infty} a_r^{(k_j)} = \frac{g(x_0)}{f_r(x_0)} = \eta \neq 0.$$

Então

$$f_r(x) a_r^{k_j} \longrightarrow g(x) \quad q.t.p. \text{ em } I_r, \text{ quando } j \to \infty.$$

Logo, pela unicidade do limite temos que

$$g(x) = \eta f_r(x) \quad q.t.p. \quad x \in I_r$$

Assim $g \notin L_q[0,1]$ finalizando a prova. ∎

Agradecimentos

Fico grato a CAPES pelo apoio financeiro.

Referências

[1] G. Botelho, V. V. Fávaro, D. Pellegrino, and J. B. Seoane-Sepúlveda, $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ *is spaceable for every* $p > 0$, Linear Algebra Appl. **436** (2012), 2963–2965.