XVII SEMAT E VII SEMEST
Universidade Federal de Uberlândia
07 a 10 de novembro de 2017

O Adjunto de um Polinômio Homogêneo

Letícia Garcia Polac*[1] and Geraldo M. A. Botelho†[2]

[1,2]FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia

Palavras-chave: *Polinômios homogêneos contínuos. Adjunto. Polinômios do tipo finito.*

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar o adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach. Mostraremos algumas propriedades básicas e exemplos de adjuntos de determinados polinômios homogêneos, em especial, mostraremos que o adjunto de um polinômio homogêneo do tipo finito é um operador linear de posto finito.

Introdução

Sejam E e F espaços de Banach e $P: E \longrightarrow F$ um polinômio m-homogêneo contínuo. Em [1], Aron e Schottenloher definiram o adjunto de P como sendo o seguinte operador linear contínuo:

$$P': F' \longrightarrow \mathcal{P}(^mE)\ ,\ P'(\varphi)(x) = \varphi(P(x)),$$

onde $\mathcal{P}(^mE)$ é o espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos de E no corpo dos escalares. É claro que essa definição generaliza a noção de adjunto u' de um operador linear u. Neste trabalho veremos que o adjunto de um polinômio homogêneo compartilha de muitas propriedades do adjunto de um operador linear.

As seguintes notações serão utilizadas:
- E'= dual topológico do espaço vetorial normado E.
- $\mathcal{L}(E;F)$= espaço dos operadores lineares contínuos de E em F.
- $\mathcal{P}(^mE;F)$= espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos de E em F.
- $\mathcal{P}(^mE)$= espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos de E sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Resultados

Apesar do adjunto de um polinômio homogêneo compartilhar de muitas das propriedades do adjunto de um operador linear, conforme verificaremos a seguir; é importante notar que, enquanto o adjunto de um operador linear é também um operador linear, o adjunto de um polinômio homogêneo não é um polinômio homogêneo, e sim um operador linear:

Proposição 1. *Sejam E e F espaços de Banach, P e $Q \in \mathcal{P}(^mE;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:*

(a) *P' é um operador linear contínuo, isto é, $P' \in \mathcal{L}(F';\mathcal{P}(^mE))$.*

(b) *$(P+Q)' = P' + Q'$.*

(c) *$(\lambda P)' = \lambda P'$.*

(d) *$\|P'\| = \|P\|$.*

Demonstração: Veja [6], Proposição 2.1.3

Corolário 2. *Sejam E e F espaços de Banach. A aplicação dada por*

$$\Phi: \mathcal{P}(^mE;F) \longrightarrow \mathcal{L}(F';\mathcal{P}(^mE)),\ \ \Phi(P) = P',$$

é uma isometria linear.

*leticia.polac@ufu.br
†botelho@ufu.br

Denotaremos por J_F o mergulho canônico do espaço normado F em F'' e

$$Q_m: E \longrightarrow \mathcal{P}(^m E)' \ , \ Q_m(x)(P) = P(x),$$

o polinômio m-homogêneo contínuo de norma 1 .

Para $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$, por P'' denotamos o adjunto do operador linear P', isto é, $P'' = (P')'$. Note que $P'' \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^m E)'; F'')$.

Proposição 3. *Sejam E e F espaços Banach e $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$. Então P'' é uma extensão de P a $\mathcal{P}(^m E)'$ no sentido de que $J_F \circ P = P'' \circ Q_m$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(^m E)' \arrow[r, "P''"] & F'' \\
E \arrow[u, "Q_m"] \arrow[r, "P"] & F \arrow[u, "J_F"']
\end{tikzcd}$$

Em particular, $P''(Q_m(E)) = J_F(P(E))$.

Demonstração: Veja [6], Proposição 2.1.5

Exemplo 4. Sejam E e F espaços de Banach, $\varphi \in E'$ e $b \in F$. Considere o polinômio m-homogêneo contínuo $\varphi^m \otimes b$ dado por

$$\varphi^m \otimes b: E \longrightarrow F, \quad (\varphi^m \otimes b)(x) = (\varphi(x))^m b.$$

Veremos que $(\varphi^m \otimes b)' = J_F(b) \otimes \varphi^m$.

Definição 5. Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ entre espaços normados é denominado de tipo finito se é da forma

$$P = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j^m \otimes b_j,$$

onde $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \in E'$ e $b_j \in F$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$.

É fácil ver que o subconjunto de todos os polinômios m-homogêneos contínuos de tipo finito é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^m E; F)$, que será denotado por $\mathcal{P}_f(^m E; F)$. E também não é difícil verificar que se E tem dimensão finita, então todo polinômio homogêneo em E é de tipo finito, isto é,

$$\mathcal{P}(^m E; F) = \mathcal{P}_f(^m E; F)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo espaço normado F.

Exemplo 6. Seja $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ um polinômio contínuo de tipo finito. Então P é da forma

$$P = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j^m \otimes b_j,$$

com $\varphi_j \in E'$ e $b_j \in F$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$. Da Proposição 1 e do exemplo anterior segue que

$$P' = \sum_{j=1}^{k} J_F(b_j) \otimes \varphi^m.$$

Como $J_F(b_j) \in F''$ e $\varphi^m \in \mathcal{P}(^m E)$ para $j \in \{1, \ldots, k\}$, segue que P' é um operador linear de posto finito. Assim, o adjunto de todo polinômio homogêneo de tipo finito é um operador linear de posto finito.

Exemplo 7. Sejam E e F espaços de Banach, $Q \in \mathcal{P}(^m E)$ e $b \in F$. Determinemos o adjunto do polinômio m-homogêneo $Q \otimes b$, isto é,

$$Q \otimes b: E \longrightarrow F \ , Q \otimes b(x) = Q(x)b.$$

Então $(Q \otimes b)' = J_F(b) \otimes Q$.

Para o próximo exemplo precisaremos do seguinte resultado:

Lema 8. *Sejam E um espaço normado e $\varphi \in E'$. Então a aplicação dada por*

$$T_\varphi\colon E' \longrightarrow \mathcal{P}(^mE),\ T_\varphi(\psi)(x) = \varphi(x)^{m-1}\psi(x),$$

é linear e contínua, ou seja, $T_\varphi \in \mathcal{L}(E';\mathcal{P}(^mE))$.

Demonstração: Veja [6], Lema 2.2.4

Exemplo 9. Sejam E e F espaços de Banach, $\varphi \in E'$, $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $m \in \mathbb{N}$. Considere o polinômio m-homogêneo P

$$P\colon E \longrightarrow F,\ P(x) = \varphi(x)^{m-1}u(x).$$

Então $P' = T_\varphi \circ u'$, onde T_φ é o operador linear do Lema 8, ou seja, que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[rr, "P'"] \arrow[dr, "u'"'] & & \mathcal{P}(^mE) \\ & E' \arrow[ur, "T_\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Exemplo 10. Sejam E espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $m \in \mathbb{N}$. Considere o polinômio m-homogêneo

$$P\colon E \longrightarrow E,\ P(x) = \varphi(x)^{m-1}x.$$

Tomando $u = Id_E$ no exemplo anterior, temos $P' = T_\varphi \circ (Id_E)' = T_\varphi \circ Id_{E'}$.

O polinômio homogêneo deste exemplo é muito usado como o análogo polinomial do operador identidade (veja, por exemplo, [3]).

Referências

[1] T. R. ALVES, *Polinômios dominados entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2011.

[2] R. ARON E M. SCHOTTENLOHER, *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*, J. Funct. Anal. **21** (1976), 7–30.

[3] G. BOTELHO, *Weakly compact and absolutely summing polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **265** (2002), 458–462.

[4] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO E E. TEIXEIRA, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[5] G. M. R. PEREIRA, *O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2012.

[6] L. G. POLAC, *O adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2014.