

# XVII SEMAT E VII SEMEST

Universidade Federal de Uberlândia 07 a 10 de novembro de 2017

# O Adjunto de um Polinômio Homogêneo

# Letícia Garcia Polac\*1 and Geraldo M. A. Botelho†2

<sup>1,2</sup>FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia

Palavras-chave: Polinômios homogêneos contínuos. Adjunto. Polinômios do tipo finito.

#### Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar o adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach. Mostraremos algumas propriedades básicas e exemplos de adjuntos de determinados polinômios homogêneos, em especial, mostraremos que o adjunto de um polinômio homogêneo do tipo finito é um operador linear de posto finito.

## Introdução

Sejam E e F espaços de Banach e  $P:E\longrightarrow F$  um polinômio m-homogêneo contínuo. Em [1], Aron e Schotten-loher definiram o adjunto de P como sendo o seguinte operador linear contínuo:

$$P': F' \longrightarrow \mathcal{P}(^m E)$$
,  $P'(\varphi)(x) = \varphi(P(x))$ ,

onde  $\mathcal{P}(^mE)$  é o espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos de E no corpo dos escalares. É claro que essa definição generaliza a noção de adjunto u' de um operador linear u. Neste trabalho veremos que o adjunto de um polinômio homogêneo compartilha de muitas propriedades do adjunto de um operador linear.

As seguintes notações serão utilizadas:

- E'= dual topológico do espaço vetorial normado E.
- $\mathcal{L}(E;F)$ = espaço dos operadores lineares contínuos de E em F.
- $\mathcal{P}(^mE;F)$ = espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos de E em F.
- $\mathcal{P}(^mE)$ = espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos de E sobre o corpo  $\mathbb{K}$  =  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Resultados

Apesar do adjunto de um polinômio homogêneo compartilhar de muitas das propriedades do adjunto de um operador linear, conforme verificaremos a seguir; é importante notar que, enquanto o adjunto de um operador linear é também um operador linear, o adjunto de um polinômio homogêneo não é um polinômio homogêneo, e sim um operador linear:

**Proposição 1.** Sejam E e F espaços de Banach, P e  $Q \in \mathcal{P}(^mE; F)$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Então:

- (a) P' é um operador linear contínuo, isto é,  $P' \in \mathcal{L}(F'; \mathcal{P}(^mE))$ .
- (b) (P+Q)' = P' + Q'.
- (c)  $(\lambda P)' = \lambda P'$ .
- (d) ||P'|| = ||P||.

Demonstração: Veja [6], Proposição 2.1.3

Corolário 2. Sejam E e F espaços de Banach. A aplicação dada por

$$\Phi: \mathcal{P}(^m E; F) \longrightarrow \mathcal{L}(F'; \mathcal{P}(^m E)), \ \Phi(P) = P',$$

é uma isometria linear.

<sup>\*</sup>leticia.polac@ufu.br

<sup>†</sup>botelho@ufu.br

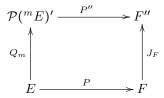
Denotaremos por  $J_F$  o mergulho canônico do espaço normado F em F'' e

$$Q_m: E \longrightarrow \mathcal{P}(^m E)', \ Q_m(x)(P) = P(x),$$

o polinômio m-homogêneo contínuo de norma 1 .

Para  $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ , por P'' denotamos o adjunto do operador linear P', isto é, P'' = (P')'. Note que  $P'' \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^mE)'; F'')$ .

**Proposição 3.** Sejam E e F espaços Banach e  $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ . Então P'' é uma extensão de P a  $\mathcal{P}(^mE)'$  no sentido de que  $J_F \circ P = P'' \circ Q_m$ , ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:



Em particular,  $P''(Q_m(E)) = J_F(P(E))$ .

Demonstração: Veja [6], Proposição 2.1.5

**Exemplo 4.** Sejam E e F espaços de Banach,  $\varphi \in E'$  e  $b \in F$ . Considere o polinômio m-homogêneo contínuo  $\varphi^m \otimes b$  dado por

$$\varphi^m \otimes b: E \longrightarrow F, \quad (\varphi^m \otimes b)(x) = (\varphi(x))^m b.$$

Veremos que  $(\varphi^m \otimes b)' = J_F(b) \otimes \varphi^m$ .

**Definição 5.** Um polinômio  $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$  entre espaços normados é denominado de tipo finito se é da forma

$$P = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j^m \otimes b_j,$$

onde  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_j \in E'$  e  $b_j \in F$  para todo  $j \in \{1, \dots, k\}$ .

É fácil ver que o subconjunto de todos os polinômios m-homogêneos contínuos de tipo finito é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}(^mE;F)$ , que será denotado por  $\mathcal{P}_f(^mE;F)$ . E também não é difícil verificar que se E tem dimensão finita, então todo polinômio homogêneo em E é de tipo finito, isto é,

$$\mathcal{P}(^{m}E;F) = \mathcal{P}_{f}(^{m}E;F)$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$  e todo espaço normado F.

**Exemplo 6.** Seja  $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$  um polinômio contínuo de tipo finito. Então P é da forma

$$P = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j^m \otimes b_j,$$

com  $\varphi_i \in E'$  e  $b_i \in F$  para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Da Proposição 1 e do exemplo anterior segue que

$$P' = \sum_{j=1}^k J_F(b_j) \otimes \varphi^m.$$

Como  $J_F(b_j) \in F''$  e  $\varphi^m \in \mathcal{P}(^mE)$  para  $j \in \{1, \dots, k\}$ , segue que P' é um operador linear de posto finito. Assim, o adjunto de todo polinômio homogêneo de tipo finito é um operador linear de posto finito.

**Exemplo 7.** Sejam E e F espaços de Banach,  $Q \in \mathcal{P}(^mE)$  e  $b \in F$ . Determinemos o adjunto do polinômio m-homogêneo  $Q \otimes b$ , isto é,

$$Q \otimes b : E \longrightarrow F$$
,  $Q \otimes b(x) = Q(x)b$ .

Então  $(Q \otimes b)' = J_F(b) \otimes Q$ .

Para o próximo exemplo precisaremos do seguinte resultado:

**Lema 8.** Sejam E um espaço normado e  $\varphi \in E'$ . Então a aplicação dada por

$$T_{\varphi}: E' \longrightarrow \mathcal{P}(^{m}E), \ T_{\varphi}(\psi)(x) = \varphi(x)^{m-1}\psi(x),$$

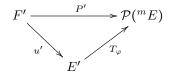
é linear e contínua, ou seja,  $T_{\varphi} \in \mathcal{L}(E'; \mathcal{P}(^{m}E))$ .

Demonstração: Veja [6], Lema 2.2.4

**Exemplo 9.** Sejam  $E \in F$  espaços de Banach,  $\varphi \in E'$ ,  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  e  $m \in \mathbb{N}$ . Considere o polinômio m-homogêneo P

$$P: E \longrightarrow F, \ P(x) = \varphi(x)^{m-1}u(x).$$

Então  $P' = T_{\varphi} \circ u'$ , onde  $T_{\varphi}$  é o operador linear do Lema 8, ou seja, que o seguinte diagrama é comutativo:



**Exemplo 10.** Sejam E espaço de Banach,  $\varphi \in E'$  e  $m \in \mathbb{N}$ . Considere o polinômio m-homogêneo

$$P: E \longrightarrow E, \ P(x) = \varphi(x)^{m-1}x.$$

Tomando  $u=Id_E$  no exemplo anterior, temos  $P'=T_\varphi\circ (Id_E)'=T_\varphi\circ Id_{E'}.$ 

O polinômio homogêneo deste exemplo é muito usado como o análogo polinomial do operador identidade (veja, por exemplo, [3]).

## Referências

- [1] T. R. ALVES, Polinômios dominados entre espaços de Banach, Dissertação de Mestrado, UFU, 2011.
- [2] R. Aron E M. Schottenloher, *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*, J. Funct. Anal. **21** (1976), 7–30.
- [3] G. BOTELHO, Weakly compact and absolutely summing polynomials, J. Math. Anal. Appl. 265 (2002), 458-462.
- [4] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO E E. TEIXEIRA, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [5] G. M. R. PEREIRA, O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach, Dissertação de Mestrado, UFU, 2012.
- [6] L. G. Polac, O adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach, Dissertação de Mestrado, UFU, 2014.