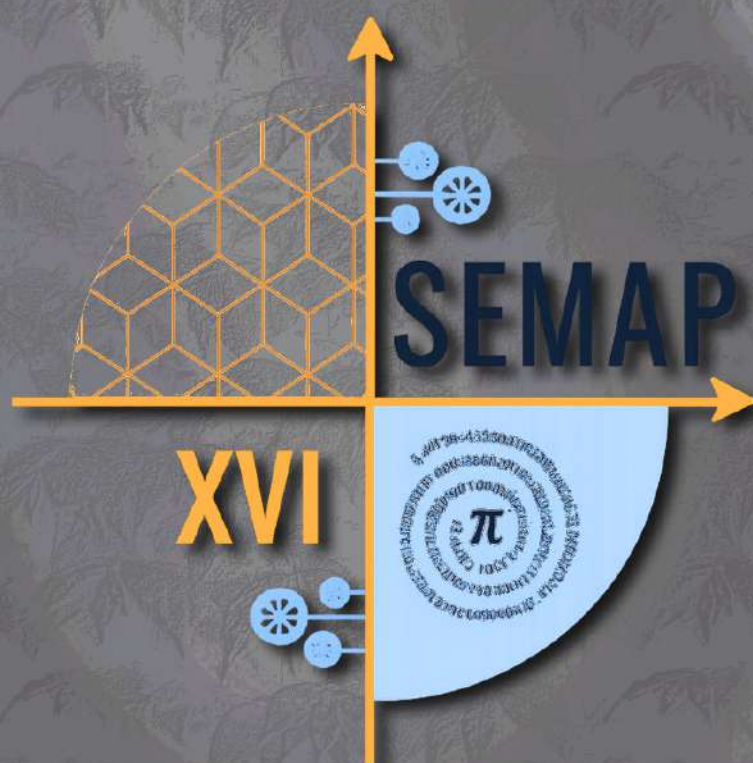


XVI SEMANA DE MATEMÁTICA DO PONTAL



Organização:
Tânia Maria Machado de Carvalho

XVI SEMANA DE MATEMÁTICA DO PONTAL

(ANAIS)

Ituiutaba - MG
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Semana de Matemática do Pontal

XVI Semana de Matemática do Pontal [livro eletrônico] / Semana de Matemática do Pontal ; organização Tânia Maria Machado de Carvalho. -- Ituiutaba, MG : Ed. da Autora, 2026.

PDF

Vários autores.

Bibliografia.

ISBN 978-65-02-18972-6

1. Matemática 2. Palestras e conferências

I. Carvalho, Tânia Maria Machado de. II. Título.

26-371810.0

CDD-510

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática 510

Suelen Silva Araújo Oliveira - Bibliotecária - CRB-8/11482

DOI:

10.6084/m9.figshare.33188049

ISBN: 978-65-02-18972-6

Página oficial do evento:

<https://eventos.ufu.br/icenp/2025/XVIsemap>

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS DO PONTAL

Campus Pontal - Bloco C - Sala 1º piso
Rua Vinte - 1600 - Bairro Tupã
Ituiutaba - MG - CEP 38304-402

Reitor

Carlos Henrique de Carvalho

Vice-reitor

Catarina Machado Azeredo

Diretora do ICENP - UFU

Rosana Maria Nascimento de Assunção

Coordenador dos Cursos de Matemática do ICENP - UFU

Marcelo Gonçalves de Oliveira Vieira



Esta obra está licenciada com uma Licença CC BY.



ORGANIZAÇÃO E EDITORAÇÃO

Tânia Maria Machado de Carvalho - ICENP/UFU

CAPA

Otávio Machado Pinheiro de Carvalho

COMISSÃO ORGANIZADORA DA XVI SEMAP

Docentes

Prof. Dr. Wallisom da Silva Rosa
(presidente) - ICENP/UFU
Prof. Dr. Alisson Rafael Aguiar Barbosa
(coordenador da Comissão Cultural/Social)
- ICENP/UFU
Prof. Dr. Allan Alves Fernandes -
ICENP/UFU
Prof. Dr. Edward Luis de Araújo
(tesoureiro) - ICENP/UFU
Prof^ª. Dr^a. Evaneide Alves Carneiro -
ICENP/UFU
Prof. Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva
(coordenador da Comissão de
Infraestrutura) - ICENP/UFU
Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira
- ICENP/UFU
Prof^ª. Dr^a. Milena Almeida Leite Brandão
(coordenadora da Comissão de Divulgação)
- ICENP/UFU
Prof^ª. Dr^a. Miliam Juliana Alves Ferreira -
ICENP/UFU
Prof. Dr. Moisés Rodrigues Cirilo do Monte
- ICENP/UFU
Prof^ª. Dr^a. Patrícia Borges dos Santos
(coordenadora da Comissão de Alimentação)
- ICENP/UFU

Discentes/Colaboradores

Anna Laura Alves Vilela - PET Matemática
Pontal
Ariel Silva de Abreu - PET Matemática
Pontal
Elder Nunes Florêncio da Silva - PET
Matemática Pontal
Felipe Jun Long Jiang - PET Matemática
Pontal
Giovanna Graziely Silva Santos - PIBID
Guilherme Martins Ferreira - PET
Matemática Pontal
José Antônio Alves Queiroz - PET
Matemática Pontal
Luiz Carlos Sobral de Santana - PET
Matemática Pontal
Maria Luíze Ribeiro de Freitas - PET
Matemática Pontal
Miguel Sabino Rodrigues da Cunha - PET
Matemática Pontal
Paulo Henrique Cavallini Elias Junior - PET
Matemática Pontal
Samara Aparecida Parreira Araujo Silva -
PET Matemática Pontal
Vitor Daniel Arantes Freitas - PIBID

COMISSÃO CIENTÍFICA

Prof. Dr. André Ferreira e Pereira - IFTM;
Prof. Dr. André Luiz França Batista - IFTM;
Prof^a. Dr^a. Cristiane Coppe de Oliveira - ICENP/UFU;
Prof^a. Dr^a. Gabriella de Freitas Alves - ICENP/UFU;
Prof. Dr. Homero Ghioti da Silva - ICENP/UFU;
Prof. Dr. João Carlos Moreira - ICENP/UFU;
Prof^a. Dr^a. Laís Cristina Viel Gereti - ICENP/UFU;
Prof^a. Dr^a. Miliam Juliana Alves Ferreira - ICENP/UFU.
Prof^a. Dr^a. Tânia Maria Machado de Carvalho (presidente) - ICENP/UFU;

PALESTRANTES

Prof. Dr. Allan Alves Fernandes;
Prof. Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva;
Prof. Dr. Lucio Abimael Medrano Castillo;
Prof^a. Dr^a. Maria Francisca da Cunha;

ATIVIDADES DA XVI SEMAP

MESA REDONDA

Tema: 15 anos do PET Matemática Pontal.

Debatedores:

Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira;
Prof^a. Dr^a. Tânia Maria Machado de Carvalho;
Prof^a. Dr^a. Evaneide Alves Carneiro;
Bruna Rezende;
Daniel Alves da Silva;
Felipe Jun Long Jiang.

Resumo: atividade comemorativa voltada ao registro da trajetória do PET Matemática Pontal, reunindo tutores, ex-tutores, estudantes e egressos em torno da memória dos quinze anos do grupo.

MINICURSOS

Educação Financeira.

Ministrante: Felipe Jun Long Jiang.

Resumo: introdução a noções de educação financeira, com discussão de conceitos básicos relacionados a planejamento, organização financeira, juros e tomada de decisões no cotidiano.

Minicurso de Linux: do básico ao terminal.

Ministrante: Guilherme Martins Ferreira.

Resumo: introdução ao uso do terminal Linux, abordando comandos essenciais, navegação em diretórios, manipulação de arquivos, pipes, redirecionamentos e permissões básicas.

PALESTRAS**Experiências Formativas na Formação do Professor de Matemática: Ensino, Pesquisa, Extensão e PIBID.**

Palestrante: Prof^ª. Dr^ª. Maria Francisca da Cunha.

Resumo: Esta palestra propõe uma reflexão sobre a formação do professor de Matemática a partir das experiências formativas vivenciadas no diálogo entre ensino, pesquisa, extensão e o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). Compreende-se que formar professores vai além da transmissão de conteúdos: trata-se de um processo contínuo de construção da identidade docente, sensível às realidades sociais e comprometido com a transformação da educação. O ensino, ao articular saberes matemáticos e pedagógicos, favorece o desenvolvimento de práticas reflexivas e críticas. A pesquisa desperta a postura investigativa, fortalecendo o olhar sobre os processos de ensinar e aprender. A extensão amplia o diálogo entre universidade e comunidade, tornando o conhecimento científico mais acessível e socialmente relevante. Nesse contexto, o PIBID se destaca como um espaço de vivências significativas, permitindo ao licenciando experimentar o cotidiano escolar, elaborar práticas inovadoras e refletir sobre o ser professor. Assim, pensar as experiências formativas é reconhecer a docência como um campo de criação, diálogo e compromisso com uma educação matemática crítica, sensível e emancipadora..

Entre o Regular e o Singular: descobrindo a beleza das singularidades.

Palestrante: Prof. Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva.

Resumo: Em nosso cotidiano, estamos cercados por formas suaves e previsíveis: curvas, superfícies e objetos que parecem seguir uma harmonia natural. Mas o que acontece quando essa harmonia se rompe? A Teoria das Singularidades é o ramo da Matemática que estuda esses momentos de transição, isto é, pontos onde o comportamento regular falha e surgem novas estruturas. Tais pontos são denominados singularidades, mas elas não são apenas exceções: elas revelam padrões profundos presentes na geometria, na física, visão computacional e até na arte. Nesta palestra, exploraremos exemplos visuais e intuitivos de como a Matemática descreve e classifica esses fenômenos singulares, mostrando que o irregular também pode ser fonte de beleza e compreensão.

A fórmula mágica do sucesso? Um toque de Matemática.

Palestrante: Prof. Dr. Lucio Abimael Medrano Castillo.

Resumo: Esta palestra é um convite direto aos estudantes de Matemática para que redefinam o escopo de suas carreiras, enxergando o empreendedorismo não como um caminho alternativo, mas como a aplicação mais poderosa e lucrativa de sua formação em Ciências Exatas. Longe de ser apenas uma disciplina de base, a Matemática confere um diferencial competitivo único no mundo dos negócios e das startups de alto impacto. O foco central é demonstrar como o pensamento rigoroso, lógico e analítico desenvolvido ao longo da graduação é a ferramenta essencial para navegar na complexidade do mercado atual. Empreender não é sobre sorte, mas sobre modelagem, otimização e previsão - áreas onde o matemático se destaca naturalmente.

Abordaremos a Matemática Aplicada ao Mercado em três pilares práticos:

1. Modelagem de Negócios e Riscos: Como conceitos de Álgebra Linear, Otimização e Probabilidade são diretamente traduzidos na criação de modelos de receita sustentáveis, na alocação eficiente de recursos e na mitigação calculada de riscos financeiros. A Matemática aqui é a linguagem para a tomada de decisão estratégica.
2. O Império dos Dados (Data Science): A base teórica em Estatística, Análise Numérica e Algoritmos posiciona o matemático como o líder ideal em startups que exploram Inteligência Artificial (IA), Machine Learning e Big Data. Será explorado como transformar grandes volumes de dados em insights de mercado valiosos e produtos escaláveis.
3. A Lógica do Crescimento Exponencial: Utilizando o conceito de escalabilidade, a palestra mostrará como startups de tecnologia (as "startups baseadas em Exatas") utilizam a matemática para projetar um crescimento não-linear, diferenciando-se de negócios tradicionais.

Serão apresentados estudos de caso de empreendedores com formação em Exatas que fundaram empresas de sucesso em áreas como Fintechs, Biotecnologia e Deep Tech. O objetivo é desmistificar a jornada e inspirar os alunos a transformar seus conhecimentos em capital e suas ideias em inovações disruptivas. A palestra é, fundamentalmente, uma prova de que a próxima grande equação a ser resolvida é o lançamento e o crescimento sustentável de seu próprio negócio.

Decisões inteligentes: como a Estatística guia nosso dia a dia.

Palestrante: Prof. Dr. Allan Alves Fernandes.

Resumo: Mesmo que de forma imperceptível, a Estatística está presente em praticamente todas as decisões que tomamos, desde coisas simples como definir se levar ou não um guarda-chuva ao sair de casa pela manhã, até decisões que impactam a sociedade, como a produção de uma vacina. Ela nos ajuda a compreender fenômenos complexos, interpretar informações e transformar dados em conhecimento útil. Discutiremos, de maneira leve e aberta, como a Estatística vai muito além dos gráficos e números, tornando-se ferramenta essencial tanto no dia a dia, quanto no meio científico, para tomada de decisões baseadas em evidências. Serão apresentados exemplos práticos em diversas áreas, evidenciando como o raciocínio estatístico nos permite enxergar padrões, lidar com as incertezas e compreender melhor o mundo ao nosso redor.

APRESENTAÇÕES DE TRABALHOS

As apresentações de trabalhos da XVI SEMAP foram organizadas em duas modalidades: pôsteres (banners) e apresentações orais.

PÔSTERES (BANNERS)

Explorando as potencialidades do ensino de cálculo de áreas totais e volumes em situações reais com impressora 3D à luz da teoria do TPACK.

Apresentador: Elder Nunes.

Autor: Elder Nunes.

Uma análise da aprendizagem de Física através de uma abordagem ludificada no Ensino Médio.

Apresentador: Luan Lira dos Santos.

Autores: Luan Lira dos Santos, Eduardo Gonçalves Menezes Silva e Marcelo Parreira de Oliveira.

Matemática na roça: os plantios tradicionais no Quilombo Várzea Grande/BA.

Apresentadora: Eulina Neta de Paula Santos.

Autores: Eulina Neta de Paula Santos, Cristiane Coppe de Oliveira e Marcelo Parreira de Oliveira.

O crochê na Matemática: uma abordagem criativa como forma de aprendizado.

Apresentadora: Eunice de Paula Santos.

Autores: Eunice de Paula Santos e Marcelo Parreira de Oliveira.

Jogo de búzios na Matemática.

Apresentadora: Denise Aparecida Santos Camargo.

Autores: Denise Aparecida Santos Camargo e Marcelo Parreira de Oliveira.

APRESENTAÇÕES ORAIS

Aspectos matemáticos básicos da criptografia quântica.

Apresentador: Guilherme Martins Ferreira.

Autores: Guilherme Martins Ferreira e Patrícia Borges dos Santos.

A contribuição de disciplinas de/para pesquisa em Educação Matemática para a formação de professores-pesquisadores.

Apresentadores: Carlos Eduardo Petronilho Boiago e Miliam Juliana Alves Ferreira.

Autores: Carlos Eduardo Petronilho Boiago e Miliam Juliana Alves Ferreira.

A prova dos nove ou nove fora.

Apresentador: Alisson Rafael Aguiar Barbosa.

Autores: Silvia Aparecida de Jesús e Alisson Rafael Aguiar Barbosa.

Um estudo sobre invariantes topológicos no contexto de cadeias de topologias.

Apresentador: Miguel Sabino Rodrigues da Cunha.

Autores: Miguel Sabino Rodrigues da Cunha e Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira.

Aplicações do Teorema da Função Inversa.

Apresentadora: Samara Aparecida Parreira Araujo Silva.

Autoras: Samara Aparecida Parreira Araujo Silva e Tânia Maria Machado de Carvalho.

Sobre a bifurcação transcrítica.

Apresentador: Luis Thiago Arcanjo Sales.

Autores: Luis Thiago Arcanjo Sales e Hernán Roberto Montúfar López.

Proporção áurea e ensino de Matemática: um estudo documental em livros do 9º ano do Ensino Fundamental.

Apresentadora: Samara Aparecida Parreira Araujo Silva.

Autoras: Samara Aparecida Parreira Araujo Silva e Miliam Juliana Alves Ferreira.

AGRADECIMENTOS

No âmbito da organização e editoração destes Anais, registra-se o reconhecimento a todas as pessoas, grupos e instituições que, por meio de seu trabalho, apoio e participação, contribuíram para a realização da **XVI Semana de Matemática do Pontal (XVI SEMAP)** e, consequentemente, para a presente publicação.

Ao **Prof. Dr. Wallisom da Silva Rosa**, presidente da Comissão Organizadora da XVI SEMAP, pela condução e articulação do evento, e aos demais **membros da Comissão Organizadora**, pelo planejamento, pela dedicação e pelo trabalho coletivo desenvolvido nas diferentes frentes de sua realização.

À **Universidade Federal de Uberlândia (UFU)** e à **Direção do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP)**, pelo apoio institucional, pela infraestrutura e pela disponibilização dos espaços e recursos. À **Secretaria Geral do ICENP** e aos **servidores técnico-administrativos** do Instituto e dos Cursos de Matemática, pelo suporte. Aos **trabalhadores terceirizados que atuam nos diferentes serviços e setores do Campus**, por sua contribuição para o funcionamento da instituição e para o desenvolvimento das atividades acadêmicas e administrativas. Às **instituições apoiadoras, aos patrocinadores e aos demais colaboradores**, pelas diferentes formas de contribuição, por meio de recursos, serviços e apoio.

Ao **PET Matemática Pontal**, pela participação de seus integrantes nas atividades da XVI SEMAP, e, em especial à sua tutora, **Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro**, pela cuidadosa contribuição na revisão destes Anais. Ao **Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)**, pela participação de seus integrantes nas atividades do evento. À **Comissão Científica**, pelo criterioso trabalho de acompanhamento e avaliação das submissões e pela contribuição para a qualidade acadêmica e científica da XVI SEMAP e destes Anais.

Aos **palestrantes, debatedores, ministrantes de minicursos e responsáveis pelas apresentações musicais e demais atividades formativas e culturais**, pela disponibilidade em compartilhar conhecimentos, experiências e expressões artísticas, enriquecendo a programação da XVI SEMAP e proporcionando momentos de formação, diálogo, sensibilidade e inspiração.

Aos **autores e apresentadores de trabalhos**, pela contribuição que constitui parte essencial destes Anais. A todos os **participantes** — estudantes, professores, pesquisadores, egressos, profissionais da educação, membros da comunidade externa e demais interessados —, pela presença e pelo envolvimento ao longo do evento.

Estes Anais constituem um importante registro da **XVI Semana de Matemática do Pontal** e somente se tornaram possíveis porque o próprio evento foi construído de forma coletiva. A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para sua realização e para a produção desta publicação, fica registrado nosso reconhecimento e nossa gratidão.

Organização e Editoração dos Anais da XVI SEMAP

Prefácio

PET Matemática Pontal e SEMAP: quinze anos de formação, memória e compromisso com a universidade pública

Tânia Maria Machado de Carvalho
Universidade Federal de Uberlândia

A Semana de Matemática do Pontal (SEMAP) é um evento científico anual realizado pelos cursos de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal da Universidade Federal de Uberlândia (ICENP/UFU). O objetivo central do evento é congregiar docentes e discentes de universidades, docentes e discentes da rede de ensino da região do Triângulo Mineiro e a comunidade em geral em torno do tripé ensino, pesquisa e extensão, por meio de atividades voltadas à matemática e áreas afins. O evento estimula o entrosamento entre o público externo e a Universidade Federal de Uberlândia, fomentando a divulgação do conhecimento científico e o intercâmbio de ideias e saberes. As atividades da Semap incluem palestras, mesas-redondas, apresentações de trabalhos e atividades culturais.

Consolidada no Campus Pontal, em Ituiutaba, a SEMAP teve sua primeira edição realizada em 2010, mesmo ano em que foi aprovado, pelo Ministério da Educação, o projeto de criação do PET Matemática Pontal. Desde então, a trajetória do grupo tem se entrelaçado à história do evento, com participação efetiva na organização de todas as edições. Em reconhecimento a essa contribuição e à importância do PET Matemática Pontal para a comunidade acadêmica, a XVI edição da SEMAP incluiu uma homenagem aos seus 15 anos de existência.

Para compreender o significado dessa homenagem e a relevância da trajetória construída pelo grupo, é necessário situar o PET no contexto mais amplo da SEMAP e da formação universitária no Brasil, uma vez que a formação universitária não se esgota no cumprimento das disciplinas obrigatórias de um currículo.

Embora a sala de aula seja espaço fundamental da vida acadêmica, a universidade também se realiza nos ambientes de estudo coletivo, nas ações de extensão, nas experiências de pesquisa, nos eventos científicos, nas discussões formativas e nas iniciativas que aproximam o estudante da vida intelectual, social e cultural de sua área. É nesse horizonte que se insere o Programa de Educação Tutorial (PET), uma das políticas mais significativas e duradouras de formação complementar no ensino superior brasileiro.

Criado em 1979, inicialmente com o nome de Programa Especial de Treinamento, o PET nasceu no âmbito da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), em um período de preocupação com a qualificação da graduação e com a formação de estudantes capazes de atuar de modo mais autônomo, crítico e participativo na universidade. Desde sua origem, o programa assumiu uma característica singular: organizar grupos de estudantes de graduação sob a orientação de um professor tutor, promovendo uma formação que ultrapassasse os limites da grade curricular regular.

Ao longo de sua história, o PET consolidou-se não apenas como programa de bolsas, mas como uma proposta de formação tutorial. A bolsa é, sem dúvida, importante, pois contribui para a permanência e para a dedicação dos estudantes às atividades acadêmicas. No entanto, a essência do PET está no trabalho coletivo, na autonomia discente, na orientação continuada, no planejamento de ações e na articulação entre ensino, pesquisa e extensão. O grupo PET constitui-se, assim, como um espaço permanente de estudo, criação, reflexão e intervenção acadêmica.

A trajetória nacional do PET também foi marcada por movimentos políticos e institucionais. Em 1999, sua gestão foi transferida da CAPES para a Secretaria de Educação Superior do Ministério da Educação (SESu/MEC). Nos anos seguintes, diante de incertezas sobre sua continuidade e sua função na política de graduação, a comunidade petiana teve papel decisivo na defesa do programa. Estudantes, tutores e egressos organizaram-se em encontros, debates e instâncias representativas, reafirmando que o PET não era apenas uma ação administrativa, mas uma experiência formativa consolidada na vida universitária brasileira.

Em 2004, a mudança de nome para Programa de Educação Tutorial expressou uma alteração importante de concepção. A ideia de “treinamento” deu lugar à noção de “educação tutorial”, mais adequada à proposta de formação ampla, crítica e integrada. Em 2005, a Lei nº 11.180 instituiu o PET no âmbito do Ministério da Educação, conferindo maior estabilidade normativa ao programa. Desde então, o PET passou a ser compreendido como uma ação voltada à melhoria da qualidade da graduação, apoiando grupos tutoriais que desenvolvem atividades acadêmicas orientadas pelo princípio da indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão.

Esse princípio, no PET, não é apenas uma formulação abstrata. Ele se concretiza no cotidiano dos grupos: seminários, minicursos, projetos de pesquisa, atividades de extensão, intervenções em escolas, organização de eventos, produção científica, estudos dirigidos, ações de acolhimento e apoio à graduação. Ao participar de um grupo PET, o estudante aprende a estudar coletivamente, a planejar atividades, a escrever, a falar em público, a pesquisar, a dialogar com a comunidade e a compreender sua formação como parte de um projeto acadêmico e social mais amplo.

É nesse contexto que se insere a história do PET Matemática Pontal. O grupo nasceu oficialmente em 8 de dezembro de 2010, no então Curso de Matemática da Faculdade de Ciências Integradas do Pontal da Universidade Federal de Uberlândia, em Ituiutaba. Seu projeto de criação teve origem em uma articulação iniciada pelo professor Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira, coordenador do Curso à época, que, diante da abertura do Edital MEC/SESu nº 09/2010 e do desejo de trazer o PET para a Matemática do Pontal, mobilizou docentes do curso para discutir a elaboração de uma proposta. Esse esforço coletivo envolveu o próprio professor Marcelo, a professora Tânia Maria Machado de Carvalho, a professora Mirian Maria Andrade Gonzalez, o professor Germano Abud de Rezende, o professor Daniel Cariello e o professor Edward Luís de Araújo. Por afinidade com as exigências do edital e com a proposta formativa do programa, a professora Tânia assumiu a autoria formal do projeto e colocou-se à disposição para exercer a tutoria inicial do grupo. A proposta foi aprovada e, a partir de então, a professora Tânia conduziu o PET Matemática Pontal em seus primeiros seis anos de existência.

Como ocorre frequentemente nas histórias institucionais mais significativas, o início não foi marcado pela abundância de recursos, mas pela disposição coletiva. Havia um

projeto aprovado, oito estudantes e uma tutora, mas não havia sala, mesas, cadeiras ou computador. Havia, sobretudo, vontade, compromisso e a compreensão de que aquele grupo poderia se tornar um espaço importante para a formação dos estudantes de Matemática do Pontal. As primeiras lutas foram, portanto, concretas: conquistar um espaço físico, organizar uma estrutura mínima e iniciar as atividades previstas no planejamento do grupo.

Naquele momento, o curso ainda estava instalado no bloco A2 da UEMG, e o PET Matemática Pontal passou a dividir uma sala com o também recém-criado PET Mais Saúde. A estrutura era simples: uma sala compartilhada, uma mesa redonda, algumas cadeiras e um computador antigo, daqueles grandes, mas que funcionava. Foi nesse espaço inicial que começaram a ser pensadas, elaboradas e executadas as primeiras atividades do grupo: minicursos, eventos, ações de extensão, atividades de ensino, pesquisas, participações no INTERPET da UFU e reuniões semanais.

Ainda em 2011, uma dessas reuniões tornou-se simbólica para a identidade do grupo. Em 9 de maio daquele ano, os petianos reuniram-se, sob a presidência da tutora Tânia Maria Machado de Carvalho, para escolher a logomarca do PET Matemática Pontal. A logomarca selecionada trazia um triângulo, representando o tripé ensino, pesquisa e extensão enquanto fazia referência ao Triângulo Mineiro, região onde se localiza a cidade de Ituiutaba. Esse gesto, aparentemente simples, expressava a compreensão que acompanharia o grupo desde sua origem: o PET Matemática Pontal não deveria ser apenas um espaço de estudo, mas um espaço de integração entre as diferentes dimensões da vida universitária.

Com a mudança para a sede própria do Campus Pontal, surgiu uma nova etapa de luta pela consolidação do grupo. Após argumentações e reuniões com a direção e a prefeitura de campus, uma das salas do Bloco B foi dividida por meio de uma parede de gesso (dry wall) para acolher, separadamente, os grupos PET Matemática Pontal e PET Mais Saúde. O grupo conquistava, enfim, sua sala própria: um espaço pequeno, de aproximadamente 17 metros quadrados, mas carregado de significado. A porta recebeu, com orgulho, a logomarca escolhida pelos próprios petianos. Aos poucos, com apoio da coordenação do curso, projetos aprovados e recursos de custeio, a sala foi ganhando mesas, cadeiras, computadores, notebooks, impressora, lousa branca, armários, bancada e os equipamentos necessários para se tornar um ambiente de estudo, orientação e convivência.

Essa dimensão material não é secundária. Na universidade, os espaços também educam. Uma sala PET é mais do que um local físico: é lugar de encontro, de reunião, de estudo, de aconselhamento, de elaboração de projetos, de acolhimento de estudantes e de construção de pertencimento. No caso do PET Matemática Pontal, a conquista da sala representou também a conquista de um território acadêmico próprio, no qual os petianos podiam se reconhecer como grupo e desenvolver uma cultura de trabalho coletivo.

Ao longo dos primeiros anos, o PET Matemática Pontal consolidou sua atuação no Curso de Matemática, na Unidade Acadêmica e na própria instituição. As atividades planejadas anualmente foram sendo desenvolvidas com regularidade, e o grupo passou a responder aos chamados do curso e da direção, assumindo responsabilidades em eventos, ações de extensão e atividades de apoio à graduação. A participação em congressos, reuniões INTERPET, SEMAPs e demais eventos acadêmicos contribuiu para ampliar a formação dos estudantes e projetar o grupo para além dos limites do campus.

Um ponto importante dessa trajetória foi a luta pelo reconhecimento das iniciações científicas realizadas no âmbito do PET. Sob a tutoria da professora Tânia Carvalho, foi defendida a equiparação dessas iniciações científicas às desenvolvidas em programas como PIBIC e PIVIC. Essa conquista exigiu convencimento, participação em reuniões, solicitações ao Comitê Local de Acompanhamento e Avaliação e atuação política dentro das instâncias institucionais. Trata-se de um exemplo concreto de como a história do PET é também feita de movimentos de reconhecimento acadêmico, muitas vezes silenciosos, mas essenciais para garantir a valorização da produção dos estudantes.

Depois de seis anos de implantação, estruturação e consolidação inicial, a tutoria passou, em novembro de 2016, ao professor Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira. Sua chegada marcou um novo momento do grupo, mantendo o compromisso com os ideais petianos e trazendo novos horizontes, novas formas de atuação e uma renovação necessária à vitalidade de qualquer grupo PET. A mudança de tutoria, nesse sentido, não significou ruptura, mas continuidade com renovação. Um grupo PET se fortalece justamente quando consegue preservar sua memória e, ao mesmo tempo, abrir espaço para novas visões, novas práticas e novos modos de organização.

Após seis anos de tutoria do professor Marcelo, o grupo passou a ser conduzido pela professora Evaneide Alves Carneiro, atual tutora do PET Matemática Pontal. Essa sucessão de tutorias revela a maturidade do grupo e sua capacidade de permanecer ativo ao longo do tempo. A história iniciada em 2010, com incertezas, falta de estrutura e muita disposição, alcança, em 2025, a marca simbólica de 15 anos. Essa permanência não se explica apenas pela existência formal do programa, mas pela dedicação de seus tutores, pela atuação dos petianos e pelo reconhecimento do PET como espaço formativo dentro do Curso de Matemática do Pontal.

A relação do PET Matemática Pontal com a SEMAP expressa, de modo particular, a continuidade entre formação, memória e vida acadêmica. A Semana de Matemática do Pontal, iniciada também em 2010, consolidou-se como evento científico anual dos cursos de Matemática do ICENP/UFU, reunindo estudantes, professores, pesquisadores, egressos, docentes da educação básica e a comunidade externa em torno de atividades de ensino, pesquisa, extensão e divulgação científica.

Na XVI SEMAP, realizada em 2025, esse vínculo ganhou um significado especial. A programação do evento acolheu a mesa-redonda “15 anos do PET Matemática Pontal”, concebida como espaço de memória, celebração e reflexão sobre a trajetória do grupo. A atividade reuniu tutores, ex-tutores, estudantes e egressos, permitindo que diferentes gerações compartilhassem experiências, lembranças e leituras sobre o papel do PET na formação acadêmica e humana dos estudantes do Curso de Matemática.

Mais do que uma homenagem, a mesa-redonda representou um gesto de reconhecimento institucional. Ao trazer para o centro da programação os quinze anos do PET Matemática Pontal, a XVI SEMAP reafirmou a importância do grupo na história recente da Matemática no Pontal. A presença da professora Tânia Carvalho, primeira tutora; do professor Marcelo Vieira, segundo tutor do grupo; da professora Evaneide Carneiro, atual tutora; e de petianos e egressos, como Bruna Rezende, Daniel Alves da Silva e Felipe Jun Long Jiang, conferiu à atividade uma dimensão ao mesmo tempo afetiva, acadêmica e histórica.

Esse encontro permitiu revisitar o percurso iniciado em 2010 não como simples

sucessão de fatos, mas como memória viva de uma experiência formativa construída coletivamente. Ao reunir vozes de diferentes momentos dessa trajetória, a mesa-redonda evidenciou que a história do PET Matemática Pontal não pertence apenas a uma gestão, a uma geração de estudantes ou a uma tutoria específica. Trata-se de uma história compartilhada, atravessada por permanências, mudanças, desafios e renovações. A celebração dos quinze anos do PET Matemática Pontal inscreve-se, assim, na própria história da SEMAP, reforçando o entrelaçamento entre o evento, o Curso de Matemática, o ICENP/UFU e as ações formativas que dão vida à universidade.

Nesse sentido, os anais da XVI SEMAP assumem também o papel de registro simbólico dessa comemoração. Ao reunir os trabalhos apresentados no evento, esta publicação preserva a produção acadêmica de seus participantes e, ao mesmo tempo, fixa na memória institucional um momento singular da história da Matemática no Pontal: a celebração dos quinze anos do PET Matemática Pontal. Assim, estes anais não apenas documentam mais uma edição da Semana de Matemática do Pontal, mas também testemunham a força de uma trajetória construída coletivamente, marcada pelo compromisso com a formação, com a universidade pública e com a permanência de experiências acadêmicas que atravessam gerações.

Sumário

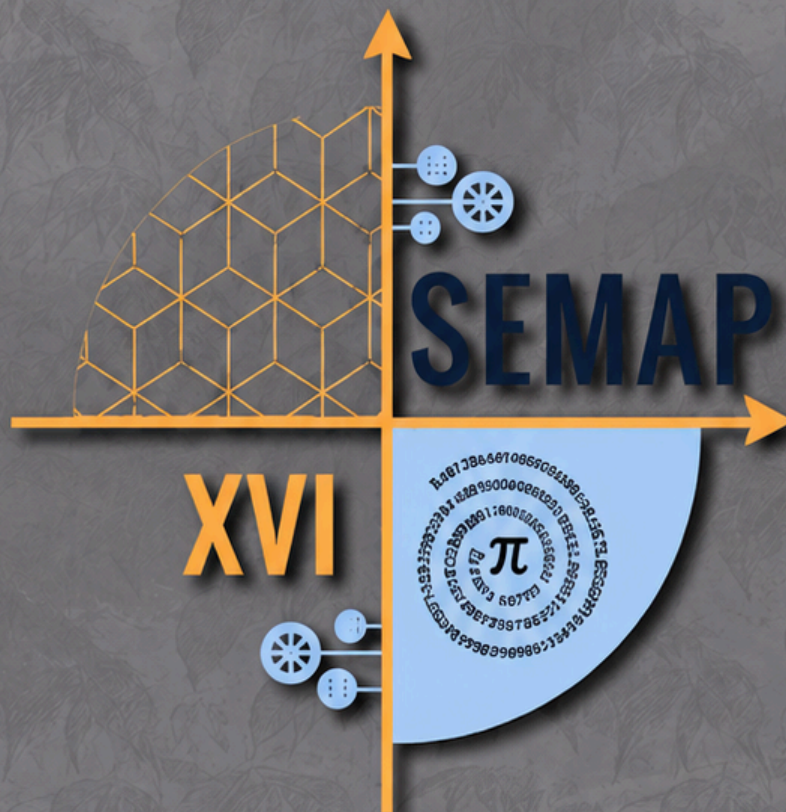
Resumos 17

1. Matemática na roça: os plantios tradicionais no Quilombo Várzea Grande/BA
Eulina Neta de Paula Santos; Cristiane Coppe de Oliveira; Marcelo Parreira de Oliveira 18
2. O crochê na Matemática: uma abordagem criativa como forma de aprendizado
Eunice de Paula Santos; Marcelo Parreira de Oliveira 21
3. Jogo de búzios na Matemática
Denise Aparecida Santos Camargo; Marcelo Parreira de Oliveira 25
4. Explorando as potencialidades do ensino de cálculo de áreas totais e volumes em situações reais com impressora 3D à luz da teoria do TPACK
Elder Nunes 30
5. Uma análise da aprendizagem de Física através de uma abordagem ludificada no Ensino Médio
Luan Lira dos Santos; Eduardo Gonçalves Menezes Silva; Marcelo Parreira de Oliveira 33

Trabalhos completos 35

1. A contribuição de disciplinas de/para pesquisa em Educação Matemática para a formação de professores-pesquisadores
Carlos Eduardo Petronilho Boiago; Miliam Juliana Alves Ferreira 36
2. Proporção áurea e ensino de Matemática: um estudo documental em livros do 9º ano do Ensino Fundamental
Samara Aparecida Parreira Araujo Silva; Miliam Juliana Alves Ferreira 47
3. A prova dos nove ou nove fora
Silvia Maria de Jesús; Alisson Rafael Aguiar Barbosa 55
4. Aspectos matemáticos básicos da criptografia quântica
Guilherme Martins Ferreira; Patrícia Borges dos Santos 65
5. Sobre a bifurcação transcítica
Luis Thiago Arcanjo Sales; Hernán Roberto Montúfar López 73
6. Aplicações do Teorema da Função Inversa
Samara Aparecida Parreira Araujo Silva; Tânia Maria Machado de Carvalho 83
7. Um estudo sobre invariantes topológicos no contexto de cadeias de topologias
Miguel Sabino Rodrigues da Cunha; Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira 96

RESUMOS XVI SEMAP





Matemática na roça: os plantios tradicionais no quilombo Várzea Grande/BA

Eulina Neta de Paula Santos

Universidade Federal de Uberlândia

eulina.santos@ufu.br

Cristiane Coppe de Oliveira

Universidade Federal de Uberlândia

criscopp@ufu.br

Marcelo Parreira de Oliveira

Escola Estadual Governador Israel Pinheiro

marceloparreiradeoliveira@gmail.com

1 Introdução

Este artigo tem como objetivo discutir a relação entre saberes matemáticos e práticas culturais quilombolas, a partir do processo de produção da farinha de mandioca no quilombo Várzea Grande/BA. O estudo emergiu nas disciplinas PROINTER III e IV do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia – Campus Pontal, articulando educação étnico-racial, Etnomatemática e ensino de grandezas e medidas. A pesquisa fundamenta-se na perspectiva da Etnomatemática proposta por D'Ambrosio (2001), especialmente no que se refere aos “desafios do cotidiano” enquanto espaço de produção e aplicação de conhecimentos matemáticos. A experiência resultou na produção de um vídeo intitulado “Ciência Matemática aplicada no dia a dia – Dóia, a bisavó universitária”, que retrata as etapas da fabricação da farinha de mandioca, posteriormente, apresentado a estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, em uma escola da educação básica, em Ituiutaba/MG. Os resultados apontam que a prática de transformar medidas tradicionais da comunidade (como o “prato”) em unidades do Sistema Internacional de Medidas, fortalece tanto o ensino de Matemática quanto a valorização da cultura quilombola, em consonância com a Lei 10.639/03.

2 Desenvolvimento

A Matemática, muitas vezes vista apenas em sua dimensão formal, também se expressa nos saberes cotidianos de diferentes culturas. No contexto quilombola, práticas tradicionais carregam formas de raciocínio lógico, mensuração e organização que dialogam diretamente com o campo da Matemática escolar.

Este trabalho apresenta a experiência vivenciada no quilombo Várzea Grande/BA, a partir da produção da farinha de mandioca, como campo de aprendizagem matemática. A proposta

insere-se no debate sobre a educação das relações étnico-raciais e no cumprimento da Lei nº 10.639/03, que estabelece a obrigatoriedade da temática “História e Cultura Afro- Brasileira” na educação básica (Brasil, 2003).

O estudo apoia-se na perspectiva da Etnomatemática, proposta por D’Ambrosio (2001), que compreende os conhecimentos matemáticos como construções culturais ligadas à sobrevivência e à organização social dos povos.

Segundo o autor, as práticas do dia a dia expressam instrumentos materiais e intelectuais utilizados pelas comunidades para lidar com os “desafios do cotidiano”. Assim, o trabalho com medidas, proporções e transformações no processo de fabricação da farinha de mandioca revela-se como um campo fértil para a aprendizagem matemática.

Além disso, este estudo dialoga com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que orienta o ensino de Matemática a partir de unidades temáticas. No 8º ano do ensino fundamental, por exemplo, a unidade “Grandezas e Medidas” abarca “medidas de capacidade” (Brasil, 2018), aspecto que se relaciona diretamente às práticas do quilombo.

A pesquisa tem caráter qualitativo e foi desenvolvida no âmbito das disciplinas PROINTER III e IV do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia – Campus Pontal.

As etapas foram organizadas da seguinte forma: (1) Levantamento cultural: registro da prática de produção da farinha no quilombo Várzea Grande/BA, considerando unidades de medida locais, como o “prato”; (2) Produção do vídeo educativo: “Ciência Matemática aplicada no dia a dia – Dóia, a bisavó universitária”, protagonizado por uma das autoras e sua família, documentando o processo de fabricação da farinha e (3) Intervenção pedagógica: apresentação do vídeo a estudantes do 8º ano do ensino fundamental, em uma escola pública da educação básica de Ituiutaba/MG, promovendo reflexões sobre medidas de capacidade e conversões para o Sistema Internacional de Medidas.

3 Análise/Conclusão

Os registros evidenciam que o quilombo utiliza como unidade principal o “prato de farinha”, equivalente a aproximadamente 3 kg ou 3 litros. Vinte pratos correspondem a uma saca de farinha, de 60 kg ou 60 litros. Esse sistema tradicional de medição, embora distinto do formal, possibilita: (1) Aprendizagem significativa, ao conectar a Matemática escolar ao cotidiano; (2) Conversão de medidas, permitindo ao estudante compreender a correspondência entre unidades locais e o Sistema Internacional, (3) Valorização da cultura quilombola, fortalecendo a identidade e a autoestima dos estudantes e (4) A proposta mostrou que tem potencial para ser eficaz na implementação da Lei nº 10.639/03, contribuindo para a formação inicial de professores de Matemática, sensíveis às questões étnico-raciais e culturais. A seguir apresentamos uma tabela de Conversão de medidas utilizadas no quilombo Várzea Grande/BA:

Tabela 1: Conversão de medidas utilizadas no quilombo Várzea Grande/BA.

Unidade tradicional	Equiv. (kg)	Equiv. (L)	Equiv. (sacas 60 kg/60 L)
1 prato	3 kg	3 L	1/20 saca
10 pratos	30 kg	30 L	1/2 saca
20 pratos	60 kg	60 L	1 saca
1 prato	3 kg	3 L	1/20 saca

Fonte: elaborada pelos autores.

A produção da farinha de mandioca no quilombo Várzea Grande/BA representa mais do que uma prática alimentar: é um espaço de transmissão de saberes culturais e matemáticos.

A experiência relatada demonstra que a Matemática pode ser ensinada e aprendida de forma contextualizada, valorizando a cultura afro-brasileira e, promovendo algumas práticas pedagógicas alinhadas à BNCC e à legislação educacional.

Sugere-se que experiências semelhantes sejam replicadas em outras comunidades, fortalecendo a interdisciplinaridade e o diálogo entre escola e cultura popular.

Referências

BRASIL. Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003. Altera a LDB para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática “História e Cultura Afro-Brasileira”. Diário Oficial da União, Brasília, 2003.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

D’AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.



O Crochê na Matemática: uma abordagem criativa como forma de aprendizado

Eunice Paula Santos

Universidade Federal de Uberlândia

eunice.santos@ufu.br

Marcelo Parreira de Oliveira

Escola Estadual Governador Israel Pinheiro

marceloparreiradeoliveira@gmail.com

Resumo

Este trabalho tem como objetivo. A pesquisa parte de uma abordagem qualitativa, fundamentada na Etnomatemática (D'Ambrosio, 1990), considerando o crochê como prática cultural e artesanal que revela modos próprios de pensar e de aprender matemática. A partir de oficinas realizadas com a confecção de peças, observou-se que o crochê favorece a aprendizagem significativa ao conectar a cultura dos estudantes ao conteúdo escolar, estimulando a criatividade, a concentração e o raciocínio lógico.

Palavras-chave: BNCC; Crochê; Cultura afro-brasileira; Etnomatemática; Geometria.

1 Introdução

A escolha do tema está relacionada à experiência pessoal e familiar de um dos autores, cuja família possui tradição artesanal no crochê. Desde a infância, essa prática esteve presente como atividade criativa e desafiadora, que estimulava o raciocínio lógico por meio da contagem de pontos e da por que interpretação de gráficos. Além do aspecto cultural, o crochê revelou-se um espaço de aprendizagem matemática, o que motivou sua análise como recurso pedagógico.

O ensino de Matemática é frequentemente visto como abstrato e difícil. Assim, torna-se necessário buscar metodologias que aproximem os conteúdos escolares da realidade dos alunos. Nesse sentido, o crochê pode ser explorado como recurso didático que promove aprendizagem significativa (Smole, Diniz e Cândido). D'Ambrosio (1996) destaca que a Etnomatemática valoriza saberes produzidos em diferentes contextos culturais, mostrando que a Matemática está presente em todas as culturas. Moran (2015) acrescenta que metodologias criativas colocam o aluno como protagonista, estimulando a autonomia e a interação com o conhecimento.

A pesquisa adota abordagem qualitativa (Bogdan e Biklen, 1994), que busca compreender fenômenos em seus contextos reais. O estudo foi desenvolvido por meio de oficinas de crochê, nas quais os participantes confeccionaram um hexágono regular. Foram observados e

discutidos alguns conceitos matemáticos tais como: simetria, proporção e geometria. O processo permitiu identificar tanto saberes tradicionais dos artesãos quanto conteúdos formais da Matemática acadêmica.

A proposta de utilização do crochê como recurso pedagógico para o ensino de Matemática foi desenvolvida com estudantes do 3º ano do Ensino Médio, em uma escola de educação básica. A atividade teve como objetivo aproximar os conteúdos matemáticos do cotidiano dos alunos, utilizando uma prática culturalmente significativa e manual como ponto de partida para a construção de saberes matemáticos, em consonância com os pressupostos da Etnomatemática (D'Ambrosio, 2001).

A atividade ocorreu em duas aulas consecutivas de 45 minutos cada, totalizando 90 minutos de trabalho por turma. Cada turma era composta por aproximadamente 35 estudantes, organizados em grupos colaborativos, de forma a favorecer a troca de experiências, o diálogo e a cooperação entre os participantes.

Na primeira aula, realizou-se uma explanação teórica acerca da relação entre o crochê e conceitos matemáticos, abordando temas como geometria plana, simetria, proporção, medidas e regularidades. Nesse momento, a professora apresentou exemplos visuais de peças de crochê, destacando como os pontos e as formas criadas manualmente se relacionam com figuras geométricas, ângulos e repetições de padrões.

Na segunda aula, os alunos participaram da etapa prática, em que foram distribuídos os materiais necessários (linhas, agulhas e amostras de crochê). A docente demonstrou as técnicas básicas e orientou os grupos sobre o uso dos instrumentos. Durante a confecção das peças, os estudantes puderam aplicar e reconhecer conceitos matemáticos de maneira concreta, observando como as estruturas geométricas emergem da prática artesanal.

A relação entre o crochê e os conceitos matemáticos foi explorada tanto durante a execução da atividade, mediante questionamentos e observações orientadas pela professora, quanto posteriormente, em uma discussão coletiva. Nesse momento, os alunos refletiram sobre as formas geométricas identificadas nas produções, os cálculos de medidas envolvidos e as proporções observadas nas repetições dos pontos e padrões.

Essa metodologia mostrou-se eficaz na articulação entre o saber escolar e o saber cultural, promovendo o interesse dos estudantes e favorecendo a compreensão dos conteúdos matemáticos de modo significativo.

2 Análise/Conclusão

Os resultados apontam que o crochê contribui para tornar o ensino da Matemática mais atrativo, significativo e conectado à realidade dos estudantes. Foram identificados aprendizados relacionados a contagem, proporção, medidas, simetria e geometria. Além disso, a prática artesanal promoveu motivação, concentração e criatividade nos alunos, favorecendo uma aprendizagem mais envolvente e interdisciplinar.

Figura 1: Material utilizado com os alunos.



Fonte: os autores.

Figura 2: Alunos colocando em prática o que aprenderam.



Fonte: os autores.

Conclui-se que o crochê pode ser considerado uma estratégia pedagógica inovadora, capaz de unir tradição cultural e ensino formal da Matemática. Essa prática valoriza a cultura artesanal, estimula o raciocínio lógico e a criatividade e aproxima o aluno do conhecimento matemático de forma prática, lúdica e significativa. Dessa forma, o crochê se mostra como recurso potencial para uma Educação Matemática mais inclusiva, interdisciplinar e transformadora.

Referências

- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer. São Paulo: Ática, 1990.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação matemática: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

MORAN, José. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, Lillian; MORAN, José (orgs.). Metodologias ativas para uma educação inovadora. Porto Alegre: Penso, 2015.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; CÂNDIDO, Patrícia. Matemática nas séries iniciais: o conhecimento em construção. Porto Alegre: Artmed, 2000.



Jogos de Búzios no Ensino da Matemática

Denise Aparecida Santos Camargo

Universidade Federal de Uberlândia

ddaparecida83@gmail.com

Marcelo Parreira de Oliveira

Escola Estadual Governador Israel Pinheiro

marceloparreiradeoliveira@gmail.com

1 Introdução

Fundamentado no referencial da Etnomatemática de D'Ambrosio (2001) e Gerdes (2012), o estudo reconhece a Matemática como uma produção cultural diversa, capaz de ser ensinada de forma significativa quando conectada à realidade dos estudantes. O jogo de búzios, em seu sistema Merindilogum, permite a relação direta com conceitos formais como espaço amostral, arranjos e probabilidade, articulando práticas culturais afro-brasileiras com conteúdos da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017).

A metodologia da pesquisa é de natureza qualitativa e exploratória. O procedimento envolveu três etapas principais: (1) Revisão Bibliográfica sobre Etnomatemática e o jogo de búzios, incluindo análise de pesquisas recentes sobre o tema; (2) Modelagem Matemática, focada em descrever e explicitar matematicamente as 256 combinações do sistema Merindilogum para fins de transposição didática; e (3) Elaboração e Aplicação Piloto de atividades didáticas em turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental, com coleta e análise qualitativa dos dados obtidos, visando avaliar a compreensão dos alunos sobre noções básicas de probabilidade. A expectativa é que o estudo demonstre o potencial do jogo para um aprendizado lúdico e a ampliação do repertório metodológico dos professores, em consonância com a legislação vigente.

Os procedimentos matemáticos que permeiam este trabalho envolvem conceitos de análise combinatória (arranjos com repetição), cálculo de probabilidades em espaços amostrais finitos e modelagem de sistemas binários. Especificamente, utiliza-se o princípio multiplicativo para determinar o número total de combinações possíveis no lançamento de 8 búzios, cada um podendo cair em duas posições (aberto ou fechado), resultando em $2^8 = 256$ configurações distintas. A partir dessa modelagem, são explorados conceitos como evento, espaço amostral, probabilidade de eventos equiprováveis e não equiprováveis, estabelecendo conexões entre o jogo tradicional e os conteúdos matemáticos formais previstos na BNCC para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

1. Desenvolvimento

2 Desenvolvimento

Em sua estrutura, o sistema Merindilogum, associado aos Odus, configura um sistema binário. Para fins de transposição didática, considera-se o lançamento de um conjunto de 8 búzios, onde cada elemento pode cair em apenas duas posições: aberto (voltado para cima, mostrando a abertura) ou fechado (voltado para baixo, mostrando a parte convexa). O número total de resultados possíveis é dado pela fórmula de arranjos com repetição $AR(n, k) = n^k$, onde $n = 2$ (número de posições possíveis para cada búzio) e $k = 8$ (número de búzios lançados). Assim, o espaço amostral totaliza $2^8 = 256$ combinações possíveis.

Para ilustrar de forma didática, podemos representar cada configuração como uma sequência binária de 8 dígitos, onde 0 representa "fechado" e 1 representa "aberto". Por exemplo, a configuração (0,0,0,0,0,0,0,0) representa todos os búzios fechados, (1,1,1,1,1,1,1,1) representa todos abertos, e (1,0,1,0,1,0,1,0) representa búzios alternados.

Essa modelagem permite relacionar o jogo diretamente a conceitos de espaço amostral, análise combinatória e cálculo de probabilidades, além de estabelecer conexões com sistemas de numeração binária. Tal potencial permite ressignificar uma prática cultural para o ensino de conteúdos matemáticos previstos na BNCC (Brasil, 2017), especialmente no eixo de probabilidade e estatística.

A transposição de uma prática de matriz religiosa como o jogo de búzios para o ambiente escolar exige um aprofundamento na discussão ética sobre a secularização de práticas sagradas. É fundamental reconhecer que o jogo de búzios possui profundo significado espiritual nas religiões de matriz africana, sendo utilizado em rituais de consulta aos Orixás no Candomblé e em outras práticas religiosas afro-brasileiras. Ao transpô-lo para o contexto educacional, corremos o risco de banalizar ou descontextualizar uma prática sagrada, transformando-a em mero recurso lúdico sem o devido respeito às comunidades que a praticam.

Para evitar a apropriação cultural indevida, a proposta pedagógica deve priorizar a valorização cultural sobre a instrumentalização didática. Isso implica contextualizar historicamente a origem do jogo, explicar seu significado nas comunidades de terreiro, reconhecer a cosmovisão africana que permeia a prática e estabelecer um diálogo respeitoso com representantes dessas comunidades. As estratégias de ensino devem garantir que o jogo seja apresentado como um saber ancestral legítimo, com respeito à sua dimensão espiritual, e não apenas como um objeto matemático abstraído de seu contexto cultural. Essa reflexão ética é fundamental para uma atuação pedagógica que seja, de fato, inclusiva e antirracista, promovendo o reconhecimento e a celebração da diversidade epistêmica brasileira sem incorrer em práticas de violência simbólica ou desrespeito religioso.

A literatura apresenta duas abordagens principais sobre a temática. A primeira, de Nakano (2024), explora o uso do jogo em oficinas didáticas em comunidades quilombolas, destacando como a atividade favorece a compreensão da não equiprobabilidade em situações reais.

A segunda, de Oliveira e Madruga (2019), adota uma perspectiva etnográfica ao inves-

tigar a Matemática presente no ritual do Candomblé, enfatizando a valorização cultural sem desconsiderar o rigor matemático. A análise comparativa dessas pesquisas mostra que o jogo de búzios pode ser entendido tanto como prática didática adaptada ao ensino formal quanto como elemento cultural a ser reconhecido e respeitado.

Além da fundamentação teórica, o estudo dialoga com a Lei nº 10.639/03, que torna obrigatório o ensino da história e cultura afro-brasileira, e com as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais, que orientam práticas pedagógicas inclusivas e antirracistas. Dessa forma, o uso do jogo de búzios no ensino de Matemática não se limita a uma estratégia lúdica, mas se constitui como ação pedagógica que integra conteúdo, cultura e cidadania.

O presente trabalho parte do referencial da Etnomatemática, formulada por Ubiratan D'Ambrosio (2001), que compreende os conhecimentos matemáticos como produções culturais diversas, utilizadas por diferentes povos para resolver problemas do cotidiano. Essa abordagem rompe com a visão eurocêntrica e formalista da matemática, ao reconhecer práticas culturais, jogos e tradições como espaços legítimos de produção de saberes. Nesse contexto, o jogo de búzios, de origem africana e amplamente presente nas religiões de matriz afro-brasileira, é tomado como objeto de estudo. Modelagem Matemática do Sistema Merindilogum.

Em sua estrutura, o sistema Merindilogum, associado aos Odus, configura um sistema binário. Para fins de transposição didática, essa estrutura binária permite a modelagem matemática explícita solicitada: considerando o lançamento de um conjunto de oito búzios, onde cada elemento pode cair em apenas duas posições (aberto ou fechado), o número total de resultados possíveis é dado pela fórmula de arranjo com repetição 2^n . Para $n = 8$ búzios, o espaço amostral totaliza $2^8 = 256$ combinações possíveis. Essa modelagem permite relacionar o jogo diretamente a conceitos de espaço amostral, análise combinatória e cálculo de probabilidades.

Tal potencial permite ressignificar uma prática cultural para o ensino de conteúdos matemáticos previstos na BNCC (Brasil, 2017), especialmente no eixo de probabilidade e estatística. Discussão Ética e Valorização Cultural. Apesar do alto potencial didático, a transposição de uma prática de matriz religiosa como o jogo de búzios para o ambiente escolar exige um aprofundamento na discussão ética sobre a secularização. É imperativo que a proposta pedagógica priorize a valorização cultural sobre a apropriação ou banalização, atuando com a sensibilidade e clareza metodológicas necessárias.

As estratégias de ensino devem garantir o respeito às comunidades de matriz africana e à cosmovisão associada, enfatizando o jogo como um saber ancestral e não apenas como um mero recurso lúdico. Essa reflexão ética é fundamental para uma atuação pedagógica que seja, de fato, inclusiva e antirracista, evitando interpretações equivocadas e resistências sociais. A literatura apresenta duas abordagens principais sobre a temática.

A primeira, de Nakano (2024), explora o uso do jogo em oficinas didáticas em comunidades quilombolas. A segunda, de Oliveira e Madruga (2019), adota uma perspectiva etnográfica ao investigar a matemática presente no ritual do Candomblé.

A análise comparativa dessas pesquisas mostra que o jogo de búzios pode ser entendido tanto como prática didática adaptada ao ensino formal quanto como elemento cultural a ser reconhecido e respeitado. Além da fundamentação teórica, o estudo dialoga com a Lei nº 10.639/03, que torna obrigatório o ensino da história e cultura afro-brasileira, e com as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais. Dessa forma, o uso do jogo de búzios no ensino de matemática não se limita a uma estratégia lúdica, mas se constitui como ação pedagógica que integra conteúdo, cultura e cidadania.

3 Análise/Considerações Finais

O projeto apresenta alta relevância social, pedagógica e acadêmica, ao propor a articulação entre o jogo de búzios, a Etnomatemática e o ensino de probabilidade na Educação Básica. Sua originalidade reside em ressignificar uma prática cultural de matriz africana, tradicionalmente associada à religiosidade, para fins educativos, contribuindo tanto para a valorização da diversidade cultural quanto para o aprendizado matemático.

A análise dos resultados parciais da aplicação piloto demonstrou que a proposta possui alto potencial pedagógico. A fundamentação teórica mostrou-se consistente, sustentada por D'Ambrosio (2001) e Gerdes (2012), e se alinha à legislação educacional vigente (BNCC e Lei nº 10.639/03). A modelagem matemática do sistema Merindilogum, baseada em $2^8 = 256$ combinações possíveis e explicitada através da representação binária das configurações, confirmou o rigor conceitual necessário para a transposição didática dos conceitos de probabilidade e análise combinatória. O processo de elaboração e aplicação piloto de atividades didáticas indicou que os estudantes conseguiram compreender noções básicas de probabilidade de forma lúdica e significativa, sinalizando a viabilidade da proposta no contexto escolar.

Entretanto, alguns desafios exigem atenção crítica, como a formação docente para abordagens etnomatemáticas e as possíveis resistências sociais diante do vínculo religioso do jogo de búzios. Tais questões demandam sensibilidade ética e clareza metodológica, sendo fundamental que a proposta evite a banalização ou apropriação cultural indevida da prática. A ênfase deve recair no respeito à cosmovisão das comunidades de matriz africana, na contextualização histórica e espiritual do jogo, e no estabelecimento de diálogos respeitosos com representantes dessas comunidades, garantindo que o caráter pedagógico-cultural da proposta não se sobreponha ao significado sagrado da prática para seus praticantes originários.

Em síntese, o projeto é coerente, fundamentado e inovador, com potencial de oferecer contribuições relevantes para a Educação Matemática e para a valorização da cultura afro-brasileira. Sua maior força reside na integração entre conteúdo matemático, cultura e legislação educacional, configurando-se como uma proposta de ensino inclusiva, crítica e significativa, que amplia o repertório metodológico dos professores e promove uma educação antirracista e culturalmente sensível.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF: MEC, 2017.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

GERDES, Paulus. Etnomatemática e educação. São Paulo: Ática, 2012.

NAKANO, Rafaela Mayumi. Explorando probabilidade no Ensino Fundamental por meio de um jogo de búzios. 2024. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

OLIVEIRA, Fabrício de Souza; MADRUGA, Zuleide Ester Figueiredo. Ciência e religião: a matemática nos jogos de búzios. Ilhéus: Universidade Estadual de Santa Cruz, 2019.



Explorando as potencialidades do ensino de cálculo de áreas totais e volumes em situações reais com impressora 3D à luz da teoria do TPACK

Elder Nunes Florêncio da Silva

Universidade Federal de Uberlândia – PET Matemática

elder.nunes@ufu.br

1 Introdução

Os resultados em avaliações como PISA e IDEB mostram que o ensino de matemática no Brasil ainda precisa evoluir. Diante disso, é urgente buscar práticas que tornem a aprendizagem mais significativa e conectada à realidade dos alunos. Este projeto investiga se a impressora 3D pode ajudar no ensino de áreas totais e volumes, tornando ideias abstratas em objetos tangíveis que os estudantes podem ver e tocar. A pesquisa apoia-se no modelo TPACK (Mishra e Koehler, 2006), que defende a integração entre conhecimento tecnológico (TK), pedagógico (PK) e de conteúdo (CK) para o planejamento de atividades mais eficazes.

Procedimentos matemáticos: - O ensino de cálculo de áreas totais e volumes envolve a compreensão de fórmulas, decomposição de sólidos e relacionamentos entre dimensões lineares, superficiais e espaciais. A contextualização em situações reais, como a produção de objetos impressos, potencializa a motivação e a construção de significados (Freire, 2002). - As atividades propostas trabalham diretamente com identificação das superfícies que formam cada sólido e com a construção das expressões algébricas para a área total. Para o volume, os alunos aprendem a decompor sólidos compostos em peças conhecidas (prismas, pirâmides, cilindros), calcular volumes parciais e somá-los. Além disso, as atividades incluem conversões de unidades, estimativas, comparação entre o valor teórico e a medida obtida no protótipo impresso e prática de traduzir representações simbólicas em formas espaciais por meio da modelagem digital.

2 Desenvolvimento/Metodologia

A pesquisa adota uma abordagem qualitativa, exploratório-descritiva (Bogdan e Biklen, 1994), com foco específico em professores de Matemática do Ensino Médio. A amostra será formada por um grupo intencional de docentes, incluindo professores com diferentes níveis de experiência e familiaridade com tecnologias digitais, de modo a captar uma variedade de percepções e práticas. A dinâmica principal de investigação combina o grupo focal — conforme orientações de Gatti (2005) — com a aplicação de questionários estruturados e instrumentos de

registro qualitativo. A coleta de dados organiza-se em três eixos integrados. Primeiro, realiza-se um levantamento técnico das impressoras 3D FDM (parâmetros de impressão, materiais como PLA, calibração e fatores que afetam a precisão), cujo objetivo é subsidiar a seleção de modelos e a definição de protocolos seguros e pedagógicos para uso em sala de aula. Em seguida, procede-se à revisão bibliográfica em bases como CAPES e SciELO para mapear evidências sobre representações 3D e uso da Impressora 3D, dificuldades conceituais em área e volume e práticas didáticas eficazes; essa revisão orienta a construção dos roteiros de intervenção. A etapa central é a intervenção prática com docentes, estruturada em oficinas que combinam formação técnica e atividades pedagógicas. Os participantes recebem capacitação em softwares de modelagem (ex.: Tinkercad, SketchUp) e nas rotinas básicas de operação da impressora 3D. Cada oficina segue uma sequência padronizada: (a) apresentação conceitual dos conteúdos matemáticos; (b) modelagem digital dos sólidos selecionados (cubos, prismas, pirâmides, cilindros e sólidos compostos); (c) cálculo prévio da área total e do volume; (d) impressão 3D dos protótipos; (e) verificação experimental e discussão pedagógica; (f) feedback e registros individuais. Após cada ciclo, aplica-se um questionário aos participantes para coletar informações sobre infraestrutura escolar, autoeficácia no uso da tecnologia, necessidades de formação e percepções sobre viabilidade de inserção das atividades no currículo. O trabalho com o grupo focal ocorre em momentos específicos, imediatamente após a atividade prática, permitindo uma discussão aprofundada sobre estratégias de ensino, adaptações possíveis e barreiras detectadas na prática. Os encontros em grupo focal são gravados (com consentimento), transcritos e complementados por diários de campo, relatórios parciais elaborados pelos participantes e autoavaliações que registram mudanças percebidas na compreensão dos conceitos e nas habilidades pedagógicas. A análise dos dados qualitativos seguirá procedimentos de codificação aberta e axial (Saldaña, 2013), triangulando informações das discussões em grupo, dos questionários, dos diários e dos relatórios. O uso do NVivo viabilizará a organização das categorias emergentes e a construção de matrizes de evidência sobre aprendizagem, desenvolvimento de competências TPACK e condições institucionais para implementação. Aspectos operacionais — segurança no manuseio das impressoras (peças quentes), escolha de modelos alinhados ao currículo, tempo de impressão e logística de uso compartilhado — serão monitorados e registrados para compor recomendações práticas ao final da pesquisa

3 Análise/Conclusão

A literatura e evidências preliminares indicam que o volume costuma ser a grandeza mais complexa para os estudantes, frequentemente confundida com área superficial (Safitri et al., 2021; Kim et al., 2019). Estudos sobre representações 3D apontam que tanto modelos virtuais quanto protótipos físicos facilitam a visualização espacial, a decomposição de sólidos e a construção de conceitos (Sung et al., 2014/2015; Oliveira et al., 2023).

Espera-se que a intervenção proposta:

- Reduza erros conceituais, aproximando o cálculo simbólico da percepção espacial;
- Fortaleça competências TPACK em futuros professores, capacitando-os a planejar e aplicar atividades tecnológicas com propósito pedagógico;
- Gere materiais didáticos e sequências replicáveis (guias, tutoriais, roteiros de aula);
- Produza subsídios para publicações e apresentações acadêmicas.

Produza subsídios para publicações e apresentações acadêmicas. Reconhecem-se limitações práticas: tempo de impressão, custo e disponibilidade de equipamentos e a necessidade de formação docente. O produto final será um relatório com recomendações para implementação em escolas, propostas de atividades adaptáveis e um plano de capacitação para professores.

Agradecimentos

Agradeço à Universidade Federal de Uberlândia (UFU), ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) e ao PET Matemática pelo apoio, incentivo e oportunidade de desenvolver esta pesquisa e poder apresentar da SEMAP (Semana de Matemática do Pontal), que reforça o compromisso com a inovação e a qualidade do ensino de matemática.

Referências

- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.
- FREIRE, P. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2002.
- GATTI, B. A. Grupo focal na pesquisa em Ciências Sociais e Humanas. Brasília: Liber Livro, 2005.
- KIM, R. et al. Elementary students' understanding of geometrical measurement in three dimensions. 2019.
- MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. Teachers College Record, v. 108, n. 6, p. 1017–1054, 2006.
- OLIVEIRA, R.; COSTA, L.; MENDES, F. Resultados de aprendizagem com Impressão 3D em Matemática. Ensaio: Pesquisa em Educação em Ciências, v. 25, n. 2, p. 321–340, 2023.
- SAFITRI, N.; DARHIM, D.; DASARI, D. Obstáculos no aprendizado de área total e volume: estudo interpretativo. 2021.
- SALDAÑA, J. The Coding Manual for Qualitative Researchers. 2. ed. Thousand Oaks, CA: Sage, 2013.
- SUNG, H.-Y.; SHIH, Y.-C.; CHANG, K.-E. Use of 3D representations in learning area and surface of composite solids. Instructional Science, 2014/2015.



Uma análise da aprendizagem de física através de uma abordagem ludificada no ensino médio

Eduardo Gonçalves Menezes Silva

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

eduardo.menezes@ufu.br

Luan Lira dos Santos

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

luan.lira@ufu.br

Marcelo Parreira de Oliveira

Escola Estadual Governador Israel Pinheiro

marceloparreiradeoliveira@gmail.com

1 Introdução

Utilizar jogos como uma ferramenta metodológica é uma prática que vem crescendo ao longo dos últimos anos. Os jogos são uma maneira útil de apresentar um conteúdo, pois proporcionam ao estudante uma imersão maior no contexto, e engajamento que muitas vezes na aula padrão não é percebido. De fato, a gamificação é definida como o uso de elementos de jogos para engajar, motivar e melhorar o desempenho dos alunos (Silva, Sales e Castro). Essa abordagem se contrapõe ao modelo tradicional de ensino que consiste apenas em aulas expositivas, em que os alunos ficam apenas sendo ouvintes passivos, muitas vezes apontado como uma das razões para a desmotivação dos estudantes.

Pensando nessa metodologia, aplicamos jogos em turmas da terceira série do ensino médio, com o intuito de revisar os conteúdos já estudados, tais como corrente elétrica e a 1ª lei de Ohm.

Basicamente, os estudantes precisavam resolver alguns exercícios presentes no tabuleiro e inserir as respostas correspondentes. Como os exercícios envolviam a 1ª lei de Ohm e corrente elétrica, as operações realizadas eram principalmente multiplicação e divisão. Além disso, os estudantes precisaram fazer conversões de unidades e, em alguns casos, utilizar a notação científica.

Palavras-chave: Atividade Lúdica; Corrente Elétrica; Física; Leis de Ohm; PIBID.

2 Desenvolvimento

O nosso trabalho surgiu da necessidade de realizar uma revisão dos conteúdos abordados anteriormente em sala de aula. Com isso, foi pensado um jogo cujo objetivo era que os

estudantes resolvessem exercícios e encaixassem as peças nos devidos lugares, num formato de álbum de figurinhas.

O jogo foi aplicado em sete turmas da terceira série do ensino médio da escola parceira do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) que atuamos. Ao chegarmos na sala, explicamos aos estudantes como a atividade deveria ser realizada e ressaltamos que, durante o processo, eles poderiam nos chamar para tirar dúvidas. As turmas foram divididas em duplas e, quando havia número ímpar de alunos, formava-se um trio.

A atividade inicial, sobre a 1ª lei de Ohm, levou em média, de 20 a 30 minutos, para ser concluída. Já a atividade sobre corrente elétrica, demorava praticamente a aula toda, em torno de 50 minutos, devido ao fato de que, nessa segunda etapa, os estudantes precisavam realizar conversões de unidades para o Sistema Internacional (SI).

Durante a realização das atividades, percebemos grande dificuldade dos alunos nas operações básicas e, principalmente, no momento de realizar conversões de unidades.

Após a aplicação da atividade, passamos para a etapa de correção. Tentamos seguir um padrão nessa fase, descontando pontos em situações específicas, como quando o aluno esquecia de colocar a unidade no resultado final, ou quando realizava o desenvolvimento incorreto na resolução de cada exercício.

3 Análise/Conclusão

A experiência com os jogos sobre 1ª lei de Ohm e corrente elétrica se mostraram eficazes em seu objetivo. A abordagem lúdica promoveu maior engajamento e a participação ativa dos estudantes. Esse resultado está em sintonia com outras pesquisas, que mostram a gamificação como uma alternativa promissora para o ensino de Física, com grande capacidade de envolver e motivar os alunos (Silva, Sales e Castro).

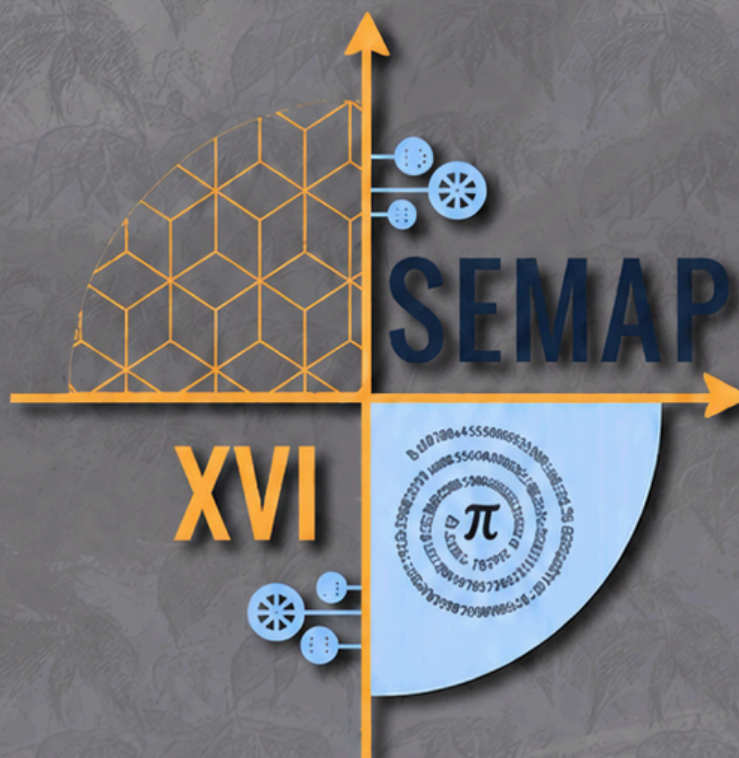
Os jogos também nos serviram como uma ferramenta para ver onde os estudantes têm uma fragilidade que é na parte de Matemática básica. Vimos que a maior dificuldade não está na Física em si, mas sim na parte da Matemática elementar e na manipulação das equações.

Concluimos então que os jogos foram uma boa ferramenta didática. Concluimos que é importante que seja ensinado aos estudantes uma abordagem em que se trabalha Matemática e Física juntas, e também se faz vista de que um reforço em Matemática básica seria algo muito valioso.

Referências

SILVA, J. B. da; SALES, G. L.; CASTRO, J. B. de. Gamificação como estratégia de aprendizagem ativa no ensino de Física. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 41, n. 4, p. e20180309, 2019.

TRABALHOS COMPLETOS XVI SEMAP





A contribuição de disciplinas de/para pesquisa em Educação Matemática para a formação de professores-pesquisadores

Carlos Eduardo Petronilho Boiago

Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais

carlos.boiago@educacao.mg.gov.br

Miliam Juliana Alves Ferreira

Universidade Federal de Uberlândia

miliam.ferreira@ufu.br

Resumo. Este relato de experiência tem por finalidade tecer algumas reflexões acerca da importância de disciplinas voltadas para elaboração, análise e discussões de pesquisas em Educação Matemática na grade curricular de um curso de licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Uberlândia, contribuindo para a formação do professor-pesquisador. A metodologia utilizada é de natureza qualitativa, e os dados constituíram-se a partir de registros dos docentes e questionário enviado aos discentes. A análise dos registros e dos discursos dos discentes revelam que disciplinas como Metodologia Científica (I e II), Trabalho de Conclusão de Curso (I e II) e Pesquisas em Educação Matemática são indispensáveis no currículo de Licenciatura em Matemática. Tais disciplinas, na perspectiva e abordagens metodológicas que foram adotadas, possibilitaram um espaço para compreensão e desmistificação da produção de uma pesquisa científica. O exercício da articulação teoria-prática e o despertar da autoria, capacitam o futuro professor a: a) compreender criticamente a literatura da área; b) compreender o rigor científico e analisar sua própria prática; e c) elaborar pesquisas e planejar intervenções pedagógicas embasadas, passíveis de avaliação.

Palavras-chave: formação docente; pesquisa em educação matemática; despertar autoria.

1 Introdução

Nos cursos de formação inicial de professores de Matemática é desejável que o desenvolvimento das disciplinas transcenda a mera transmissão de conteúdos conceituais e procedimentais. Na contemporaneidade, o professor é concebido como um agente de transformação e um pesquisador de sua própria prática. Essa perspectiva exige que os cursos de Licenciatura ofereçam um currículo que não apenas instrumentalize o futuro docente para a sala de aula, mas que o engaje na reflexão crítica e na produção de conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

A concepção de professor-pesquisador não é nova, mas ganha relevância crescente frente aos desafios da escola básica. Autores como Stenhouse (1998) defendem que a pesquisa é uma forma de entender e melhorar a própria prática. Para o autor, o professor deve ser o principal agente da mudança curricular, questionando, investigando e produzindo conhecimento em seu ambiente de trabalho.

No contexto da Educação Matemática, o campo de pesquisa é vasto e multidisciplinar, investigando desde as questões epistemológicas da Matemática até os processos de ensino e aprendizagem em diferentes níveis e contextos. Lopes (2006) e Fiorentini e Lorenzato (2006) salientam que o papel das pesquisas é oferecer subsídios teóricos e metodológicos para a transformação da prática pedagógica. Contudo, para que esses subsídios sejam assimilados e utilizados de forma crítica, é imperativo que o futuro professor desenvolva a capacidade de ler, interpretar, criticar e, por fim, produzir pesquisa.

A pesquisa como princípio educativo (Bastos, 2006) deve, portanto, permear a formação. Disciplinas que abordam a pesquisa em Educação Matemática não servem apenas para ensinar métodos; elas promovem a naturalização da prática, permitindo que o licenciando veja a sala de aula não como um espaço de mera repetição, mas como um laboratório de investigação e um campo para a construção de teoria. É nesse diálogo constante entre a teoria da pesquisa e a prática pedagógica que acreditamos que vai se constituindo o professor-pesquisador.

Nesse contexto, o presente artigo se configura como um relato de experiência derivado da observação e análise da dinâmica das aulas nas disciplinas (Metodologia Científica I e II, Trabalho de Conclusão de Curso I e II e Pesquisas em Educação Matemática) ministradas no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Campus Pontal – bem como os discursos dos discentes oriundos de um questionário de “avaliação e autoavaliação da/na disciplina”. Salientamos que essas disciplinas são focadas na elaboração, discussão e análise de pesquisas em Educação Matemática, e possuem objetivo central iniciar os licenciandos no universo da investigação científica da área.

Sendo assim, o propósito deste trabalho é evidenciar a importância da inclusão dessas disciplinas na grade curricular de um curso de Licenciatura em Matemática que despertem o interesse do discente pela pesquisa e contribua para a formação do professor-pesquisador. Acreditamos que o contato direto e a reflexão sistemática sobre o fazer pesquisa são catalisadores para uma postura docente mais autônoma, reflexiva e consciente.

2 A formação docente e a constituição do professor-pesquisador

A formação de educadores de qualidade demanda uma concepção sólida e crítica do professor-pesquisador — profissional que investiga sua própria prática, estabelecendo relação indissociável entre ação e reflexão (Nóvoa 1991, apud Kullok 2000; Gómez 1995). Essa reflexão envolve imersão consciente na experiência, considerando valores e implicações sociopolíticas, transformando o professor de executor de métodos em intérprete crítico de sua prática.

Nessa perspectiva, Charlot (2002) e Freire (1996) convergem ao afirmar que pesquisar está ao alcance do professor na sala de aula, sendo a indagação parte essencial da docência. O ato investigativo desenvolve instrumentos para compreender profundamente o cotidiano escolar, realizando-se no movimento dialético entre fazer e pensar sobre o fazer.

Schon (1995) propõe três dimensões do profissional reflexivo: conhecimento na ação,

reflexão na ação e reflexão sobre a reflexão na ação, compondo um ciclo contínuo de aprendizagem pedagógica. Garcia (1995) complementa com princípios formativos essenciais: conectar a formação ao contexto escolar e integrar teoria e prática, considerando conhecimentos acadêmicos e saberes experienciais orientados para a transformação educacional.

A prática não é apenas um espaço de aplicação do conhecimento teórico, mas também um lócus de produção de saberes específicos (Tardif, 2003). Nessa mesma perspectiva, Bolzan (2002) afirma que refletir criticamente sobre a ação permite ao professor estabelecer relações promovendo transformações significativas na sua prática. Pimenta (2000) ainda destaca que essa consciência sobre a prática não se desenvolve em contextos formativos passivos, é necessário promover a análise das ações pedagógicas, de modo a compreendê-las e investigá-las para transformá-las.

O currículo formativo deve incorporar a pesquisa como princípio formador, criando situações que estimulem investigação e questionamento constante (Ramalho, Nuñez e Gauthier). Sacristán (2002) enfatiza compreender a prática como práxis — ação intencional e reflexiva constantemente reelaborada. Pimenta (2002) valoriza crenças e sentidos atribuídos pelos docentes, reconhecendo-os como autores, não meros executores de práticas pedagógicas.

Desse modo, consideramos fundamental que o currículo da formação inicial incorpore a pesquisa como princípio formador, que o fazer científico esteja presente nesse processo, criando situações de aprendizagem que estimulem a investigação e o questionamento constante da prática, e favoreça a produção de conhecimento. Para Ramalho (Nuñez e Gauthier), essa organização curricular deve favorecer experiências significativas, articuladas ao contexto histórico e social dos sujeitos em formação, superando a visão de um currículo fragmentado em competências.

Por fim, destaca-se a formação de professores críticos e reflexivos desde os primeiros momentos da trajetória formativa.

3 Procedimentos metodológicos: produção de dados da pesquisa

Este estudo se caracteriza como um relato de experiência de natureza qualitativa, baseado na observação participante de dois docentes (ao longo do texto identificadas como Prof. A e Prof. B), autores do artigo, que ministraram, as disciplinas: Metodologia Científica I e II, TCC I e II e Pesquisa em Educação Matemática, que são obrigatórias na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UFU – Campus Pontal.

O período de observação ocorreu ao longo de um semestre letivo para cada uma das disciplinas que foram ministradas por dois professores diferentes. Um dos instrumentos para a produção dos dados foi o Diário de Bordo dos docentes. Que consistiu em um registro sistemático e reflexivo, no qual os professores anotavam as interações, falas marcantes dos estudantes, perspectivas pedagógicas e as dificuldades e progressos percebidos nos licenciandos nos diferentes desenvolvimentos das disciplinas. Outro instrumento utilizado foi o Google Formulários

onde os docentes fizeram uma avaliação da disciplina cursada (propostas metodológicas, abordagens, desafios, importância da disciplina para sua formação e sugestões) e autoavaliação.

O foco de nossas análises encontra-se sobre os registros e discursos que evidenciavam a mudança de postura dos licenciandos frente à pesquisa: o momento em que eles deixavam de ver os artigos como "tarefas" para vê-los como "ferramentas" e, posteriormente, como "modelos" para a própria produção.

4 Um olhar para os registros e discursos: articulação entre dados e literatura

A análise dos registros do Diário de Bordo dos docentes e dos discursos providos do formulário on-line revelou três categorias centrais que demonstram a importância das disciplinas que permitem a elaboração e desenvolvimento de uma pesquisa em Educação Matemática: (4.1) *Desmistificação da Pesquisa*; (4.2) *Articulação Teoria-Prática*; e (4.3) *O Despertar da Autoria*.

4.1 Desmistificação da Pesquisa

Essa categoria revela, pelos registros dos docentes e discursos dos sujeitos, que a pesquisa científica muitas das vezes se mostra como algo complexo e distante para um aluno da graduação, sendo visto como mais voltado para o ambiente da pós-graduação e professores de nível universitário.

Inicialmente, os licenciandos manifestaram grande resistência, devido a essa percepção da pesquisa. A seguir trazemos um trecho com um questionamento feito por um discente.

“Percebi a resistência inicial. Um aluno, perguntou: ‘Professor, mas a gente vai ter que fazer pesquisa para dar aula?’ A fala dele demonstra a ruptura que existe na cabeça dos alunos entre o ‘ser professor’ e o ‘ser pesquisador’. Gastei um tempo explicando que a pesquisa não é só ‘escrever tese’, mas sim questionar o motivo do aluno não aprender um conceito, e buscar evidências para a mudança. Esse é o primeiro passo: entender a pesquisa como uma ferramenta do fazer docente.” Trecho do Diário de Bordo (Prof. A – disciplina de Pesquisa em Educação Matemática).

A resistência inicial dos licenciandos à pesquisa dialoga com Charlot (2002), que identifica a necessidade de uma nova postura docente. O autor argumenta que pesquisar está ao alcance do professor em sala de aula, exigindo um olhar investigativo além da mera execução. Os relatos confirmam que a barreira entre "ser professor" e "ser pesquisador" é mais cultural que prática.

À medida que as aulas foram acontecendo, abordagens metodológicas eram sugeridas, leituras de artigos de Educação Matemática eram realizadas e dialogadas em sala de aula, percebemos que a postura dos discentes ia mudando, tornando-os mais participativos, interessados em compreender as metodologias e passos para o desenvolvimento de uma pesquisa, levando em consideração o rigor, a ética e normas técnicas. Esses movimentos, ao invés de assustar, atuaram como pontes.

“A disciplina enriquece muito o nosso conhecimento sobre os passos a se seguirem para a formulação do nosso tcc. Cada aula que se passava era um aprendizado e dúvida nova que surgia, fazendo com que pensássemos cada vez mais sobre como seguir o caminho da construção do trabalho. Essa disciplina auxilia muito no pontapé inicial do trabalho, sanando algumas dúvidas básicas. A todo momento fomos indagados a buscar conhecimento novo e que é necessário para o processo do curso”. Discurso de um discente no formulário on-line (Prof. B – disciplina Metodologia Científica I)

Pelo discurso do discente, é possível perceber que a disciplina foi contribuindo para conhecer os passos de uma pesquisa e sempre motivados a “buscar conhecimento” acerca do objeto investigado. Esse movimento corrobora com o pensamento de Freire (1996), que afirma ser indissociável ensinar e pesquisar. A indagação manifesta-se quando os licenciandos questionam e buscam conhecimento novo, realizando o movimento dialético entre fazer e pensar sobre o fazer. A descoberta dos procedimentos éticos e metodológicos representa a entrada consciente na produção sistemática de conhecimento.

Outro discente menciona sobre como sua visão acerca do fazer pesquisa foi modificando.

“Minha visão de como era o processo de uma pesquisa mudou completamente, e agora consigo enxergar muitas coisas que para mim não existiam para fazer uma pesquisa, como por exemplo, a parte do comitê de ética, que nunca imaginava que existia toda essa burocracia” Discurso de um discente no formulário on-line (Prof. B – disciplina Metodologia Científica I).

Por meio da leitura de artigo, os licenciandos perceberam que os temas de pesquisa emergiam diretamente de problemas que eles mesmos já enfrentavam nos estágios (exemplo: o uso ineficaz de tecnologias, a dificuldade com a Geometria), como é possível observar nos registros a seguir.

“Eu achava que pesquisa era coisa de quem está fazendo mestrado ou doutorado. Agora vejo que posso pesquisar o que acontece com meus alunos mesmo durante o estágio.” Trecho do Diário de Bordo (Prof. A – disciplina de Pesquisa em Educação Matemática)

“Sempre achei que os artigos eram difíceis demais e distantes da sala de aula. Mas esse texto sobre dificuldades em álgebra falou exatamente do que vejo com os meus alunos no estágio.” Trecho do Diário de Bordo (Prof. A – disciplina de Pesquisa em Educação Matemática)

“Antes eu lia os textos só pra cumprir tarefa. Agora eu leio tentando entender como os autores pensaram o problema e como isso pode me ajudar na prática.” Trecho do Diário de Bordo (Prof. A – disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso)

Tais reflexões dialogam com Schon (1995), que ressalta a dimensão reflexiva como indispensável à formação docente. Os relatos demonstram a descoberta da reflexão como ferramenta investigativa, legitimando objetos de pesquisa que emergem das experiências nos estágios.

A articulação entre o que era lido e depois dialogado foi permitindo que os discentes compreendessem os passos para o desenvolvimento de uma pesquisa, que sempre está ligado a

algo que o pesquisador quer compreender, algo que o incomoda e o faz construir um caminho para compreender esse “algo”, buscar soluções para um problema, aprofundar um conhecimento ou mesmo refutar, e até criar algo novo. E essa articulação nos motiva a discutir a próxima categoria.

4.2 Articulação Teoria-Prática

Em nossa análise, a articulação entre teoria e prática foi propulsora dos projetos de pesquisa. À medida que os licenciandos conheciam as pesquisas dos artigos e observavam interrogação, caminhos metodológicos, produção e análise de dados, compreendiam os movimentos exigidos e se inspiravam para suas próprias pesquisas. Esta articulação encontra fundamentação em Garcia (1995), que estabelece como princípio essencial integrar teoria e prática. Os artigos funcionaram como mediadores, permitindo que conhecimentos acadêmicos e saberes experienciais convergissem para transformar a realidade educacional dos licenciandos.

Os artigos foram permitindo a construção do referencial teórico e delineamento das intenções de pesquisa. O discurso de um estudante, a seguir, corrobora isso.

“Achei a disciplina de Pesquisa em Ed. Matemática bastante importante, pois como seu objetivo principal é realizar uma pesquisa nessa área, esse processo fornece uma oportunidade aos discentes de terem contato com a pesquisa e escrita acadêmica. Ao longo do semestre, passamos por um processo de compreensão sobre o que realmente significa pesquisar em Educação Matemática, construindo nosso tema de investigação, analisando as tendências matemáticas que desejávamos seguir, aprofundando-nos em diferentes metodologias e formas de coleta de dados, ou seja, percorremos todos os passos inerentes ao processo de produção acadêmica”. Discurso de um discente no formulário on-line (Prof. B – disciplina Pesquisa em Educação Matemática).

Outro estudante comenta:

“Gostei muito da dinâmica entre aprender a teoria com o desenvolvimento prático da escrita. A disciplina é densa e cansativa, por ser 4 horários seguidos, mas ao intercalar, você consegue aprender e produzir. É interessante entender como são as tendências matemáticas, as formas de pesquisa e além de elementos mais básicos que a gente não dá tanta importância para a definição e/ou como utilizar (sem conhecer), mas que são fundamentais”. Discurso de um discente no formulário on-line (Prof. B – disciplina Pesquisa em Educação Matemática).

Em outra edição da disciplina, um dos momentos mais significativos ocorreu quando os licenciandos foram solicitados a relacionar o referencial teórico de um artigo estudado com uma situação específica vivenciada em suas aulas de estágio. O docente, em seus registros, relata que:

“O exercício de levar o artigo sobre a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e pedir para eles analisarem uma de suas aulas de Estágio foi um divisor de águas. Um aluno comentou: 'Eu nunca tinha olhado para o planejamento do professor e tentado identificar qual a estrutura multiplicativa que ele estava trabalhando. Para mim ele só estava dando a matéria. O artigo me deu um óculos teórico para ver o desenvolvimento das aulas'. Esta fala é crucial, pois mostra que o contato com a pesquisa não é apenas aquisição de vocabulário, mas a aquisição de um arcabouço

teórico para a análise crítica da própria prática.” (Prof. A – disciplina de Pesquisa em Educação Matemática)

O "óculos teórico" representa o que Gómez (1995) caracteriza como imersão consciente na experiência, considerando valores e implicações sociais. O licenciando torna-se intérprete que questiona e reconstrói sua prática através da observação crítica.

Nesse sentido, disciplinas de pesquisa, ao forçarem esse exercício de transposição, concretizam o conceito de professor-pesquisador, pois equipam o futuro docente com o aparato intelectual para ir além da descrição da prática e avançar para a sua explicação e transformação fundamentada.

“Quando apliquei uma atividade em grupo, percebi que estava usando uma abordagem construtivista. Só consegui fazer essa análise depois de ler sobre Vygotsky e a zona de desenvolvimento proximal.” (Prof. A – disciplina de Pesquisa em Educação Matemática)

“Eu achava que os conceitos da teoria eram só ‘decoração’. Agora vejo que eles me ajudam a entender por que certas estratégias funcionam ou não.” (Prof. A – disciplina de Metodologia Científica II)

“Na última aula do estágio, testei uma proposta baseada em um artigo que lemos sobre resolução de problemas. Foi interessante ver que os alunos ficaram mais engajados. Senti que a teoria fez diferença.” (Prof. A – disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso)

Os relatos evidenciam as três dimensões do profissional reflexivo propostas por Schon (1995): conhecimento na ação, reflexão na ação e reflexão sobre a reflexão na ação. Esse ciclo de aprendizagem materializa-se nas experiências dos licenciandos que testam propostas baseadas em referenciais teóricos e analisam criticamente seus resultados.

Ao citar a articulação entre a teoria e a prática, um estudante expõe que a disciplina e o contato com a pesquisa:

“aproxima teoria e prática: o professor pesquisa sua própria realidade, identifica problemas e propõe soluções. Isso torna o ensino mais reflexivo, participativo e ligado às necessidades reais dos estudantes”. Discurso de um discente no formulário on-line (Prof. B – disciplina Pesquisa em Educação Matemática).

Os relatos dos discentes nos permitem visualizar o quanto foi importante conhecer os teóricos e discuti-los para poderem pensar em como eles poderiam subsidiar reflexões quanto ao que estavam dispostos a desenvolver. A articulação entre a teoria e prática vai dando lugar a autoria e despertando o ser-professor-pesquisador.

4.3 O Despertar da Autoria

Essa transição de consumidor para produtor de conhecimento reflete a proposta de Pimenta (2002) ao valorizar crenças e sentidos atribuídos pelos docentes à sua ação. Os licenciandos reconhecem-se como autores e não somente executores de práticas. A preocupação em

justificar escolhas metodológicas demonstra o desenvolvimento da reflexão crítica sobre a ação (Bolzan, 2002), promovendo consciência dos pressupostos teóricos.

No final do semestre, o produto das disciplinas era a elaboração de um pré-projeto de pesquisa ou a elaboração de um artigo, a depender da disciplina. A observação final destacou a transição da postura do licenciando de consumidor para produtor de conhecimento.

“No início, os alunos tentavam apenas copiar os formatos dos artigos que lemos. No entanto, na fase de escrita da metodologia de seus pré-projetos, observei que eles estavam genuinamente preocupados em justificar a escolha da abordagem (qualitativa/quantitativa), dos instrumentos (entrevistas, questionários) e dos referenciais. A aluna R.L., que era muito passiva, defendeu sua proposta de pesquisa sobre a Resolução de Problemas com a clareza de quem estava criando algo e não apenas cumprindo uma tarefa. A autoria estava ali, latente.” Trecho do Diário de Bordo (Prof. A – disciplina de Metodologia Científica II)

O acesso à discussão de pesquisas não apenas mostra o "como fazer", mas legitima a voz do professor como alguém que tem perguntas válidas e que pode contribuir para a área, fomentando a autonomia intelectual.

“Antes eu pensava que nunca conseguiria escrever um artigo. Agora, com meu pré-projeto pronto, estou animada com a ideia de continuar pesquisando e quem sabe publicar no futuro.” (Prof. A – disciplina de Metodologia II)

Sacristán (2002) alerta sobre a importância de criar espaços onde o professor se reconheça como autor de suas experiências. O despertar para a possibilidade de publicação representa essa tomada de consciência da própria voz e legitimidade como produtor de conhecimento educacional. O que parecia impossível tornou-se motivador ao vislumbrar a publicação.

Outro estudante também se mostrou motivado a investigar ao relatar que:

“Escolhi pesquisar a dificuldade dos alunos com frações porque vi isso acontecer no estágio. É um tema meu, algo que eu vivi, e isso me motivou a investigar.” (Prof. A – disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso)

A pesquisa surge de algo que o pesquisador quer compreender, mas esse “algo” ainda não está estruturado, o que pode causar certa insegurança, como descreve o aluno a seguir.

“Fiquei inseguro no início, mas quando vi que meu projeto fazia sentido e que os colegas elogiaram minha pergunta de pesquisa, percebi que sou capaz de pensar e criar algo original.” (Prof. A – disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso)

Essa fala mostra a importância da construção de um projeto de pesquisa, onde as intenções de pesquisa refletidas e o caminhar da pesquisa vai sendo delineado.

“Escrever meu pré-projeto foi como organizar tudo que vivi no estágio, com um olhar mais crítico. Senti que estava produzindo conhecimento, e não só reproduzindo ideias.” (Prof. A – disciplina de Metodologia Científica II)

Fomos percebendo ao longo dessas vivências, junto aos alunos, que a pesquisa, antes desafiadora, foi se transformando em possibilidades e potencialidades. Como relata o discente:

“Uma disciplina muito proveitosa, na qual consegui, pela primeira vez, mesmo que de forma breve, realizar uma pesquisa completa, o que irá favorecer bastante quando eu for elaborar meu TCC”. Discurso de um discente no formulário on-line (Prof. B – disciplina Pesquisa em Educação Matemática).

Outro ainda vai além:

“[...] a disciplina me permitiu compreender com maior clareza o processo de escrita de um artigo científico, reconhecendo quais elementos são essenciais nesse percurso. Também contribuiu para ampliar minha compreensão acerca do contexto histórico da Educação Matemática e de seu desenvolvimento como área de pesquisa. Como resultado desse processo, ao final do semestre, produzimos um artigo que poderá ser submetido para publicação, o que torna a experiência ainda mais proveitosa”. (Prof. B – disciplina Pesquisa em Educação Matemática).

A transformação da pesquisa em algo possível exemplifica o que Ramalho (Nuñez e Gauthier) defendem: organização curricular com experiências significativas articuladas ao contexto dos sujeitos. As disciplinas incorporaram a pesquisa como princípio formador, estimulando investigação e questionamento constante. Desta maneira, elas foram importantes para compreender "o que é e como fazer pesquisa", despertando autoria e favorecendo a formação do professor-pesquisador, aproximando-os da pesquisa científica e escrita acadêmica.

As três categorias emergentes – Desmistificação da Pesquisa, Articulação Teoria-Prática e Despertar da Autoria – confirmam o que teóricos defendem. Como destaca Nóvoa (1991), apud Kullok (2000), qualidade no ensino exige formação docente sólida e crítica. Quando o currículo incorpora a pesquisa como princípio formador, os licenciandos desenvolvem identidade docente fundamentada na criticidade e engajamento educacional.

5 Considerações Finais

Ao longo do texto apresentado, nossa intenção foi explicitar a importância de disciplinas na grade curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática que permitam ao futuro professor, em sua formação inicial, compreender o que é uma pesquisa científica e propiciar o desenvolvimento de uma pesquisa a partir do interesse dele.

Alguns alunos não têm a oportunidade de ser bolsista de iniciação científica, iniciação à docência ou outro projeto, e acaba não experienciando o fazer científico e a escrita acadêmica, seja por falta de bolsas ou por já estarem inseridos no mercado de trabalho, o que limita seu tempo para o desenvolvimento de outras atividades. Em alguns cursos até mesmo o Trabalho de Conclusão de Curso não é tido como obrigatório, o que inviabiliza o contato com a escrita acadêmica. Nesse sentido, um curso de Licenciatura em Matemática que possua em sua grade curricular o desenvolvimento de pesquisas em Educação Matemática, favorece o “despertar da autoria” e a formação de um professor-pesquisador.

Indagados se as disciplinas cursadas seriam relevantes para a sua formação, alguns estudantes mencionaram

“Sim, a disciplina e as discussões irão contribuir para minha formação, pois ampliam minha visão sobre o papel do professor-pesquisador, fortalecem a reflexão crítica sobre a prática docente e mostram caminhos para integrar teoria e prática de forma significativa no ensino de Matemática..

Também foi retratado que

“A disciplina contribui de forma significativa para minha formação, pois amplia a minha compreensão sobre o ensino e a aprendizagem da matemática. Os conhecimentos discutidos irão favorecer na minha atuação futura na sala de aula e também em futuras atividades de pesquisa..

Tais discursos corroboram com a nossa percepção de que o contato com a pesquisa em Educação Matemática, por meio de disciplinas da grade curricular do curso, contribui para a reflexão sobre a prática docente e desenvolve o senso crítico para analisar, elaborar e avaliar pesquisas, projetos e propostas didáticas. Assim como despertar o interesse dos discentes para participar de eventos em Educação Matemática com apresentação das pesquisas desenvolvidas, contribuindo para a produção na área e divulgação do realizado.

Referências

- BASTOS, M. H. C. A pesquisa como princípio educativo. **In:** BERNARDI, L. M.; MARIN, J. R. (Org.). **Educação e pesquisa:** tecendo diálogos e partilhando experiências. Brasília: Líber Livro, 2006.
- BOLZAN, D. **Formação de professores:** compartilhando e reconstruindo conhecimentos. Porto Alegre: Mediação, 2002.
- CHARLOT, B. Formação de professores: a pesquisa e a política educacional. **In:** PIMENTA, S. G.; GHEDIN, E. (Org.). **Professor reflexivo no Brasil:** gênese e crítica de um conceito. São Paulo: Cortez, 2002. p. 89–108.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.
- FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.
- GARCIA, C. M. **Formação de professores para uma mudança educativa.** Porto: Porto Editora, 1995.
- GÓMEZ, A. P. O pensamento prático do professor: a formação do professor como profissional reflexivo. **In:** NÓVOA, A. (Coord.). **Os professores e a sua formação.** Lisboa: Dom Quixote, 1995. p. 93–114.
- KULLOK, M. G. B. **As exigências da formação do professor na atualidade.** Maceió: EDUFAL, 2000.
- LOPES, C. E. O ensino de estatística e probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cadernos Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57–73, jan./abr. 2006.

- NÓVOA, A. Para uma formação de professores construída dentro da profissão. **Revista de Educación**, Madrid, n. 350, p. 203–218, 1991.
- PIMENTA, S. G. (Org.). **Saberes pedagógicos e atividade docente**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2000.
- PIMENTA, S. G. Professor reflexivo: construindo uma crítica. **In:** PIMENTA, S. G.; GHEDIN, E. (Org.). **Professor reflexivo no Brasil: gênese e crítica de um conceito**. São Paulo: Cortez, 2002. p. 17–52.
- RAMALHO, B. L.; NUÑEZ, I. B.; GAUTHIER, C. **Formar o professor – profissionalizar o ensino: perspectivas e desafios**. Porto Alegre: Sulina, 2004.
- SACRISTÁN, J. G. Tendências investigativas na formação de professores. **In:** PIMENTA, S. G.; GHEDIN, E. (Org.). **Professor reflexivo no Brasil: gênese e crítica de um conceito**. São Paulo: Cortez, 2002. p. 81–87.
- SCHON, D. A. Formar professores como profissionais reflexivos. **In:** NÓVOA, A. (Coord.). **Os professores e a sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1995. p. 77–91.
- STENHOUSE, L. **Investigación y desarrollo del currículum**. 4. ed. Madrid: Morata, 1998.
- TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2003.



Proporção Áurea e Ensino de Matemática: um estudo documental em livros do 9º ano do ensino fundamental

Samara Aparecida Parreira Araujo Silva

Universidade Federal de Uberlândia

samara.parreira@ufu.br

Miliam Juliana Alves Ferreira

Universidade Federal de Uberlândia

miliam.ferreira@ufu.br

Resumo. Este trabalho tem como objetivo analisar como a Proporção Áurea é abordada em livros didáticos de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) em 2022. A pesquisa, de natureza qualitativa e de caráter documental, foi realizada a partir da análise de quatro coleções amplamente utilizadas nas escolas brasileiras: *Teláris Essencial*, *Matemática e Realidade*, *Matemática Bianchini* e *A Conquista Matemática*. Buscou-se identificar como o tema é introduzido, quais recursos didáticos são empregados e de que maneira as orientações ao professor se articulam com as atividades propostas aos alunos. Os resultados revelam que, embora o conceito da Proporção Áurea seja apresentado de forma semelhante, com base na divisão em média e extrema razão e na dedução do número $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, há variações quanto à profundidade da abordagem e ao enfoque interdisciplinar. Algumas obras priorizam aspectos geométricos e investigativos, enquanto outras exploram relações com a arte, a história e a cultura. Conclui-se que, mesmo não sendo um conteúdo previsto no currículo, a Proporção Áurea apresenta potencial pedagógico relevante, capaz de integrar a Matemática a diferentes áreas do conhecimento e aproximar os estudantes de aplicações reais desse conceito.

Palavras-chave: Proporção Áurea; livros didáticos; interdisciplinaridade.

1 Introdução

O ensino da Matemática, em grande parte, concentra-se em conteúdos curriculares tradicionais. Este trabalho surge da curiosidade de analisar um tema que não está formalmente contemplado no currículo: a Proporção Áurea. Além de sua relevância matemática, ela está presente em diferentes contextos do cotidiano, como na natureza, na arte, na arquitetura e no design, evidenciando a interdisciplinaridade e a aplicabilidade da Matemática no mundo real.

Abordar a proporção áurea em sala de aula pode ampliar a visão dos estudantes sobre a Matemática, permitindo uma aproximação com sua história e sua relação com outras áreas do saber. Dessa forma, a pergunta norteadora que orienta este estudo é: de que forma a Proporção Áurea é apresentada nos livros didáticos de Matemática, mesmo não sendo um conteúdo oficialmente previsto no currículo?

A investigação pretende, então, destacar as potencialidades da proporção áurea como um elemento interdisciplinar, capaz de despertar o interesse dos estudantes ao relacionar a matemática com outras áreas do conhecimento. Portanto, o objetivo da pesquisa é buscar entender como o tema é introduzido nos livros didáticos de Matemática do 9º do Ensino Fundamental e preocupa-se em identificar os recursos, exemplos e aplicações utilizados. Ademais, procura estabelecer uma relação entre as instruções metodológicas destinadas ao professor, presentes no manual, e as atividades e conteúdos propostos aos alunos, de modo a compreender como esses dois elementos se articulam no processo de ensino-aprendizagem.

2 Fundamentação Teórica

Os livros didáticos constituem um dos principais recursos utilizados pelos professores no processo de ensino e aprendizagem, desempenhando o papel de mediador entre o conhecimento e os estudantes. Além de orientar o trabalho docente, eles podem ser considerados como tradutores do currículo escolar, visto que contém o conjunto de conteúdos programados para cada série e etapa da educação básica. Conforme Lajolo (1996, p. 4), “didático, então, é o livro que vai ser utilizado em aulas e cursos, que provavelmente foi escrito, editado, vendido e comprado, tendo em vista essa utilização escolar e sistemática”.

No Brasil, o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), criado em 1985:

É uma política pública executada pelo FNDE e pelo Ministério da Educação destinada a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias de forma sistemática, regular e gratuita. É um dos maiores programas de distribuição de livros do mundo. (Brasil, 2024)

Com a homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em 2017, documento que orienta a educação brasileira, surgiu a necessidade de adequação dos livros didáticos aprovados pelo PNLD às diretrizes estabelecidas pela Base. Segundo Franco (Silva Junior e Guimarães, p. 1028):

Um dos indícios da relevância dos materiais didáticos distribuídos pelo PNLD para a implementação da BNCC foi o edital para avaliação das novas coleções didáticas dos anos iniciais (2017). O documento exigiu a conformidade do conteúdo das obras didáticas com a versão do documento da Base que ainda estava em discussão.

Dessa forma, os livros aprovados atualmente pelo PNLD precisam contemplar as habilidades e competências previstas na BNCC, assegurando a articulação dos conteúdos com os objetivos de aprendizagem. Nesse sentido, a BNCC (BNCC, 2017, p. 298) cita que:

Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, [...] é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.

Nessa perspectiva, a Proporção Áurea pode constituir um conteúdo de grande potencial pedagógico, por articular matemática, história e interdisciplinaridade, além de aproximar o estudante de contextos reais e culturais. Ao analisar como os livros didáticos contemplam esse tema, busca-se verificar em que medida eles atendem às exigências da BNCC e contribuem para uma aprendizagem mais conectada com a realidade dos alunos.

3 Metodologia

Esta pesquisa adota uma abordagem qualitativa e foi desenvolvida sob a perspectiva da pesquisa documental. Segundo Goldenberg (2004, p. 14):

Na pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc.

De acordo com Severino (2013), quando se fala de metodologia qualitativa ou pesquisa qualitativa, não significa que esta é uma modalidade de pesquisa específica. Assim, é preferível dizer “abordagem qualitativa”, visto que conjuntos variados de metodologias de pesquisa podem adotar uma abordagem qualitativa, cada uma com suas próprias referências epistemológicas. Diante disso, a pesquisa documental será utilizada como metodologia de pesquisa, pois como definida por Severino (2013, p. 106):

No caso da pesquisa documental, tem-se como fonte documentos no sentido amplo, ou seja, não só de documentos impressos, mas sobretudo de outros tipos de documentos, tais como jornais, fotos, filmes, gravações, documentos legais. Nestes casos, os conteúdos dos textos ainda não tiveram nenhum tratamento analítico, são ainda matéria-prima, a partir da qual o pesquisador vai desenvolver sua investigação e análise.

Com base nisso, foram consultados uma seleção de livros didáticos de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, a fim de avaliar a abordagem da proporção áurea nesses livros. O desenvolvimento metodológico seguiu as seguintes etapas: levantamento e seleção dos livros didáticos que compuseram o estudo, sendo essas obras aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Em seguida, foi realizada uma leitura a fim de identificar a ocorrência da proporção áurea e a forma de apresentação do conceito, ou seja, se há uma contextualização histórica e interdisciplinar. Além disso, explorou-se quais recursos didáticos mobilizados, como imagens, exercícios, exemplos práticos, e aplicações em outras áreas do conhecimento.

As informações encontradas foram registradas a partir de um roteiro, que consta informações como: a série ao qual o livro se destina, ano de publicação, como a proporção áurea é apresentada nesse livro, quais são os capítulos que abordam o objeto matemático de estudo, e qual a metodologia utilizada na introdução do objeto matemático e desenvolvimento do conteúdo, permitindo observar padrões, recorrências e lacunas na abordagem do tema.

A análise dos dados ocorreu de forma descritiva e interpretativa, ao compreender não

apenas a forma como a proporção áurea aparece nos livros didáticos, mas também as potencialidades de seu uso como recurso pedagógico capaz de ampliar a visão dos estudantes.

4 Análise dos livros didáticos

Os materiais didáticos examinados correspondem a manuais do professor do 9º ano do Ensino Fundamental, todos aprovados pelo PNLD em 2022. A opção pela análise das versões destinadas ao professor se justifica pelo fato de que, além do conteúdo presente nos exemplares destinados aos estudantes, esses volumes trazem orientações pedagógicas, sugestões metodológicas e propostas de exploração didática dos temas.

A busca pelos materiais foi realizada por meio do Google, e todos os livros foram analisados em formato digital. Para a seleção, utilizou-se a barra de pesquisa com o termo “livros didáticos de Matemática – 9º ano”, e a análise consistiu em percorrer as páginas das obras a fim de identificar trechos em que a Proporção Áurea estivesse presente.

Foram selecionadas quatro coleções distintas de ampla circulação no contexto escolar brasileiro. O livro *Teláris Essencial – Matemática*, de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, foi publicado pela Editora Ática em sua primeira edição de 2022. O livro *Matemática e Realidade*, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, corresponde à décima edição de 2022, publicado pela Editora Saraiva. Também foi incluído na análise o livro *Matemática Bianchini*, de Edwaldo Bianchini, igualmente em sua décima edição de 2022, pela editora Moderna. Por último, o livro *A Conquista Matemática*, de José Ruy Giovanni Júnior, publicado pela Editora FTD em sua primeira edição de 2022.

4.1 Primeiro Livro

No primeiro livro didático analisado, *Teláris essencial* (Dante e Viana, 2022), a Proporção Áurea é apresentada no capítulo 3, denominado “Proporcionalidade e Juros”, de forma explícita, sendo chamada também de “divina proporção”. A abordagem inicia-se introduzindo o conceito a partir da ideia de divisão de um segmento em média e extrema razão, estabelecendo a dedução algébrica que leva ao número $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Há uma breve contextualização histórica, citando Euclides e a obra *Elementos*, bem como a relação da proporção áurea com conceitos de harmonia e beleza. Em termos de recursos didáticos, o livro apresenta imagens do retângulo áureo, fornece um passo a passo para sua construção geométrica, e explora a sequência de Fibonacci por meio de uma tabela que demonstra seu crescimento e sua relação com o número de ouro. Também são propostas atividades práticas, como a investigação do valor aproximado do número de ouro por meio de medições e cálculos, bem como exercícios envolvendo triângulos e retângulos de ouro, e suas definições.

Outro ponto relevante é a forma como o livro se dirige ao professor e ao aluno. Para o professor, há sugestões de atividades colaborativas, incentivando que os estudantes trabalhem em duplas e discutam a relação entre razão, proporção e construção das figuras. Para os alunos,

são fornecidos roteiros detalhados, desafios de construção, exercícios de fixação e questões contextualizadas, estimulando o raciocínio e a percepção da Matemática no cotidiano.

De maneira geral, o livro, ao introduzir o conceito de Proporção Áurea, traz sua definição e passos para obtê-la de forma detalhada e visual da apresentação, aliada às atividades de exploração e às referências históricas, o que favorece o engajamento do aluno e amplia sua visão sobre a aplicabilidade da Matemática.

4.2 Segundo Livro

Na análise do segundo livro didático, *Matemática e Realidade* (Iezzi, Dolce e Machado), a Proporção Áurea é apresentada no início da primeira unidade, que trata sobre “Números e operações com raízes”, como forma de introduzir o tema de maneira contextualizada e interdisciplinar. Na abertura da unidade, o material exibe imagens de obras como a *Última Ceia*, de Salvador Dalí e *Mona Lisa*, de Leonardo da Vinci, além de construções arquitetônicas, como o Parthenon, na Grécia, e a Fachada da Unité d’habitation, de Le Corbusier. O livro menciona que, essas obras apresentam relações entre suas dimensões associadas à razão áurea.

O livro faz uma exploração conceitual, explicando que a razão áurea é obtida ao dividir um segmento em média e extrema razão e apresentando a dedução algébrica que leva ao número de ouro $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Além da formalização matemática, são fornecidas informações históricas, mencionando Euclides, em sua obra *Os Elementos*, além de alguns renomados artista e arquitetos, destacando que a relação vem sendo estudada desde a Antiguidade, com aplicações na arte, na arquitetura e até na natureza.

O material também apresenta uma distinção clara entre as propostas para os estudantes e orientações ao professor. Para os alunos, há textos e ilustrações que abordam sobre a Proporção Áurea, suas origens, definição, aplicações e curiosidades. Já na parte do professor, são oferecidas sugestões de leitura complementar, textos de apoio e links para materiais que enriquecem a discussão, permitindo aprofundar o tema. Também oferece orientações didáticas, com o propósito de estimular os alunos a pesquisarem sobre o tema, além de propor que eles, em duplas, construam retângulos áureos e a espiral áurea e posteriormente apresentem à turma. Ademais, sugere a promoção de um trabalho interdisciplinar com os professores de Arte e História.

No geral, a abordagem do livro é completa e com um viés mais interdisciplinar e histórico, indo além da simples definição do conceito, pois se preocupa em trazer curiosidades e sugestões complementares de leitura. Ao integrar história, arte e matemática, e ao propor atividades investigativas e colaborativas, o material estimula a curiosidade dos alunos e os leva a perceber a presença da Matemática em contextos culturais e naturais.

4.3 Terceiro Livro

O terceiro livro didático, *Matemática Bianchini* (Bianchini, 2022), a Proporção Áurea é apresentada em dois momentos, sendo a primeira vez no Capítulo 1, intitulado “Números

reais”. O tema surge por meio de uma contextualização histórica e cultural, em que se destacam elementos da arte e da arquitetura, como o Parthenon, as pirâmides do Egito e a obra *Mona Lisa*, de Leonardo da Vinci. Em seguida, a explicação matemática é desenvolvida a partir da definição formal da razão áurea, utilizando expressões algébricas com radicais e frações.

O livro também relaciona a proporção áurea à sequência de Fibonacci, no problema dos coelhos de Fibonacci, explorando sua dedução numérica e propondo exercícios que envolvem cálculos de razões. Do ponto de vista metodológico, o livro propõe atividades individuais e coletivas, como o espaço “Agora é com você”, que convida os estudantes a trabalhar em grupo, refletir sobre a sequência de Fibonacci e discutir aplicações da proporção áurea. Já o manual do professor orienta o aproveitamento pedagógico do tema, destacando a importância da interdisciplinaridade e sugerindo estratégias para explorar a razão áurea como recurso para aproximar a Matemática do dia a dia dos alunos.

Ainda neste livro, a proporção áurea aparece no Capítulo 4, que trata de Proporcionalidade em geometria. O conceito é introduzido dentro do tópico de Razão entre dois segmentos de reta, em um box explicativo intitulado “Uma razão de ouro”, que retoma a ideia histórica de que os gregos, cerca de 500 anos antes de Cristo, já estudavam a divisão em média e extrema razão no pentágono regular.

O texto apresenta a definição matemática da proporção áurea, seguida de exemplos em que aparece tanto na natureza quanto na arquitetura e nas medidas do corpo humano. Também explora a construção geométrica do retângulo áureo e a explicação matemática formal é desenvolvida por meio de equações quadráticas, levando à dedução algébrica do valor aproximado de 1,618.

No que se refere aos recursos didáticos, há propostas de atividades em que os alunos devem construir retângulos áureos de diferentes maneiras, seja com dobraduras, seja com régua e compasso. Assim, há uma integração entre a fundamentação teórica e as aplicações práticas, demonstrando como a razão áurea pode ser observada em diferentes contextos.

O manual do professor recomenda a exploração do tema e orientações para estimular os alunos a apresentarem suas descobertas em sala de aula, ao sugerir o desenvolvimento de atividades que utilize softwares de geometria dinâmica, reforçando a dimensão investigativa e colaborativa da atividade. De forma geral, nesses dois capítulos, a obra combina aspectos históricos, culturais e matemáticos, equilibrando a teoria com práticas investigativas, e busca tornar a proporção áurea um recurso para o processo de ensino e aprendizagem.

4.4 Quarto livro

No quarto e último livro didático analisado, *A Conquista Matemática* (Giovanni Júnior, 2022), a Proporção Áurea é abordada no Unidade 5, que trata de Proporção e Semelhança, em um breve tópico cujo título é “Segmento áureo”. A apresentação conduz naturalmente à dedução algébrica da proporção áurea, por meio da resolução de uma equação quadrática, evidenciando o número de ouro e um segmento áureo.

A explicação é acompanhada de um esquema visual que ilustra a divisão do segmento e, posteriormente, de uma fotografia do Parthenon em Atenas, onde a proporção áurea é destacada, não só em elementos arquitetônicos, mas também em outras áreas. Ademais, deixa de sugestão para os estudantes um vídeo que mostra as medidas de partes do corpo humano que apresentam razões próximas do número de ouro. Assim, o livro combina o desenvolvimento matemático formal com uma contextualização cultural, aproximando teoria e aplicação prática.

O manual do professor apresenta referências e materiais complementares, como artigos e vídeos que exploram a presença da proporção áurea na história da arte e da ciência. De maneira geral, a apresentação da proporção áurea neste livro destaca-se pela clareza da dedução matemática formal e pela contextualização com a arte.

5 Análise/Conclusão

A análise dos quatro livros didáticos revela que a Proporção Áurea é abordada de forma recorrente, mas com enfoques distintos. De modo geral, há convergência no tratamento conceitual do tema, uma vez que todos os materiais partem da definição formal da divisão de um segmento em média e extrema razão, apresentando a dedução algébrica que conduz ao número $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Além disso, todas as coleções associam a razão áurea a elementos históricos e culturais, como a obra *Os Elementos* de Euclides, e exploram sua presença em construções arquitetônicas, sendo o Partenon a mais recorrente entre elas. Essa convergência indica que os autores compreendem o potencial do tema para despertar o interesse dos estudantes ao mostrar a Matemática em contextos reais e interdisciplinares.

Entretanto, observam-se diferenças quanto à profundidade da abordagem, à integração interdisciplinar e ao tipo de recurso didático empregado. O *Teláris Essencial* destaca-se pela apresentação visual e pelo detalhamento das etapas de construção geométrica, propondo uma sequência didática clara e exercícios de fixação. O *Matemática e Realidade* é o que mais enfatiza a dimensão interdisciplinar, trazendo exemplos de obras de arte e arquitetura, além de sugerir parcerias com professores de Arte e História, o que amplia o caráter cultural e investigativo do conteúdo. Já o *Matemática Bianchini* apresenta uma abordagem dupla, retomando o tema em mais de um capítulo, o que permite uma revisitação do conceito em contextos distintos (números reais e proporcionalidade), além de sugerir o uso de tecnologias, como softwares de geometria dinâmica, reforçando a aprendizagem ativa. Por outro lado, *A Conquista Matemática* dedica menos espaço ao tema, porém se destaca pela clareza na dedução algébrica, complementada por materiais multimídia que incentivam a continuidade do estudo para além do livro.

No que se refere às orientações para o professor, há consenso na valorização de atividades colaborativas e investigativas, mas variam quanto ao suporte oferecido. *Teláris Essencial* e *Matemática e Realidade* fornecem sugestões de atividades em dupla, enquanto *Matemática Bianchini* e *A Conquista Matemática* se concentram mais em propor desafios e projetos que

conduzem o estudante à exploração autônoma e à apresentação de resultados em sala de aula.

Em síntese, pode-se concluir que os quatro livros analisados convergem na apresentação do conceito de Proporção Áurea e em sua relevância cultural, mas divergem na profundidade da exploração e nos recursos didáticos utilizados. Enquanto alguns enfatizam a interdisciplinaridade e a contextualização histórica (como *Matemática e Realidade*), outros privilegiam a construção geométrica e o aspecto investigativo (como *Teláris Essencial* e *Matemática Bianchini*). Já *A Conquista Matemática* apresenta uma abordagem mais sucinta, porém clara, ideal para revisões ou introduções rápidas ao tema.

Essas diferenças mostram que, embora o conteúdo seja comum, as coleções oferecem caminhos pedagógicos distintos que podem atender a perfis variados de professores e turmas. Para práticas docentes, isso sugere que a escolha do livro didático pode privilegiar determinadas competências, de acordo com os objetivos de ensino e o perfil dos estudantes.

Referências

- BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática Bianchini: 9º ano*. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2022.
- BNCC. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: SEE, 2017c. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc>. Acesso em: 21 ago. 2025.
- BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Brasília: MEC/FNDE, 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/fnde/pt-br/aceso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programasdo-livro>. Acesso em: 21 ago. 2025.
- DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. *Teláris Essencial – Matemática: 9º ano*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2022.
- FRANCO, Aléxia Pádua; SILVA JUNIOR, Astrogildo Fernandes da; GUIMARÃES, Selva. Saberes históricos prescritos na BNCC para o ensino fundamental: tensões e concessões. *Ensino em ReVista*, [S. l.], v. 25, n. 4, p. 1016–1035, 2018. DOI: 10.14393/ER-v25n3e2018-10. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/view/46455>. Acesso em: 21 ago. 2025.
- GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. *A Conquista da Matemática: 9º ano*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2022.
- GOLDENBERG, Miriam. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Record, 2004.
- IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. *Matemática e Realidade: 9º ano*. 10. ed. São Paulo: Saraiva, 2022.
- SEVERINO, Antônio Joaquim. *Metodologia do trabalho científico*. Local de publicação: Cortez Editora, 2013.



A Prova dos Noves ou Noves Fora

Silvia Aparecida de Jesús

ICENP/UFU

silviaaparecida@ufu.br

Alisson Rafael Aguiar Barbosa

ICENP/UFU

aliagua@ufu.br

Resumo. A prova dos nove, uma técnica de verificação de cálculos, era um procedimento amplamente ensinado e valorizado nas escolas e famílias do século passado. Conhecida também como “regra dos nove fora”, era uma ferramenta essencial para validar os resultados das quatro operações aritméticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Sua popularidade cresceu em uma época em que o acesso a calculadoras era limitado, tornando-se uma habilidade da qual avós e comerciantes se orgulhavam de dominar. Embora tenha sido um conteúdo fundamental nos livros didáticos e no antigo ensino primário, a prática da prova dos nove caiu em desuso com a popularização das calculadoras. Este texto explora a sua relevância histórica, a forma como era abordada nos materiais didáticos e as razões para o seu declínio, mostrando como a evolução tecnológica impactou diretamente as práticas educacionais.

Palavras-chave: Prova dos nove. Regra dos nove fora; Calculadoras; Evolução tecnológica.

1 Introdução

No século passado, a prova dos nove era uma técnica de verificação de cálculos amplamente ensinada nas escolas e valorizada pelas famílias. Conhecida como “prova dos nove” ou “regra dos nove fora”, era um procedimento matemático do qual avós e comerciantes se orgulhavam de dominar. Era utilizada para validar o resultado das quatro operações aritméticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

A prova dos nove fez parte do conteúdo de livros didáticos e livretos de tabuadas, sendo considerada por diversos autores como uma das provas de verificação de cálculo escrito mais utilizadas. Sua popularidade cresceu em uma época em que não existiam calculadoras em sala de aula, servindo como uma ferramenta essencial para que os alunos conferissem suas contas. Essa prática era ensinada no antigo ensino primário, o que hoje corresponde ao ensino fundamental.

Com o advento das calculadoras, o ensino e a utilização da prova dos nove caíram em desuso. A facilidade e a rapidez proporcionadas pelas ferramentas digitais tornaram o método manual menos relevante para a verificação de resultados. Cabe observar que as calculadoras

eletrônicas se tornaram acessíveis a partir dos anos 1970, e seu uso em larga escala nas escolas consolidou-se entre o final do século XX e o início do século XXI.

Uma análise de livros didáticos utilizados na época revela que a prova dos nove era abordada de diferentes maneiras. Em muitos casos, os autores a definiam como uma prova de verificação das operações fundamentais ou a associavam aos conceitos de divisibilidade.

Algumas obras apresentavam a prova dos nove apenas de forma ilustrada, sem a devida explicação teórica. Poucos autores explicavam a falta de confiabilidade intrínseca a esse método, que, embora útil, não garante a correção de um resultado. Por exemplo, se a soma dos algarismos do resultado estiver incorreta, a prova dos nove pode ainda assim passar.

Em muitos livros, a simbologia da prova dos nove era usada nos exemplos numéricos, mas poucos continham exercícios específicos para a prática dessa técnica. Apenas sete obras analisadas apresentavam exercícios referentes a este conteúdo, o que sugere que, em grande parte, o método era ensinado de forma mais superficial.

A prova dos nove, embora tenha perdido seu lugar nos currículos escolares atuais, permanece como um valioso exemplo da evolução das práticas de ensino e da maneira como a tecnologia impacta a educação.

2 Noves fora

2.1 O que é o “noves fora” de um número?

Quando dizemos **tirar os nove fora** de um número natural N , significa subtrair o maior múltiplo de 9 nele contido. Isso é equivalente a buscar o resto da divisão de N por 9.

Uma regra prática para achar os **noves fora** de N é somar seus algarismos e subtrair do resultado o maior múltiplo de 9 nele contido. Vejamos alguns exemplos:

- a) $552 \rightarrow 5 + 5 + 2 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$. Observe que $12 - 9 = 3$, nove fora 3, isto é, o resto da divisão de 12 por 9 é 3, e notamos que o resto da divisão de 552 por 9 é 3.
- b) $1257 \rightarrow 1 + 2 + 5 + 7 = 15 \rightarrow 1 + 5 = 6$. Observe que $15 - 9 = 6$, “noves fora 6”, isto é, o resto da divisão de 15 por 9 é 6, e notamos que o resto da divisão de 1257 por 9 é 6.

Os dois exemplos acima nos levam a intuir que a relação entre a soma dos algarismos de um número natural N quando dividido por 9 e o resto da divisão de N por 9 é o mesmo. De fato, mostraremos esse resultado nas proposições abaixo:

Proposição 1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ é múltiplo de 9.

Demonstração. A demonstração se dará por indução sobre n . Se $n = 0$, então $10^0 - 1 = 0$, que claramente é divisível por 9. Suponha que o resultado seja válido para $n = k \in \mathbb{N}$, isto é, $10^k - 1$ é múltiplo de 9. Agora, para $n = k + 1$, temos

$$10^{k+1} - 1 = 10 \cdot 10^k - 1 = 10^k(9 + 1) - 1 = 9 \cdot 10^k + 10^k - 1.$$

Como $9 \cdot 10^k$ é múltiplo de 9 e por hipótese de indução $10^k - 1$ é múltiplo de 9, o resultado fica demonstrado. $\square$

Proposição 2. *Seja $N \in \mathbb{N}$, então N e a soma de seus algarismos quando divididos por 9 deixam o mesmo resto.*

Demonstração. Considere $N = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_r 10^r$, com $0 \leq a_i \leq 9$ e $i = 1, \dots, r$. Seja $s = \sum_{i=1}^r a_i$. Pelo Algoritmo da Divisão, Teorema 1, existem números naturais q, r, r_1 e q_1 tais que

$$N = 9q + r \quad \text{com } 0 \leq r < 9$$

e

$$s = 9q_1 + r_1 \quad \text{com } 0 \leq r_1 < 9.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} N &= a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_r 10^r \\ &= a_0 + a_1(10 - 1 + 1) + a_2(10^2 - 1 + 1) + \dots + a_r(10^r - 1 + 1) \\ &= a_1(10 - 1) + a_2(10^2 - 1) + \dots + a_r(10^r - 1) + a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_r. \end{aligned}$$

Assim, se compreende $x = a_1(10 - 1) + a_2(10^2 - 1) + \dots + a_r(10^r - 1)$, segue da Proposição 1 que $x = 9q_2$, com $q_2 \in \mathbb{N}$. Então

$$N = 9q + r = x + s = 9q_2 + 9q_1 + r_1 = 9(q_1 + q_2) + r_1.$$

Segue do Algoritmo da Divisão que $r = r_1$. $\square$

Teorema 1 (Algoritmo da Divisão). *Dados dois inteiros a e b , com $a > 0$, então existem dois inteiros, q e r , tais que*

$$b = aq + r,$$

em que $0 \leq r < a$. Além disso, se $a > 0$ os inteiros q e r são únicos.

2.2 Prova dos Noves

Nesta sessão aplicaremos os nove-fora de números naturais para verificar se os resultados de operações aritmética envolvendo tais números estão corretos. Essa técnica é conhecida como Prova dos Noves.

Sejam a, b, c e $d \in \mathbb{N}$ e $q_1, q_2, q_3, q_4, r_1, r_2, r_3$ e $r_4 \in \mathbb{N}$ tais que $a = 9q_1 + r_1$, $b = 9q_2 + r_2$, $c = 9q_3 + r_3$ e $d = 9q_4 + r_4$ e $0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 9$.

Observação 1. *Pelo que discorremos na sessão anterior, podemos fazer as seguintes considerações:*

- A sentença $a = 9q_1 + r_1$ significa a **noves fora** r_1 .

- A sentença $b = 9q_2 + r_2$ significa b **noves fora** r_2 .
- A sentença $c = 9q_3 + r_3$ significa c **noves fora** r_3 .
- A sentença $d = 9q_4 + r_4$ significa d **noves fora** r_4 .

A partir de agora vamos desenvolver o método da prova dos nove para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

2.2.1 Adição

Considerando $a = 9q_1 + r_1$, $b = 9q_2 + r_2$ e $c = 9q_3 + r_3$. Se $a + b = c$, então $9(q_1 + q_2) + r_1 + r_2 = 9q_3 + r_3$. Reescrevendo, $(r_1 + r_2) - 9(q_3 - q_1 - q_2) = r_3$. Isso nos diz que os nove fora da soma dos nove fora das parcelas são iguais ao nove fora da soma. Isto é, o nove fora de $r_1 + r_2$ é igual a r_3 .

Apresentamos um esquema abaixo que auxiliará na compreensão do método.

r_1	Noves Fora de
	$r_1 + r_2$
r_2	r_3

Exemplo 1. Como exemplo consideramos a seguinte operação soma:

$$78 + 5 = 83.$$

- $78 \rightarrow 7 + 8 = 15$, então 15 **noves fora 6**, pois o resto da divisão de 15 por 9 é 6. Isto é, $r_1 = 6$;
- $5 \rightarrow 5$, então 5 **noves fora 5**, pois o resto da divisão de 5 por 9 é 5. Isto é, $r_2 = 5$;
- $83 \rightarrow 8 + 3 = 11$, então 11 **noves fora 2**, pois o resto da divisão de 11 por 9 é 2. Isto é, $r_3 = 2$.
- Como $r_1 + r_2 = 11$, então 11 **noves fora 2**, pois o resto da divisão de 11 por 9 é 2.

Então, aplicando o esquema para esse exemplo, teremos:

6	2
5	2

2.2.2 Subtração

Considerando a operação $a - b = c$, então $9q_1 + r_1 - (9q_2 + r_2) = 9q_3 + r_3$. Reescrevendo a identidade anterior, obtemos $r_3 + r_2 - 9(q_1 - q_2 - q_3) = r_1$, isso nos diz que o nove fora do minuendo é igual ao nove fora do subtraendo e do resto, em outras palavras, o nove fora de $r_2 + r_3$ é igual a r_1 .

Apresentamos um esquema abaixo que auxiliará na compreensão do método para a subtração.

r_2	Noves Fora de
	$r_2 + r_3$
r_3	r_1

Exemplo 2. Como exemplo consideramos a seguinte operação de subtração $324 - 122 = 202$, temos:

- $324 \rightarrow 3 + 2 + 4 = 9$, então 9 **noves fora 0**, pois o resto da divisão de 9 por 9 é 0. Isto é, $r_1 = 0$.
- $122 \rightarrow 1 + 2 + 2 = 5$, então 5 **noves fora 5**, pois o resto da divisão de 5 por 9 é 5. Isto é, $r_2 = 5$.
- $202 \rightarrow 2 + 0 + 2 = 4$, 4 **noves fora 4**, pois o resto da divisão de 4 por 9 é 4. Isto é, $r_3 = 4$.
- Como $r_2 + r_3 = 9$, então 9 **noves fora 0**, pois o resto da divisão de 9 por 9 é 0.

Então, aplicando o esquema para esse exemplo, teremos:

5	0
4	0

2.2.3 Multiplicação

Considerando a operação $a \cdot b = c$, então $(9q_1 + r_1) \times (9q_2 + r_2) = 9q_3 + r_3$. Reescrevendo essa expressão temos $r_1 \times r_2 - 9(q_3 - 9q_1q_2 - q_2r_1 - q_1q_2) = r_3$. Isso mostra que o nove fora do produto dos nove fora dos fatores é igual ao nove fora do produto, isto é, o nove fora de $r_1 \times r_2$ é igual a r_3 . Apresentamos um esquema abaixo que auxiliará na compreensão do método para a multiplicação.

r_1	Noves Fora de
	$r_1 \times r_2$
r_2	r_3

Exemplo 3. Considerando a operação $52 \times 15 = 780$, temos:

- $52 \rightarrow 5 + 2 = 7$, então 7 *noves fora* 7, pois o resto da divisão de 7 por 9 é 7. Isto é, $r_1 = 7$.
- $15 \rightarrow 1 + 5 = 6$, então 6 *noves fora* 6, pois o resto da divisão de 6 por 9 é 6. Isto é, $r_2 = 6$.
- $780 \rightarrow 7 + 8 + 0 = 15$, então 15 **noves fora 6**, pois o resto da divisão de 15 por 9 é 6. Isto é, $r_3 = 6$.
- Como $r_1 \times r_2 = 42$, então 42 **noves fora 6**, pois o resto da divisão de 42 por 9 é 6.

Então, aplicando o esquema para esse exemplo, teremos:

7	6
6	6

2.2.4 Divisão

Pelo Algoritmo da Divisão, podemos escrever a seguinte sentença $a = b \cdot c + d$, em que $0 \leq d < b$, então $9q_1 + r_1 = (9q_2 + r_2) \cdot (9q_3 + r_3) + (9r_4 + r_4)$. Reescrevendo a igualdade anterior

$$r_2 \cdot r_3 + r_4 - 9(q_1 - 9q_2q_3 - q_2r_3 - q_3r_2 + q_4) = r_1.$$

Isso mostra que o *noves fora* do produto dos *noves fora* do divisor pelo *noves fora* do quociente somado com o *noves fora* do resto é igual ao *noves fora* do dividendo, isto é, o *noves fora* de $(r_2 \cdot r_3 + r_4)$ é igual a r_1 .

Apresentamos um esquema abaixo que auxiliará na compreensão do método para a divisão.

r_2	Noves Fora
	$r_2 \cdot r_3 + r_4$
r_3	r_1

Exemplo 4. Aplicando o Algoritmo da divisão, temos $125 = 34 \times 3 + 23$. Temos que:

- $125 \rightarrow 1 + 2 + 5 = 8$, então 8 *noves fora* 8, pois o resto da divisão de 8 por 9 é 8. Isto é, $r_1 = 8$;
- $34 \rightarrow 3 + 4 = 7$, então 7 *noves fora* 7, pois o resto da divisão de 7 por 9 é 7. Isto é, $r_2 = 7$;

- $3 \rightarrow 3$, então 3 noves fora 3, pois o resto da divisão de 3 por 9 é 3. Isto é, $r_3 = 3$;
- $23 \rightarrow 2 + 3 = 5$, então 5 noves fora 5, pois o resto da divisão de 5 por 9 é 5. Isto é, $r_4 = 5$.

Dessa forma, usando o esquema acima, e observando que $r_2 \cdot r_3 + r_4 = 26$ e que $26 \rightarrow 2 + 6 = 8$, isto é, 26 noves fora 8, teremos:

7	8
3	8

Observação 2. Com relação a Prova dos Noves vale observar algumas questões:

- Primeiro, é um método de verificação para as quatro operações aritméticas, soma, subtração, multiplicação e divisão. Esse método consiste em subtrair o maior múltiplo de nove que um determinado número natural contiver ou determinar o resto da divisão por nove deste número natural, por isso o nome **Prova dos Nove ou Noves Fora**.
- Esse método foi ensinado largamente e por muitos anos nas salas de aula, além de comerciantes também fazerem uso desta técnica, era comum donos de mercadinho ou pessoas em outras situações fazerem uso desta técnica.
- A verificação da **prova dos noves** consiste em obter valores iguais do lado direito do esquema prático, no caso de o resultado obtido na operação estar correto. Aqui cabe uma observação importante, da maneira em que são efetuados os cálculos, podemos incorrer em erros. Vamos mostrar isso com o exemplo a seguir:

Exemplo 5. Considere a seguinte operação

$$313 \times 6 = 1878.$$

Observe que o resultado é correto, mas supomos que por alguma distração ao invés de 1878 escrevemos 1887. Vamos aplicar a prova dos nove para esse valor.

- $313 \rightarrow 3 + 1 + 3 = 7$, então 7 noves fora 7, pois o resto da divisão de 7 por 9 é 7. Isto é, $r_1 = 7$.
- $6 \rightarrow 6$, então 6 noves fora 6, pois o resto da divisão de 6 por 9 é 6. Isto é, $r_2 = 6$.
- $1878 \rightarrow 1 + 8 + 7 + 8 = 24$, então 24 noves fora 6, pois o resto da divisão de 24 por 9 é 6. Isto é, $r_3 = 6$.
- Como $r_1 \times r_2 = 42$ e $42 \rightarrow 4 + 2 = 6$, isto é, 42 noves fora 6, teremos:

7	6
6	6

Isso mostra que a verificação através do método da prova dos nove pode nos induzir ao erro. Observamos que isso aconteceu pelo fato de que esse método não detecta erros provindos da inversão dos algarismos do resultado, o que ocorre, pois a ordem das parcelas não altera a soma. Isso nos indica que a prova dos nove é efetiva, como resultado válido, em indicar quando erro no resultado da operação realizada e não podemos afirmar que o resultado está correto.

Poderíamos perguntar o porquê a prova dos nove e não a prova dos onze, ou qualquer outro valor? Não existe nenhuma restrição, a questão é essencialmente de ordem prática, já que nosso sistema numérico é posicional na base dez, e dessa forma obter o resto da divisão por nove, neste caso, é obtido mais facilmente. Em outras palavras, usamos a prova dos nove trabalhamos na base 10, e possivelmente podemos mostrar os resultados acima para outras bases.

3 Análise e Conclusão

O método da prova dos nove foi bastante popular, especialmente antes da popularização das calculadoras. Era uma técnica ensinada nas escolas e utilizada por estudantes e profissionais para fazer uma verificação rápida de cálculos manuais.

Sua popularidade vinha da sua simplicidade e rapidez. Você não precisava refazer a conta inteira para ter uma ideia se o resultado estava no caminho certo. Bastava somar os algarismos, o que era um processo mental muito mais fácil do que, por exemplo, refazer uma multiplicação ou divisões complexas.

Atualmente, com calculadoras em celulares e computadores, o método perdeu grande parte de sua relevância. No entanto, ele ainda é um excelente exercício para o raciocínio mental e lógico, ajudando a entender as propriedades dos números e a lógica por trás da aritmética.

A matemática por trás da prova dos nove tem suas raízes bem mais antigas que a álgebra moderna, ela e se baseiam em conceitos de aritmética modular, que é um ramo da teoria dos números.

A prova dos nove funciona porque se baseia no princípio de congruência, especificamente na congruência módulo 9. Em termos simples, dois números são congruentes módulo 9 se eles têm o mesmo resto quando divididos por 9. A prova dos nove usa o fato de que um número e a soma de seus algarismos têm o mesmo resto quando divididos por 9.

Portanto, a prova dos nove é um exemplo clássico da aplicação da teoria dos números e da aritmética modular, não da álgebra moderna. A álgebra moderna, por outro lado, estuda

estruturas abstratas como grupos, anéis e corpos, um campo de estudo que se desenvolveu muito mais tarde.

As pessoas costumam confundir a prova dos nove com a “prova real” porque ambas têm o mesmo objetivo: verificar se uma conta está correta. No entanto, elas são métodos fundamentalmente diferentes em sua abordagem e garantia de resultado. A principal diferença é a seguinte:

- A prova real é um método que usa a “operação inversa” para verificar o cálculo.
- A prova dos nove é um método que usa o conceito de aritmética modular (resto da divisão por 9).

A prova real, se feita corretamente, garante a exatidão da operação aritmética feita. Se o resultado da “operação inversa” for confirmado, a operação original está correta.

Prova dos Nove (Aritmética Modular), como já explanado, a prova dos nove é um atalho que se baseia nos restos da divisão por 9. É um método rápido, mas que não garante exatidão. Ele pode falhar em detectar erros de transposição de algarismos ou múltiplos de 9, pois esses erros não alteram o resto da divisão por 9.

Portanto, a confusão entre os dois métodos se dá por serem vistos como ferramentas para a mesma finalidade. Além disso, no ensino fundamental, ambos são apresentados como “provas” para verificar a correção de uma conta. A principal diferença é a “rigidez do resultado”: a prova real “é definitiva”, enquanto a prova dos nove “é apenas um indicativo”.

A prova dos nove é um teste de “consistência”, enquanto a prova real é um teste de “verificação direta”. Ambos os métodos são úteis, mas a prova real é a que oferece a “certeza absoluta”.

Referências

- BÉZOUT, Étienne. **Elementos de Arithmetica**. Coimbra: Real Officina da Universidade, 1784.
- CAJORI, Florian. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.
- CHOPPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549–566, set./dez. 2004.
- DASCAL, Marcelo. **Gottfried Wilhelm Leibniz: the art of controversies**. Dordrecht: Springer, 2008.
- DATTA, Bibhutibhusan; SINGH, Avadhesh Narayan. **History of hindu mathematics**. New York: Asia Publishing House, 1962.
- LACAVA, Alana Godoy. **Um estudo sobre diferentes abordagens da prova dos nove presentes em livros didáticos de aritmética (1890–1970)**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – UFSC, Florianópolis, 2017.

LACAVA, A. G.; COSTA, D. A. A prova dos nove e o caso da Arithmetica Primaria de Cezar Pinheiro. **REVEMAT**, Florianópolis/SC, v. 11, n. 1, p. 54–73, 2015.

MIRANDA, Antônio. **Carlos Góes**. Disponível em: <https://bit.ly/2NKTgVz>. Acesso em: 15 nov. 2018.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Livros didáticos como fontes para a escrita da história da matemática escolar**. Guarapuava: SBHMat, 2007.



Aspectos matemáticos básicos da criptografia quântica

Guilherme Martins Ferreira

Universidade Federal de Uberlândia

guilherme.ferreira4@ufu.br

Patrícia Borges dos Santos

Universidade Federal de Uberlândia

patriciab@ufu.br

Resumo. A criptografia quântica surge como aplicação direta da mecânica quântica à segurança da informação, distinguindo-se dos métodos clássicos por oferecer garantias baseadas em leis físicas fundamentais, e não apenas em problemas computacionais difíceis. Nesse novo paradigma, conceitos como superposição e o teorema da não clonagem tornam-se essenciais para assegurar a inviolabilidade da comunicação. O presente trabalho tem como propósito expor os fundamentos matemáticos que sustentam a criptografia quântica, com destaque para a estrutura algébrica dos estados e operações quânticas. Para isso, são apresentados o espaço de Hilbert, onde os qubits são formalmente definidos, a notação Bra-Ket, amplamente utilizada na mecânica quântica, e os operadores responsáveis por descrever a evolução dos sistemas, fornecendo a base rigorosa necessária à compreensão de algoritmos e protocolos, como o BB84. Inspirado na obra de Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, este texto busca aliar precisão matemática e clareza expositiva, oferecendo um guia introdutório voltado a estudantes e entusiastas que já tenham familiaridade com álgebra linear e queiram aprofundar-se nos princípios formais dessa tecnologia emergente.

Palavras-chave: Criptografia quântica; Protocolo BB84; Computação quântica.

1 Introdução

A criptografia quântica representa uma aplicação direta dos princípios da mecânica quântica à segurança da informação. Em contraste com os métodos clássicos, cujo funcionamento se baseia em problemas computacionais difíceis de resolver, os protocolos quânticos garantem segurança fundamentada na física quântica. Isso implica um paradigma totalmente novo, onde conceitos como superposição e o teorema da não clonagem se tornam centrais.

O objetivo deste trabalho é apresentar os aspectos matemáticos essenciais que fundamentam a criptografia quântica, com ênfase na estrutura algébrica dos estados quânticos e operações sobre eles. Neste trabalho, definiremos o espaço de Hilbert, onde os qubits são definidos, a notação Bra-Ket utilizada na mecânica quântica, e os operadores que modelam a dinâmica dos sistemas. Esses conceitos fornecem a base formal necessária para entender algoritmos e protocolos como o BB84.

Este texto é fortemente baseado na obra de Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* e visa tratar os elementos com precisão matemática, servindo como um guia introdutório para estudantes e entusiastas que já possuem alguma familiaridade com álgebra linear e desejam explorar as bases formais que sustentam essa tecnologia emergente.

2 Desenvolvimento

2.1 Definições preliminares

Vamos dar início apresentando a definição do espaço de Hilbert para logo em seguida definirmos o que vem a ser um qubit.

Definição 1. *O Espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$.*

Um qubit então é um elemento do espaço $\mathcal{H}^2$, cuja base escolhida será $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ (lê-se $|\cdot\rangle$ como "ket"), também chamada de base computacional. Essa notação também é conhecida como *Bra-Ket*. Com isso, todo qubit é fruto da combinação linear da base, ou seja, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ com α e β números complexos satisfazendo $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. (GRIFFITHS, 2014)

Ainda, podemos dizer que $|\psi\rangle$ é uma superposição dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Em forma matricial: $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, onde α e β cumprem a condição anterior. Essa notação $|\cdot\rangle$

Dizemos que $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$ são as amplitudes de probabilidade do qubit colapsar para o seu respectivo estado, em linguagem mais simples, existe uma chance $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$ do qubit ser $|0\rangle$ e $|1\rangle$, respectivamente. Aqui o qubit mostra-se um objeto de natureza probabilística, diferente de seu equivalente clássico (o bit) que é completamente determinístico.

Certamente que para lidar com problemas mais complexos precisamos lidar com múltiplos qubits; para isso, usa-se o produto tensorial.

Definição 2. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo F de dimensões m e n , respectivamente. O produto tensorial $V \otimes W$ é um espaço vetorial de dimensão mn , cujos elementos $v \otimes w$ são combinações lineares de $v \in V$ e $w \in W$, satisfazendo:*

1. $z(v \otimes w) = (zv) \otimes w = v \otimes (zw) \forall z \in F, v \in V, w \in W$
2. $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \forall v_1, v_2 \in V, w \in W$
3. $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \forall v \in V, w_1, w_2 \in W$

(LOMONACO JR., 2001, p. 71)

Usamos uma notação compacta e que evidencia o paralelo com os *bits* clássicos, por exemplo, o estado $|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$. De maneira análoga, podemos estender essa noção para o caso com n qubits como se segue.

$$\begin{aligned}
 |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle &= |00 \dots 0\rangle = |0\rangle^{\otimes n} \\
 |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \cdots \otimes |1\rangle &= |00 \dots 1\rangle \\
 &\vdots \\
 |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes \cdots \otimes |1\rangle &= |01 \dots 1\rangle \\
 |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes \cdots \otimes |1\rangle &= |11 \dots 1\rangle = |1\rangle^{\otimes n}
 \end{aligned}$$

Exemplo 1. Considere dois qubits $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ e $|\omega\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$. O produto tensorial $|\psi\rangle \otimes |\omega\rangle = (\alpha\gamma)|00\rangle + (\alpha\delta)|01\rangle + (\beta\gamma)|10\rangle + (\beta\delta)|11\rangle$ fez surgir quatro estados distintos.

Em um sistema com n qubits existem 2^n estados possíveis e a superposição deles é dada pela seguinte expressão:

$$|\phi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle = \alpha_0 |00 \dots 0\rangle + \alpha_1 |00 \dots 1\rangle + \cdots + \alpha_{2^n-1} |11 \dots 1\rangle$$

onde cada *ket* contém a representação binária do i -ésimo número decimal com n qubits (ex. $(4)_{10} = (00100)_2$, se $n = 5$) e $\sum_{i=0}^{2^n-1} |\alpha_i|^2 = 1$.

Observação 1. Embora possamos considerar um qubit como um estado, reservamos o nome 'qubit' para as combinações lineares de $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ que satisfazem a condição imposta sobre seus coeficientes. Às demais combinações lineares das bases dos espaços $\mathcal{H}^{2^k} = \mathcal{H}^2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}^2$ com $k > 1$ damos o nome de 'estado'.

2.2 Operadores

Os operadores têm um papel importante, pois eles irão realizar manipulações sobre os qubits para construir circuitos e algoritmos quânticos. Seguem-se as definições de operadores lineares unitários e hermitianos.

Definição 3. Um operador linear U é unitário quando $U^\dagger = U^{-1}$, onde $U^\dagger$ é o conjugado complexo transposto de U

Definição 4. Um operador linear U é hermitiano quando $U^\dagger = U$, onde $U^\dagger$ é o conjugado complexo transposto de U

2.3 Portas quânticas

As portas quânticas são análogas às portas lógicas da computação clássica. Elas são operadores unitários hermitianos; dessas, três recebem maior destaque: as portas X , Y e Z , conhecidas como portas de Pauli, em referência ao físico Wolfgang Pauli.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Podemos verificar que são unitárias e hermitianas:

$$X^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X = (-1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = X^{-1}$$

$$Y^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = Y = (-1) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = Y^{-1}$$

$$Z^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Z = (-1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Z^{-1}$$

Além destas, temos uma outra porta que é crucial, a porta Hadamard, que coloca um estado em superposição.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Z)$$

Algumas propriedades dessa porta são:

1. $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle \iff H|+\rangle = |0\rangle$
2. $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle \iff H|-\rangle = |1\rangle$

2.4 Teorema da não-clonagem

Teorema 1. *É impossível criar uma cópia independente e idêntica de um estado quântico arbitrário desconhecido.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{C}$ seja o operador de cópia, então $\mathcal{C}|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$. Sejam $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ estados arbitrários, então $\mathcal{C}|\alpha\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle$ e $\mathcal{C}|\beta\rangle = |\beta\rangle \otimes |\beta\rangle$. Assim,

$$\mathcal{C}(|\alpha\rangle) + \mathcal{C}(|\beta\rangle) = |\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle + |\beta\rangle \otimes |\beta\rangle \tag{1}$$

$$\mathcal{C}(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) \otimes (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) \tag{2}$$

$$\therefore \mathcal{C}(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) \neq \mathcal{C}(|\alpha\rangle) + \mathcal{C}(|\beta\rangle) \tag{3}$$

□

Portanto, não existe um operador linear que seja capaz de copiar estados arbitrários (ALBUQUERQUE, 2009). Isso é consequência da impossibilidade de se copiar um estado qualquer.

2.5 Aplicações

Podemos então aplicar esses conceitos da computação quântica para a criptografia, visando resolver o problema de enviar um segredo por um canal público sem que alguém tenha acesso a ele. A forma como os objetos quânticos se comportam nos permite detectar automaticamente caso um espião intercepte o segredo, permitindo abortar e reiniciar o processo. (LOMONACO JR., 2001)

2.5.1 Distribuição de chaves quânticas

A distribuição quântica de chaves (*Quantum Key Distribution (QKD)*, em inglês) é um protocolo em que é possível provar sua segurança, onde chaves privadas podem ser enviadas através de um canal público. Isso significa que uma chave pode ser gerada por um algoritmo de chave simétrica (e.x. AES) e enviada sem preocupações com a violação da mesma. O único requisito é que o canal tenha uma taxa de erro menor que um certo valor. A segurança do protocolo se baseia no cumprimento das leis da mecânica quântica.

O princípio fundamental é de que um observador externo não consegue ganhar informação sobre os qubits transmitidos sem causar perturbação no sistema. Para que um espião seja capaz de ler um estado, ele necessariamente o deve colapsar; isso irá causar erros na leitura por parte de quem recebe e, caso seja detectado, basta recomençar todo o processo até que todos os bits sejam enviados corretamente. A seguinte afirmação nos garante isso:

Proposição 1 (Ganho de informação implica perturbação). *Qualquer tentativa de distinguir entre dois estados quânticos não ortogonais, o ganho de informação é somente possível mediante a introdução de perturbação no sinal.*

Demonstração. Para a demonstração, veja a referência (NIELSEN; CHUANG, 2000). □

Isso junto com o Teorema da não-clonagem (Teorema 1) garante que as informações transmitidas não podem ser comprometidas.

2.5.2 Protocolo BB84

O protocolo BB84, idealizado por Charles Bennett e Gilles Brassard em 1984 (daí o nome), é um protocolo de distribuição quântica de chaves (QKD) que garante a segurança da chave detectando qualquer tentativa de espionagem no canal quântico, fornecendo assim um meio de detectar possíveis violações de segurança. O protocolo BB84 utiliza quatro estados quânticos que são preparados aleatoriamente pela remetente, Alice, em uma de duas

bases (base retilínea (Z) ou base diagonal (X)) para transmitir informações ao destinatário, Bob. (SujayKumar Reddy M; Chandra Mohan B, 2023)

Os estados referidos são formados pelos autovetores da respectiva porta. No caso, a base Z é dada por $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ e a base X é dada por $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

Para ilustrar o que foi dito anteriormente, considere que Alice deseja enviar uma chave criptográfica para Bob. Nesse caso, ela irá gerar uma sequência de n bits $b_i \in \{0, 1\}$ e de bases $B_i \in \{Z, X\}$. Logo em seguida, usa uma função que codifica cada um dos bits como um qubit de acordo com a base correspondente na posição do bit.

Podemos definir uma função que cumpre esse papel:

$$E(B, b) = \begin{cases} |b\rangle, & \text{se } B = Z \\ H|b\rangle, & \text{se } B = X. \end{cases}$$

Alice agora deve combinar cada um dos qubits e enviá-los para Bob através de um canal quântico:

$$|\psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^n E(B_i, b_i).$$

Bob então monta uma base $B'_i \in \{Z, X\}$ para que ele possa medir o qubit recebido. Onde se $B_i = B'_i$, então o bit b_i é lido corretamente. Se forem diferentes, o resultado é probabilístico (50% de chance de erro).

Após esse processo, ambos revelam a sequência de bases usando um canal clássico e público (internet) e os bits lidos corretamente são mantidos. Depois é verificado se a taxa de erro quântico de bits for maior do que o esperado, eles sabem que foram espionados e abortam o processo e tudo é recomeçado. Caso contrário, o processo continua até que toda a chave seja passada corretamente.

Exemplo 2. Considere a sequência de bits $(b_i) = (101)$ e uma sequência de bases $(B_i) = (ZXZ)$ escolhida por Alice. O resultado após usar a função que codificará os bits enviados por Alice será: $|\psi\rangle = |1\rangle |+\rangle |1\rangle$.

Bob cria uma sequência de bases $(B'_i) = (ZXX)$ e mede cada um dos qubits na respectiva base. Com "medir na base", estamos na verdade realizando uma mudança de base do qubit recebido.

Como os dois primeiros qubits serão lidos na mesma base, eles não sofrem mudanças. O terceiro qubit, no entanto, está numa base diferente. Realizando a mudança de base do $|1\rangle$ para base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$\begin{aligned}
 |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \\
 |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \\
 |+\rangle - |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (2|1\rangle) = \sqrt{2}|1\rangle
 \end{aligned}$$

assim, $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle$. Desse modo a medida tornou-se probabilística, pois a escolha da base por parte de Bob foi errada. Porém, basta repetir o processo até que a escolha da base esteja correta.

3 Conclusão

A criptografia quântica surge como uma alternativa promissora e segura frente às limitações dos métodos clássicos, especialmente diante da ameaça potencial dos computadores quânticos à criptografia de chave pública convencional. Ao ancorar-se em princípios físicos fundamentais ? como a superposição, o entrelaçamento e a impossibilidade de clonagem de estados quânticos ?, torna-se possível construir protocolos que garantem segurança não apenas computacional, mas física.

Neste trabalho, foram apresentados os conceitos matemáticos centrais para a formalização desses sistemas: o espaço de Hilbert como estrutura base dos estados, a notação Bra-Ket, os operadores unitários e hermitianos, além das portas quânticas e suas composições. A abordagem adotada buscou manter o rigor matemático necessário para a compreensão dos fenômenos envolvidos, sem abrir mão da clareza didática.

Com a evolução tecnológica e o aumento da viabilidade prática dos dispositivos quânticos, espera-se que a criptografia quântica passe a ocupar um papel cada vez mais relevante em aplicações de segurança. Portanto, entender seus fundamentos matemáticos torna-se essencial tanto para acadêmicos quanto para profissionais interessados em explorar e desenvolver soluções futuras nesse campo emergente.

Referências

ALBUQUERQUE, C. D. de. *Análise e construção de códigos quânticos topológicos sobre variedades bidimensionais*. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Campinas, SP, Brasil, 2009. Orientadores: Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior e Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva.

GRIFFITHS, R. B. *Hilbert Space Quantum Mechanics*. 2014. <<https://quantum.phys.cmu.edu/CQT/qitd114/>>. Versão de 16 de janeiro de 2014. Baseado em capítulos selecionados de "Consistent Quantum Theory" e "Quantum Computation and Quantum Information".

LOMONACO JR., S. J. A talk on quantum cryptography, or how Alice outwits Eve. *arXiv preprint quant-ph/0102016*, 2001. Versão revisada de capítulo publicado em *Coding Theory and Cryptography: From Enigma and Geheimschreiber to Quantum Theory*, editado por David Joyner, Springer-Verlag, 1999, p. 144–174. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0102016v1>.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000. ISBN 978-0521635035.

SujayKumar Reddy M; Chandra Mohan B. Comprehensive analysis of BB84, a quantum key distribution protocol. *arXiv preprint arXiv:2312.05609*, 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2312.05609>.



Sobre a Bifurcação Transcrítica

Luis Thiago Arcanjo Sales

Universidade Federal de Uberlândia

luis.arcanjo@ufu.br

Hernán Roberto Montúfar López

Universidade Federal de Uberlândia

montufar@ufu.br

Resumo. Este trabalho estuda a bifurcação transcritical, fenômeno em que dois pontos de equilíbrio – um trivial e outro não trivial – trocam de estabilidade ao atingir um valor crítico do parâmetro de controle, sem que sejam criados ou destruídos. A análise qualitativa emprega retratos de fase e diagramas de bifurcação para caracterizar a estabilidade local e global de um sistema unidimensional. Estabelecem-se as condições analíticas necessárias e suficientes para sua ocorrência, baseadas na linearização e nas derivadas parciais da função do sistema com dois exemplos ilustrando a identificação da curva de bifurcação com múltiplos parâmetros e a redução à forma normal, capturando a dinâmica próxima ao ponto crítico. Destaca-se a relevância do fenômeno em áreas como biologia, física e economia, onde variações paramétricas mínimas podem desencadear transições abruptas, reforçando a utilidade da análise qualitativa na compreensão de sistemas não lineares.

Palavras-chave: retrato de fase; bifurcação transcrita; série de Taylor

1 Introdução

Em sistemas dinâmicos, a teoria das bifurcações analisa como variações em um parâmetro de controle provocam transições qualitativas, como surgimento ou troca de estabilidade entre seus equilíbrios. Dentre esses cenários, a bifurcação transcritical evidencia-se pela coexistência de dois pontos de equilíbrio que trocam estabilidade ao cruzar um valor crítico do parâmetro, sem que nenhum seja criado ou destruído.

Este trabalho dedica-se ao estudo detalhado desse fenômeno, tomando como referência o sistema unidimensional $\dot{x} = rx - x^2$, que serve como forma normal da bifurcação transcritical. Por meio dessa equação, é possível analisar de maneira clara e introdutória como dois equilíbrios – um trivial e outro não trivial – intercambiam sua estabilidade à medida que o parâmetro r varia, ilustrando um mecanismo básico de mudança qualitativa em dinâmicas não lineares.

Considere o sistema autônomo geral

$$\dot{x} = f(x, r) \quad (1.1)$$

com $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e r sendo um parâmetro real de bifurcação. Um **ponto de equilíbrio** é definido como um valor de x^* , tal que $f(x^*, r) = 0$. A classificação de pontos de equilíbrios permite diferenciar entre estados estáveis e instáveis, essencial para a análise de bifurcações, [1]. Isso significa que a taxa de variação de $\dot{x}$ é nula em x^* , portanto, se a solução inicial estiver em x^* , ela permanecerá lá indefinidamente. Pontos de equilíbrio podem ser isolados (não há outros pontos de equilíbrio próximos) ou fazer parte de uma linha contínua de pontos de

equilíbrio, nesse trabalho serão abordados apenas os pontos de equilíbrio isolados. Uma função diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **solução da equação diferencial homogênea** $\dot{x} = f(x, r)$ no intervalo I se $\dot{\phi}(t) = f(\phi(t), r)$ para todo $t \in I$. Para equações autônomas temos o teorema a seguir, pg. 209 em [4].

Teorema 1. (*Existência e Unicidade*) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe um intervalo aberto I_x onde está definida a única solução ϕ_x de $\dot{x} = f(x, r)$ tal que $\phi_x(0) = x$.

No ponto de equilíbrio o sistema se encontra nesse estado e ele permanece nele indefinidamente ao longo do tempo. Estas soluções constantes são chamadas de **soluções de equilíbrio** de $\dot{x} = f(x, r)$ porque correspondem ao caso em que não há variação no valor de x quando t cresce. Os zeros de $f(x, r)$ também são chamados de **pontos críticos**. A estabilidade de um ponto de equilíbrio indica como o sistema responde a pequenas perturbações ao redor desse ponto. Ela é essencial para entender o comportamento do sistema sem resolver explicitamente a equação diferencial.

- Dizemos que a solução de equilíbrio $x = \phi(t)$ de $\dot{x} = f(x, r)$ é uma solução **assintoticamente estável**, se as soluções que começam próximo da solução de equilíbrio tendem à solução de equilíbrio, quando t cresce.
- Dizemos que a solução de equilíbrio $x = \phi(t)$ de $\dot{x} = f(x, r)$ é uma solução **instável**, se as soluções que começam próximo da solução de equilíbrio se afastam quando t cresce.
- Dizemos que a solução de equilíbrio $x = \phi(t)$ de $\dot{x} = f(x, r)$ é uma solução **semi-estável**, se as soluções de um lado da solução de equilíbrio tendem a ela, enquanto as de outro lado se afastam dela.

Um **retrato de fase** é uma representação gráfica que descreve o comportamento qualitativo de um sistema dinâmico no plano de fase, permitindo visualizar a evolução das soluções ao longo do tempo. Ele mostra as trajetórias das variáveis do sistema, os pontos de equilíbrio e a direção do fluxo, evidenciando regiões de estabilidade, instabilidade e comportamento assintótico. Para construir um retrato de fase, primeiramente identificam-se os pontos de equilíbrio do sistema. Em seguida, realiza-se a classificação dos pontos de equilíbrio, a fim de determinar sua estabilidade e o tipo de comportamento que induzem nas soluções próximas, [2].

2 Análise gráfica de $\dot{x} = rx - x^2$

Considere o sistema dinâmico unidimensional de parâmetro r , dado pela equação diferencial autônoma:

$$\dot{x} = rx - x^2 \quad (2.1)$$

2.1 Soluções de equilíbrio:

Para encontrar as soluções constantes, igualamos a derivada temporal a zero e resolvemos para x :

$$f(x, r) = 0 \quad \Rightarrow \quad rx - x^2 = 0 \quad x(r - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = r$$

- Para $r < 0$, temos as soluções constantes $x = \phi_1(t) = r$ e $x = \phi_2(t) = 0$.
- Para $r = 0$, temos a solução constante $x = \phi_0(t) = 0$.
- Para $r > 0$, temos as soluções constantes $x = \phi_1(t) = 0$ e $x = \phi_2(t) = r$.

2.2 Reta de fase:

Para visualizar outras soluções de $\dot{x} = rx - x^2$, começamos desenhando o gráfico de f em função de x . Temos que $f(x, r) = rx - x^2$ de modo que, para cada valor do parâmetro r , o gráfico é uma parábola.

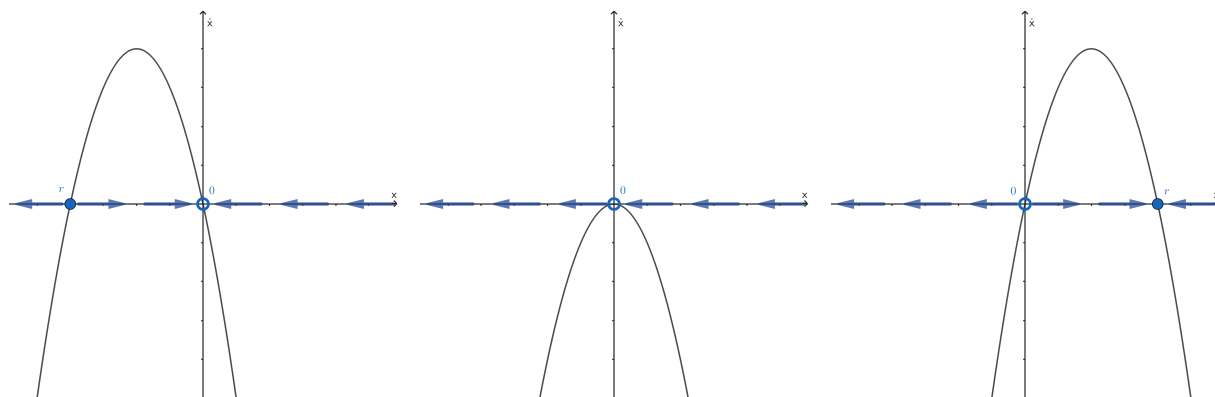


Figura 1: Gráfico para $r < 0$. Figura 2: Gráfico para $r = 0$. Figura 3: Gráfico para $r > 0$.

- Para $r < 0$, os pontos de interseção com o eixo dos x são $(r, 0)$ e $(0, 0)$ correspondendo aos pontos críticos de $f(x, a) = rx - x^2$ e o vértice da parábola está em $(r/2, r^2/4)$. Observe que:
 - Se $x < r$, então $r - x > 0$ logo $dx/dt < 0$; portanto, x é decrescente, como indicado pela seta apontando para a esquerda na figura 1.
 - Se $r < x < 0$ então $r < r - x < 0$ logo $dx/dt > 0$; portanto, x é uma função crescente de t quando x está nesse intervalo; isso é indicado pelas setas (próximas ao eixo dos x) apontando para a direita na figura 1.
 - Analogamente, se $x > 0$, então $r - x < r$ logo $dx/dt < 0$; portanto, x é decrescente, como indicado pela seta apontando para a esquerda na figura 1.
- Para $r = 0$, o ponto de interseção com o eixo dos x é $(0, 0)$ correspondendo ao ponto crítico de $f(x, 0) = -x^2$ e ao vértice da parábola. Se $x \neq 0$ então $dx/dt < 0$; portanto, x é decrescente, como indicado pela seta apontando para a esquerda na figura 2.
- Para $r > 0$, os pontos de interseção com o eixo dos x são $(0, 0)$ e $(r, 0)$ correspondendo aos pontos críticos de $f(x, a) = rx - x^2$ e o vértice da parábola está em $(r/2, r^2/4)$. Observe que:
 - Se $x < 0$, então $r < r - x$ logo $dx/dt < 0$; portanto, x é decrescente, como indicado pela seta apontando para a esquerda na figura 3.
 - Se $0 < x < r$ então $0 < r - x < r$ logo $dx/dt > 0$; portanto, x é uma função crescente de t quando x está nesse intervalo; isso é indicado pelas setas (próximas ao eixo dos x) apontando para a direita na figura 3.
 - Analogamente, se $x > r$, então $r - x < 0$ logo $dx/dt < 0$; portanto, x é decrescente, como indicado pela seta apontando para a esquerda na figura 3.

Nesse contexto, o eixo dos x é muitas vezes chamado de **reta de fase** e estão reproduzidas nas figuras 4, 5 e 6 na sua orientação vertical.

- Se $r < 0$, os pontos em $x = r$ e $x = 0$ são os pontos críticos ou soluções de equilíbrio. As setas indicam que x é crescente sempre que $r < x < 0$ e decrescente sempre que $x < r$ e $x > 0$.
- Se $r = 0$, o ponto em $x = 0$ é um ponto crítico ou solução de equilíbrio. As setas indicam que x é decrescente sempre que $x < 0$ e $x > 0$.

- Se $r > 0$, os pontos em $x = 0$ e $x = r$ são os pontos críticos ou soluções de equilíbrio. As setas indicam que x é crescente sempre que $0 < x < r$ e decrescente sempre que $x < 0$ e $x > r$.

2.3 Gráfico de curvas de solução:

Para esboçar os gráficos das soluções de $dx/dt = rx - x^2$ no plano tx , começamos com as soluções de equilíbrio; depois desenhamos outras curvas. Além disso, se x está próximo de zero na figura 2 ou se x está próximo de r na figura 1 e na figura 3, então o coeficiente angular $f(x)$ fica próximo de zero, de modo que as curvas soluções são quase horizontais. Elas se tornam mais inclinadas quando o valor de x se afasta desses valores.

- Se $r < 0$, curvas crescentes quando $r < x < 0$, decrescentes quando $x < r$ e $x > 0$ e que se aproximam de uma curva horizontal quando x se aproxima de um dos valores r e 0 , fig. 4.
- Se $r = 0$, curvas decrescentes quando $x > 0$ e $x < 0$, aproximando-se de uma curva horizontal quando x se aproxima de zero, fig. 5.
- Se $r > 0$, curvas crescentes quando $0 < x < r$, decrescentes quando $x < 0$ e $x > r$ e que se aproximam de uma curva horizontal quando x se aproxima de um dos valores 0 e r , fig. 6.

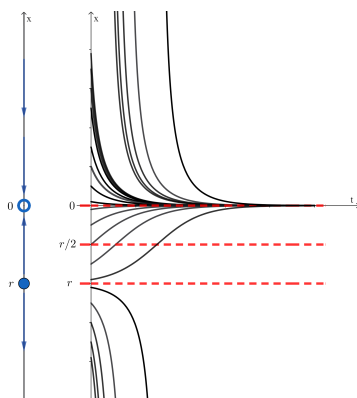


Figura 4: Diagrama de fase para $r < 0$

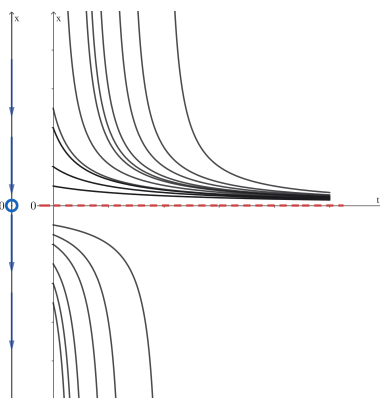


Figura 5: Diagrama de fase para $r = 0$

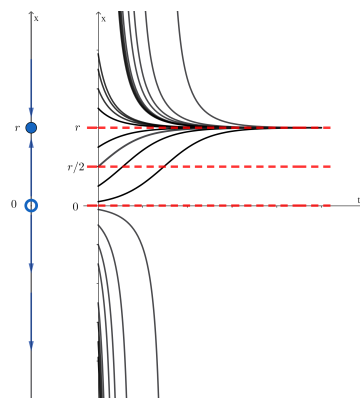


Figura 6: Diagrama de fase para $r > 0$

Logo os gráficos das soluções de $dx/dt = rx - x^2$ têm que ter a forma geral ilustrada nas figuras 4, 5 e 6. Pelo teorema fundamental de existência e unicidade temos que apenas uma solução pode conter um ponto dado no plano tx . Assim, embora outras soluções possam ser assintóticas à solução de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$, elas não podem intersectá-la em um instante finito.

Agora determinamos a concavidade das curvas soluções e a localização dos pontos de inflexão encontrando d^2x/dt^2 . Como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} f(x) = f'(x) \frac{dy}{dt} = f'(x)f(x) \quad (2.2)$$

O gráfico de x em função de t é côncavo para cima $x'' > 0$, isto é, quando f e f' tem o mesmo sinal. Analogamente, o gráfico é côncavo para baixo quando $x'' < 0$ o que ocorre quando f e f' tem sinal contrário. Os sinais de f e f' podem ser identificados do gráfico de f em função de x , figuras 1,2 e 3. Podem ocorrer pontos de inflexão quando $f'(x) = 0$.

- Se $r < 0$ (fig. 1), as soluções são côncavo para baixo para $x < r$ onde f é negativa e crescente, de modo que f é negativa e f' é positiva. As soluções são côncavo para cima

para $r < x < r/2$ onde f é positiva e crescente, de modo que ambas as funções f e f' são positivas. Para $r/2 < x < 0$, as soluções são côncava para baixo, já que aqui f é positiva e decrescente, de modo que f é positiva e f' é negativa. As soluções também são côncavo para cima para $x > 0$ onde f é negativa e decrescente. Existe um ponto de inflexão sempre que o gráfico de x em função de t cruza a reta $x = r/2$. Fig. 4.

- Se $r = 0$ (fig. 2), as soluções são côncavo para baixo para $x < 0$ onde f é negativa e crescente, de modo que f é negativa e f' é positiva. As soluções são côncavo para cima para $x > 0$ onde f é negativa e decrescente, de modo que ambas as funções f e f' são negativas. Fig. 5.
- Se $r > 0$ (fig. 3), as soluções são côncavo para baixo para $x < 0$ onde f é negativa e crescente, de modo que f é negativa e f' é positiva. As soluções são côncavo para cima para $0 < x < r/2$ onde f é positiva e crescente, de modo que ambas as funções f e f' são positivas. Para $r/2 < x < r$, as soluções são côncava para baixo, já que aqui f é positiva e decrescente, de modo que f é positiva e f' é negativa. As soluções também são côncavo para cima para $x > r$ onde f é negativa e decrescente. Existe um ponto de inflexão sempre que o gráfico de x em função de t cruza a reta $x = r/2$. Fig. 6.

Definição 1. Uma **bifurcação transcritical** é aquela em que um ponto fixo existe para todos os valores de um parâmetro e nunca é destruído. No entanto, tal ponto fixo troca sua estabilidade com outro ponto fixo conforme o parâmetro é variado.

2.4 Diagrama de bifurcação:

O comportamento exemplifica como a bifurcação transcritical combina a análise de pontos fixos e estabilidade local para descrever mudanças qualitativas do sistema. O estudo da bifurcação transcritical também se integra à análise de retratos de fase. Embora retratos de fase unidimensionais mostrem apenas o comportamento ao longo de uma linha, a bifurcação transcritical revela que pequenas variações no parâmetro podem modificar a direção do fluxo próximo aos pontos fixos, invertendo a estabilidade local.

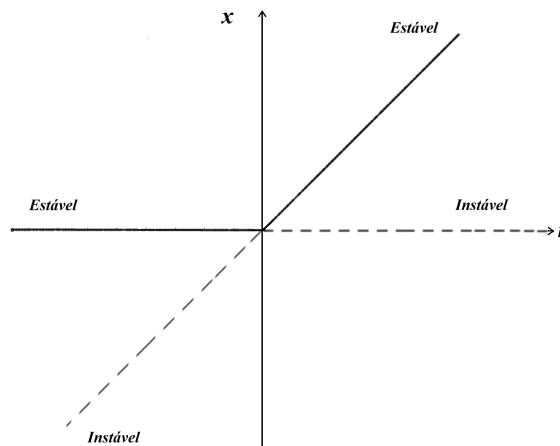


Figura 7: Diagrama de Bifurcação Transcritical.

No diagrama de bifurcação para a Bifurcação Transcritical temos: ramos $x = 0$ e $x = r$ no plano rx , com estabilidade indicada por linha cheia (estável) e tracejada (instável).

Em relação a **Figura 7** evidencia-se uma melhor visualização da troca de estabilidade dos pontos fixos do sistema. A bifurcação transcítica não é apenas um conceito matemático abstrato; ela tem aplicações diretas em modelos de crescimento populacional, permitindo analisar como a população evolui ao longo do tempo sem depender exclusivamente de soluções explícitas. Em [2] temos:

Teorema 2. *Seja $f(x, r)$, na equação $\dot{x} = f(x, r)$, uma função escalar definida em $\mathbf{R}^2$. Se f tem derivadas parciais contínuas de segundo ordem, tais que $f(0, r) = 0, r \in \mathbf{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0, \frac{\partial f}{\partial r}(0, 0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(0, 0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}(0, 0) \neq 0$. Então a equação $\dot{x} = f(x, r)$ sofre uma bifurcação transcítica em $(x, r) = (0, 0)$.*

A equação autônoma $\dot{x} = rx - x^2$ satisfaz as condições do teorema 2 portanto sofre uma bifurcação transcítica em $(0, 0)$. A esta equação chamamos a **forma normal de uma bifurcação transcítica**. A forma normal é a versão mais simples de uma dinâmica, que captura a essência do comportamento do sistema próximo ao ponto de bifurcação.

Bifurcações ajudam a entender como mudanças em parâmetros podem gerar comportamentos completamente novos em um sistema dinâmico, sem alterar a forma da equação fundamental. Elas são essenciais na análise qualitativa, pois mostram quando o sistema pode mudar de regime (por exemplo, de estável para instável, ou de equilíbrio para oscilações periódicas). A bifurcação transcítica é um tipo específico de bifurcação em sistemas dinâmicos em que dois pontos fixos se encontram em um valor crítico do parâmetro e trocam de estabilidade à medida que o parâmetro varia. É um fenômeno clássico em equações diferenciais unidimensionais.

3 Condições para a Ocorrência de Bifurcação

Até o momento foi utilizado métodos gráficos para determinar a estabilidade dos pontos fixos. Por isso será necessária uma maneira mais quantitativa da estabilidade, entorno dos seus pontos fixos, que será obtido pela linearização entorno de um ponto fixo, [3]. Seja uma equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = f(x, r)$$

que admite x^* como ponto de equilíbrio, obtido a partir de

$$f(x, r)|_{(x,r)=(x^*,r)} = 0. \quad (3.1)$$

Considere

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,r)=(x^*,r_c)} = 0 \quad (3.2)$$

para um valor crítico de r_c do parâmetro r . Por simplicidade, assumamos que o ponto de bifurcação (x^*, r_c) esteja na origem $(0, 0)$. A condição do ponto de equilíbrio 3.1 e a condição de tangência 3.2 são satisfeitas pela forma normal da bifurcação transcítica. Embora tais condições sejam necessárias, elas não são condições suficientes para assegurar a ocorrência de uma bifurcação.

Em torno do ponto de bifurcação $(x^*, r_c) = (0, 0)$, a expansão em série de Taylor da função $f(x, r)$ resulta em:

$$f(x, r) \approx f|_{(x,r)=(0,0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,r)=(0,0)} \right) x + \left(\frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{(x,r)=(0,0)} \right) r + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x,r)=(0,0)} \right) \frac{x^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r} \Big|_{(x,r)=(0,0)} \right) xr + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \Big|_{(x,r)=(0,0)} \right) \frac{r^2}{2} + \dots \quad (3.3)$$

Os dois primeiros termos dessa expressão vale zero graças 3.1 e 3.2. Para a bifurcação transcítica, despreza-se os termos de grau maior ou igual a três e mostra-se que $a = f_{xr}$ e $b = \frac{1}{2}f_{xx}$ devem ser não-nulos no ponto de bifurcação. Assim, $f \approx (a)rx \pm (b)x^2$

No caso unidimensional, o diagrama de bifurcação é representado por curvas no plano rx . Tais curvas indicam como a magnitude e a estabilidade dos pontos de equilíbrio x^* variam em função do parâmetro r . Em torno do ponto de bifurcação $(x^*, r) = (0, 0)$ a bifurcação é caracterizada por duas retas que representam a magnitude e a estabilidade de dois pontos de equilíbrio, a saber, $x_1^* = 0$ e $x_2^* = r$. Tais que se interseccionam e trocam de estabilidade em $r = 0$.

Da condição de ponto de equilíbrio, sabe-se que $f(x, r) = 0$ implica que $r = r(x)$. Derivando $f(x, r) = 0$ em relação a x , obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = 0$$

No ponto de bifurcação $(x^*, r) = (0, 0)$, tem-se que

$$\frac{\partial r}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,r)=(0,0)}}{\frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{(x,r)=(0,0)}}$$

Se existisse apenas uma curva contínua passando pelo ponto de bifurcação, então dr/dx deveria ter um valor determinado. Como há a intersecção de duas retas, dr/dx deve ter valor indeterminado. Assim, a condição de intersecção implica:

$$\frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{(x^*, r)=(0,0)} = 0 \quad (3.4)$$

já que desse modo, $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial r$ se anulam no ponto de bifurcação, e isso torna dr/dx indeterminado. Esse resultado revela a estratégia para obter as condições que uma função f deve obedecer, a fim de exibir uma bifurcação transcítica. Um caminho para obter tais condições é excluir a solução estacionária $x_1^* = 0$ da análise. Assim, por conveniência, escreve-se:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, r) = xF(x, r) \quad (3.5)$$

sendo a função $F(x, r)$ definida como:

$$F(x, r) = \begin{cases} \frac{f(x, r)}{x}, & \text{para } x \neq 0, \\ \frac{\partial f(0, r)}{\partial x}, & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

No ponto de bifurcação, as derivadas parciais da função $F(x, r)$ se relacionam com as derivadas parciais da função $f(x, r)$ por:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(x^*, r)=(0,0)} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x^*, r)=(0,0)} \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{(x^*, r)=(0,0)} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r} \right|_{(x^*, r)=(0,0)} \quad (3.7)$$

O objetivo é expressar as condições de bifurcação transcítica para a função F , em termos de derivadas, e convertê-las em condições para a função original f , usando as expressões 3.6 e 3.7. Da posição da condição de equilíbrio, sabe-se que

$$F(x^*, r) = 0 \Rightarrow r = r(x^*)$$

Lembrando que, aqui, $r = r(x)$ representa apenas a variação de x_2^* como r , já que $x_1^* = 0$ foi convenientemente excluído. Derivando essa expressão com relação a x e rearranjando, obtém-se, no ponto de bifurcação $(x^*, r) = (0, 0)$, que:

$$\left. \frac{dr}{dx} \right|_{x^*=0} = - \frac{\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(x^*, r)=(0,0)}}{\left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{(x^*, r)=(0,0)}} = - \frac{\left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x^*, r)=(0,0)}}{\left. \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x} \right|_{(x^*, r)=(0,0)}} \quad (3.8)$$

No caso de bifurcação transcítica, a inclinação da curva $r = r(x^*)$ não deve coincidir com o eixo- r e nem interseccionar esse eixo ortogonalmente no ponto de bifurcação. Essas duas condições implicam que:

$$0 < \left| \left(\frac{dr}{dx} \right)_{x^*=0} \right| < \infty \quad (3.9)$$

Assim, tanto o numerador quanto o denominador da expressão 3.9 devem ser não nulos, ou seja:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x^*, r)=(0,0)} \neq 0 \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x} \right|_{(x^*, r)=(0,0)} \neq 0 \quad (3.11)$$

O sinal de $dr/dx|_{x^*=0}$ distingue duas possibilidades: $dr/dx|_{x^*=0} > 0$ no caso supercrítico, pois, no ponto de bifurcação, é positiva a inclinação da reta $r = r(x^*)$ que descreve como o ponto de equilíbrio não nulo varia em função do parâmetro de controle; no caso subcrítico, $dr/dx|_{x^*=0} < 0$, já que tal inclinação é negativa.

Pode-se, ainda, verificar que $r = r(x^*)$ muda de estabilidade no ponto de bifurcação. Ao longo dessa reta, $\partial f / \partial r$ troca de sinal em $x^* = 0$, mas dr/dx preserva seu sinal. Portanto, $\lambda = \partial f / \partial x$ deve trocar de sinal quando passa por $x^* = 0$, o que implica troca de estabilidade da solução de equilíbrio x_2^* .

Resumindo: as condições necessárias e suficientes para que a função f exiba uma bifurcação transcítica são dadas pelas expressões 3.1, 3.2, 3.4, 3.10 e 3.11.

4 Exemplos de Bifurcação Transcítica

Como primeiro exemplo, iremos mostrar que o sistema de primeira ordem

$$\dot{x} = x(1 - x^2) - a(1 - e^{-bx})$$

sofre uma bifurcação transcítica em $x = 0$ quando os parâmetros a e b satisfazem uma certa equação (a ser determinada). Essa equação define uma **curva de bifurcação** no espaço de parâmetros (a, b) . Em seguida, encontraremos uma fórmula aproximada para o ponto fixo que bifurca de $x = 0$, assumindo que os parâmetros estão próximos da curva de bifurcação, [5].

Temos que $x = 0$ é um ponto fixo para todo (a, b) . Isso sugere que o ponto fixo bifurcará de forma transcítica, se de fato ocorrer uma bifurcação. Para x pequeno, temos:

$$1 - e^{-bx} = 1 - [1 - bx + \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3)] = bx - \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3) \quad (4.1)$$

Substituindo:

$$\dot{x} = x - a[bx - \frac{1}{2}b^2x^2] + O(x^3) \Rightarrow \dot{x} = (1 - ab)x + (\frac{1}{2}ab^2)x^2 + O(x^3) \quad (4.2)$$

Portanto, ocorre uma bifurcação transcítica quando $ab = 1$. O ponto fixo não nulo é dado aproximadamente por $1 - ab + (\frac{1}{2}ab^2)x \approx 0$, isto é,

$$x^* \approx \frac{2(ab - 1)}{ab^2} \quad (4.3)$$

Essa fórmula é válida apenas quando x^* é pequeno, isto é, quando os parâmetros estão próximos da curva de bifurcação ($ab \approx 1$).

Agora, analisando a dinâmica do sistema

$$\dot{x} = r \ln(x) + x - 1$$

nas proximidades de $x = 1$, será mostrado que o sistema sofre uma bifurcação transcítica em determinado valor de r . Em seguida, será encontrado novas variáveis X e R tais que o sistema se reduza aproximadamente à **forma normal**: $\dot{X} = RX - X^2$

Notamos que $x = 1$ é um ponto fixo para todo r . Como estamos interessados na dinâmica próxima a esse ponto fixo, definimos uma nova variável $u = x - 1$, com u pequeno. Assim, $\dot{u} = \dot{x}$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{x} \\ &= r \ln(1 + u) + u \\ &= r[u - \frac{1}{2}u^2 + O(u^3)] + u \\ &\approx (r + 1)u - \frac{1}{2}ru^2 + O(u^3) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Logo, ocorre uma bifurcação transcítica em $r_c = 1$. Para colocar o sistema na forma normal, eliminamos

o coeficiente de u^2 . Definindo $u = a \cdot v$, onde a será escolhido posteriormente, então a equação para v é

$$\dot{v} = (r + 1)v - \left(\frac{1}{2}ra\right)v^2 + O(v^3) \quad (4.5)$$

Escolhendo $a = \frac{2}{r}$, a equação fica

$$\dot{v} = (r + 1)v - v^2 + O(v^3) \quad (4.6)$$

Por fim, definindo $R = r + 1$ e $X = v$, teremos a forma normal aproximada $\dot{X} \approx RX - X^2$, onde os termos de ordem $O(x^3)$ foram negligenciados. Em termos das variáveis originais, $X = v = \frac{u}{a} = \frac{1}{2}r(x - 1)$.

5 Conclusão

Este trabalho explorou a bifurcação transcítica como um fenômeno fundamental na teoria dos sistemas dinâmicos, destacando sua relevância tanto teórica quanto aplicada. A análise do sistema: $\dot{x} = rx - x^2$ permitiu ilustrar de forma clara e elegante como pequenas variações em um parâmetro r podem induzir mudanças qualitativas abruptas no comportamento do sistema, especificamente por meio da colisão e troca de estabilidade entre pontos fixos.

A utilização de ferramentas como diagramas de fase mostrou-se essencial para caracterizar a estabilidade local e global do sistema, complementando a abordagem qualitativa. Além disso, a representação gráfica por meio de diagramas de bifurcação facilitou a visualização da transição de estabilidade entre os pontos fixos, tornando conceitos abstratos mais intuitivos.

A bifurcação transcítica não se restringe a contextos teóricos. Suas aplicações estendem-se a áreas como biologia (modelos populacionais), física (transições de fase) e economia (dinâmicas de mercado), onde mudanças sutis em parâmetros podem levar a comportamentos radicalmente distintos. Este trabalho reforça, assim, a importância da análise qualitativa e do estudo de bifurcações para a compreensão de sistemas dinâmicos complexos, oferecendo bases sólidas para investigações futuras em modelos não lineares multidimensionais e suas ricas dinâmicas.

Referências

- [1] Boyce, W. E. e DiPrima, R. C., *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 10 ed, LTC, 2017.
- [2] Liu, J. H., *A first course in the qualitative theory of differential equations*. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2003.
- [3] Monteiro, L, H, A, *Sistemas Dinâmicos*, 2, ed. Livraria da Física, São Paulo, 2006.
- [4] Sotomayor, J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [5] Strogatz, S.H, *Nonlinear Dynamics And Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2018.



Aplicações do Teorema da Função Inversa

Samara Aparecida Parreira Araujo Silva

Universidade Federal de Uberlândia

samara.parreira@ufu.br

Tânia Maria Machado de Carvalho

Universidade Federal de Uberlândia

tania.carvalho@ufu.br

Resumo.

O Teorema da Função Inversa é um resultado fundamental da análise matemática, desenvolvido a partir dos trabalhos de Newton e Leibniz e formalizado por Lagrange, Cauchy e Dini nos séculos XVIII e XIX. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma interpretação geométrica do teorema no contexto de uma variável real, explorando a simetria entre o gráfico de uma função diferenciável f e sua inversa f^{-1} . Analisa-se o comportamento das retas tangentes a f e f^{-1} , determinando as condições sob as quais elas se intersectam, tornam-se paralelas ou coincidem, e demonstra-se que, sob restrições adequadas sobre f' , os pontos de interseção pertencem à reta $y = x$, o que definir esta reta como um lugar geométrico. Casos especiais, como $f'(x) = 1$ ou -1 , resultam em tangentes paralelas ou coincidentes, refletindo simetrias particulares. A metodologia combina deduções formais, baseadas em Lima, (2011) e Iezzi e Dante, (2013), com representações gráficas construídas no GeoGebra, integrando métodos algébricos e geométricos.

Palavras-chave: Função inversa; teorema da função inversa; lugar geométrico.

1 Introdução

A origem do *teorema da função inversa* remonta ao desenvolvimento do cálculo diferencial e da análise matemática nos séculos XVIII e XIX. Ele surgiu da necessidade de compreender quando uma função diferenciável possui uma inversa diferenciável e como esta se comporta localmente. As ideias já estavam implícitas nos trabalhos de Newton e Leibniz e foram sistematizadas por Lagrange, especialmente na inversão de séries analíticas, antecipando o raciocínio local de invertibilidade. Posteriormente, Cauchy e Dini estabeleceram formulações rigorosas do teorema para funções univariadas e multivariadas, consolidando o que hoje chamamos *Teorema da Função Inversa* (Boyer, 1991).

O presente trabalho tem como objetivo apresentar investigar, sob uma perspectiva analítica e geométrica, o comportamento das retas tangentes aos gráficos de uma função diferenciável f e de sua inversa f^{-1} , verificando as condições sob as quais essas tangentes se intersectam, se tornam paralelas ou coincidem. A partir dessas análises, busca-se demonstrar que, **sob condições adequadas**, a reta $y = x$ constitui o *lugar geométrico* dos pontos de interseção entre as retas tangentes a f e a f^{-1} , nos pontos respectivos. A demonstração do teorema foi suprimida devido a questões de brevidade, podendo ser encontrada na referência Lima, (2011).

2 Funções Inversas

Definição 1. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função entre dois conjuntos X e Y . Dizemos que f é *invertível* se existe uma função $f^{-1} : Y \rightarrow X$ tal que

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in X, \quad e \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in Y.$$

Teorema 1. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é inversível se, e somente se, é bijetora (isto é, injetora e sobrejetora).

2.1 O Teorema da Função Inversa

Teorema 2 (Função inversa). Seja $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção entre dois conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$ com inversa $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$. Se f é derivável no ponto $a \in X \cap X'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$ então g é derivável no ponto b se, e somente se, $f'(a) \neq 0$. No caso afirmativo

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

As demonstrações dos Teoremas 1 e 2 podem ser encontradas na referência Lima, (2011).

3 Aspectos geométricos oriundos das relações entre uma função localmente invertível e sua inversa

Para determinar explicitamente a inversa f^{-1} de uma função $f : X \rightarrow Y$ diferenciável e bijetora em uma vizinhança de $x_0 \in X$, com $f'(x_0) \neq 0$, começa-se escrevendo a relação $y = f(x)$. Em seguida, manipula-se algebricamente essa equação para expressar x em função de y , obtendo $x = g(y)$. Finalmente, troca-se a notação das variáveis de forma convencional para escrever y em função de x , resultando na expressão da inversa $y = f^{-1}(x)$. Essa construção é válida apenas em uma vizinhança de x_0 , conforme garantido pelo teorema da função inversa (Teorema (2)), que assegura a existência de uma inversa diferenciável sempre que f é diferenciável e $f'(x_0) \neq 0$.

Exemplo 1. Seja a função $f(x) = 3x + 2$ definida pela sentença aberta $y = 3x + 2$. Fazemos a troca de variáveis:

$$x = 3y + 2,$$

e resolvendo em função de y , obtemos

$$y = \frac{x - 2}{3} = f^{-1}(x).$$

Note que, se tomarmos $x = 1$ e $y = 5$, temos $y = 3(1) + 2 = 5$, logo $(1, 5) \in f$. Por outro lado, ao verificarmos a inversa, obtemos $f^{-1}(5) = (5 - 2)/3 = 1$, ou seja, $(5, 1) \in f^{-1}$.

Isso mostra que o mesmo par de números satisfaz ambas as sentenças abertas, mas a ordem dos elementos muda, de forma que,

$$(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}.$$

3.1 Representação gráfica.

Para construir o gráfico de $f(x)$, representa-se x no eixo das abscissas e y no eixo das ordenadas, de maneira que

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} \text{ e } f^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = f(y)\}.$$

Ou seja, ao representar f^{-1} , o papel das variáveis se inverte: o eixo das abscissas é associado a y e o eixo das ordenadas a x . Dessa forma, os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$, como veremos a seguir.

3.1.1 Demonstração da simetria em relação à reta $y = x$

Seja f uma função e $P(a, b) \in f$. Então, por definição de função inversa, temos que existe um ponto Q tal que $Q(b, a) \in f^{-1}$. O objetivo é mostrar que tais pontos são simétricos em relação à reta $r : y = x$. Para isso, note que P e Q equidistam da reta r , pois ao considerar $y = x$, o ponto médio M do segmento $\overline{PQ}$, é dado por

$$M = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \right) = (a, a).$$

É fácil ver que $M \in r$ e, $MP = MQ$. Logo, P e Q se encontram à mesma distância da reta r .

Além disso, veja que o segmento PQ é perpendicular à reta r . De fato, tome $R(c, c)$ um ponto qualquer de r , tal que $R \neq M$. Consideremos o triângulo PMR . Calculando os comprimentos dos lados, obtemos:

$$PM^2 = \left(a - \frac{a+b}{2} \right)^2 + \left(b - \frac{a+b}{2} \right)^2 = 2 \left(\frac{a-b}{2} \right)^2,$$

$$MR^2 = \left(\frac{a+b}{2} - c \right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - c \right)^2 = 2 \left(\frac{a+b}{2} - c \right)^2,$$

$$PR^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2.$$

Agora, somando $PM^2 + MR^2$, temos:

$$PM^2 + MR^2 = \frac{(a-b)^2}{2} + 2 \left(\frac{a+b}{2} - c \right)^2.$$

Efetuada os cálculos algébricos, verifica-se que:

$$PM^2 + MR^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2 = PR^2.$$

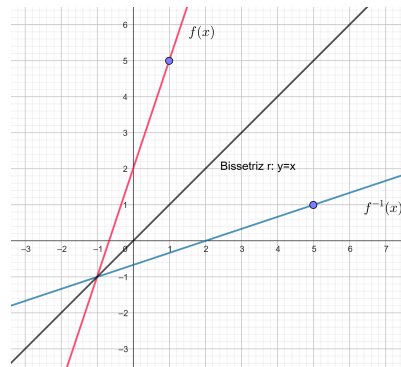
Logo, pelo Teorema de Pitágoras, o triângulo PMR é retângulo em M . Isso implica que $\overline{PQ} \perp r$. A Figura 1 ilustra essa situação.

Assim, mostramos que os pontos P e Q são equidistantes da reta r , e que a reta $\overline{PQ}$ é perpendicular à reta r . Portanto, $P(a, b)$ e $Q(b, a)$ são simétricos em relação à reta $y = x$.

Aplicando ao Exemplo (1) temos,

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 2\} \text{ e } f^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3y + 2\}.$$

Figura 1: Simetria da Função Inversa.



Fonte: Autora

4 Interpretação geométrica do Teorema da Função Inversa

Nesta seção é apresentada uma representação geométrica do Teorema da Função Inversa, de modo a fornecer ao leitor uma intuição visual de seu significado. Vimos na seção anterior que, a interpretação gráfica permite observar que o gráfico da função inversa f^{-1} pode ser obtido por uma reflexão do gráfico de f em relação à reta $y = x$.

Além disso, é importante notar que o Teorema (2) estabelece uma relação importante entre as derivadas de f e de f^{-1} . O referido teorema afirma que, se f é derivável em um ponto a e $f'(a) \neq 0$, e sua inversa é contínua em $b = f(a)$, então f^{-1} também é derivável em $b = f(a)$, e sua derivada é dada por

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Graficamente, isso significa que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ tem inclinação $f'(a)$, enquanto a reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(f(a), a)$ tem inclinação

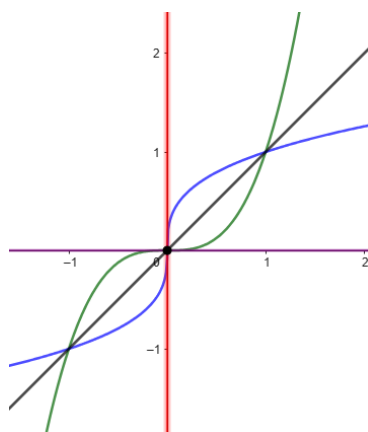
$\frac{1}{f'(a)}$. Como as duas curvas são simétricas em relação à reta $y = x$, a inclinação de uma se torna o inverso da inclinação da outra.

No entanto, é fundamental observar a limitação expressa pela condição $f'(a) \neq 0$. Caso $f'(a) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto seria horizontal, o que implicaria que a reta tangente ao gráfico de f^{-1} seria vertical. Isso quebraria a continuidade, e consequentemente, a diferenciabilidade de f^{-1} . Portanto, a hipótese $f'(a) \neq 0$ é necessária para garantir que f^{-1} seja diferenciável.

Para ilustrar essas ideias, vamos utilizar como exemplo a função $f(x) = x^3$, cujo gráfico é estritamente crescente e, consequentemente, invertível em $\mathbb{R}$, mas $f'(0) = 0$.

Ao representar o gráfico de f e sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, nota-se que no ponto $(0, 0)$ a reta tangente a f é horizontal (coincide com o eixo x), e a reta correspondente para f^{-1} é vertical (coincide com o eixo y), evidenciando que a inversa não é diferenciável nesse ponto. A figura 2 representa essa condição.

Figura 2: Gráfico de $f(x) = x^3$



Fonte: Autora

Em contraste, pode-se considerar uma função cuja derivada nunca se anula, como

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), \quad f(x) = e^x.$$

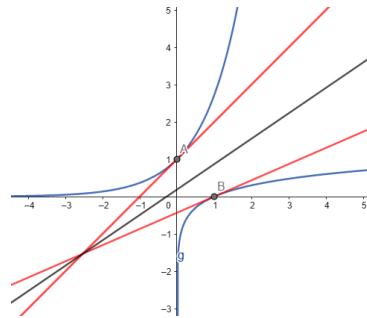
Nesse caso, $f'(x) = e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que garante que f é estritamente crescente e, portanto, invertível em todo o domínio real.

O contradomínio de f é o conjunto dos números reais positivos, de modo que a inversa é dada por

$$f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \ln x.$$

Assim, tanto f quanto f^{-1} são diferenciáveis em seus respectivos domínios, e, como $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}_*$, não ocorrem pontos nos quais a reta tangente seja horizontal, como pode ser visto na Figura 3.

Figura 3: Gráficos das funções logaritmo natural e exponencial e suas respectivas retas tangentes.



Fonte: Autora

4.1 Retas tangentes a f e f^{-1}

Vimos no tópico anterior que as retas tangentes têm papel fundamental no teorema da função inversa (2). É interessante aprofundar a investigação sobre as relações entre as retas tangentes aos gráficos de f e f^{-1} , em pontos correspondentes. Nosso objetivo é analisar quando tais retas se interceptam, quando são paralelas e quando coincidem, relacionando, quando possível, o resultado com o lugar geométrico da reta $y = x$.

Seja f diferenciável em $a \in \mathbb{R}$, com $b = f(a)$. Seja L_1 a equação geral da reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$. Isto é,

$$L_1 : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

A derivada da inversa, quando existe, é dada por

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}, \quad \text{com } b = f(a).$$

Portanto, a reta tangente L_2 ao gráfico de f^{-1} em $(f(a), a)$ é dada por,

$$L_2 : y = \frac{1}{f'(a)}(x - f(a)) + a.$$

4.1.1 Interseção algébrica entre L_1 e L_2

Para encontrar o ponto de interseção entre as retas tangentes em pontos correspondentes, basta igualar as equações de L_1 e L_2 . Assim,

$$f'(a)(x - a) + f(a) = \frac{1}{f'(a)}(x - f(a)) + a,$$

o que nos leva a,

$$(f'(a)^2 - 1)x = f'(a)^2a - f'(a)f(a) - f(a) + af'(a).$$

Assim, para $f'(a) \neq \pm 1$, obtemos:

$$x = \frac{f'(a)^2 a - f'(a)f(a) - f(a) + af'(a)}{f'(a)^2 - 1}.$$

Após algumas manipulações algébricas se obtém

$$x = \frac{af'(a) - f(a)}{f'(a) - 1}.$$

Substituindo esse valor na equação L_1 (poderia se escolher, sem perda de generalidade, a equação L_2) e efetuando as respectivas manipulações algébricas, obtém-se,

$$y = f'(a) \left(\frac{af'(a) - f(a)}{f'(a) - 1} - a \right) + f(a) = \frac{af'(a) - f(a)}{f'(a) - 1}.$$

Portanto,

$$(x, y) = \left(\frac{af'(a) - f(a)}{f'(a) - 1}, \frac{af'(a) - f(a)}{f'(a) - 1} \right). \quad (1)$$

é fácil ver a partir da Equação (1) que a interseção entre as duas retas só existe em pontos a pertencentes ao domínio de f , tais que $f'(a) \neq 1$, e que o ponto de interseção, quando existe, pertence à reta $y = x$.

4.1.2 Caso $f'(a) = 1$

O objetivo agora é investigar o que ocorre quando $f'(a) = 1$. Para isso vamos analisar as inclinações das retas L_1 e L_2 no ponto (a, b) , com $b = f(a)$.

A tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ tem coeficiente angular $m_1 = f'(a)$, e, pelo TFI (Teorema (2)) a tangente ao gráfico de f^{-1} em $(f(a), a)$ tem coeficiente angular $m_2 = (f^{-1})' = \frac{1}{f'(a)}$ (assumindo $f'(a) \neq 0$).

Daí, para $f'(a) = 1$,

$$L_1 : y = (x - a) + f(a) = x + (f(a) - a),$$

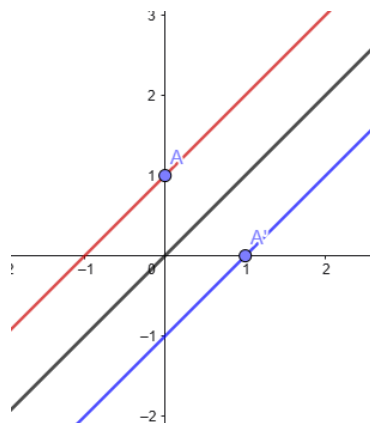
$$L_2 : y = (x - f(a)) + a = x + (a - f(a)).$$

Observe que ambas têm a mesma inclinação 1 (que é a mesma inclinação da reta $y = x$), porém os termos constantes são opostos: $f(a) - a$ em L_1 e $a - f(a)$ em L_2 .

- Se $f(a) = a$, então L_1 e L_2 coincidem com $y = x$ (os termos constantes são zero). Assim as duas tangentes *coincidem* e são exatamente a reta $y = x$.
- Se $f(a) \neq a$, então L_1 e L_2 têm a mesma inclinação mas termos constantes distintos;

portanto são *retas paralelas distintas*. A figura 4 ilustra esse caso, sendo $f(x) = x + 1$ e $f^{-1}(x) = x - 1$.

Figura 4: Gráfico da Função Inversa



Fonte: Autora

4.1.3 O caso $f'(a) = -1$.

Um caso interessante que deriva do TFI ocorre quando $f'(a) = -1$. Veja-se que, partindo da igualdade

$$f'(a) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Multiplicando ambos os lados por $f'(a)$ (e lembrando que aqui assumimos $f'(a) \neq 0$), segue

$$f'(a)^2 = 1 \Leftrightarrow f'(a) = \pm 1.$$

Para $f'(a) = -1$, temos

$$L_1 : y = -(x - a) + f(a) = -x + (f(a) + a),$$

$$L_2 : y = -(x - f(a)) + a = -x + (a + f(a)).$$

Ambas as tangentes têm inclinação -1 (isto é, $m_1 = m_2$). Além disso, os termos independentes também coincidem, pois em ambas as expressões o termo constante é $f(a) + a$. Portanto, nos pontos onde $f'(a) = -1$, se existirem, as respectivas retas tangentes a f e a f^{-1} são coincidentes (como conjuntos geométricos), embora, em geral toquem os gráficos em pontos distintos.

Observe que, se adicionalmente ocorrer $f(a) = -a$, então o termo constante $f(a) + a$ se anula, e as duas tangentes coincidem com a reta

$$y = -x,$$

passando pela origem. Nesse caso, o ponto $(a, f(a)) = (a, -a)$ é simétrico em relação à origem,

e a tangente comum é perpendicular à bissetriz $y = x$. Assim, esse caso particular ilustra uma situação de simetria completa: as tangentes de f e de f^{-1} são coincidentes e passam pela origem.

Exemplo 2. Seja

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), \quad f(x) = e^{-x}.$$

Temos $f'(x) = -e^{-x}$, de modo que $f'(0) = -1$ e $f(0) = 1$. A inversa é

$$f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = -\ln x,$$

$$\text{e } (f^{-1})'(1) = 1/f'(0) = -1.$$

A reta tangente a f em $(0, 1)$ e a reta tangente a f^{-1} em $(1, 0)$ são ambas coincidentes com a reta

$$y = -x + 1.$$

Isto é, coincidem como conjunto, mas tocam os respectivos gráficos em pontos distintos: $(0, 1)$ para f e $(1, 0)$ para f^{-1} . Veja a Figura 5.

Já se considerarmos a função

$$\tilde{f}(x) = e^{-x} - 1,$$

Considere

$$\tilde{f}(x) = e^{-x} - 1, \quad \tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow (-1, +\infty).$$

Temos $\tilde{f}'(x) = -e^{-x}$, logo $\tilde{f}'(0) = -1$ e $\tilde{f}(0) = 0$, de modo que $\tilde{f}(a) = -a$ no ponto $a = 0$. Resolvendo $y = e^{-x} - 1$ obtemos $x = -\ln(y + 1)$, portanto

$$\tilde{f}^{-1}(x) = -\ln(x + 1), \quad \tilde{f}^{-1} : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Derivando,

$$(\tilde{f}^{-1})'(x) = -\frac{1}{x + 1},$$

$$\text{e em particular } (\tilde{f}^{-1})'(0) = -1 = \frac{1}{\tilde{f}'(0)}.$$

As retas tangentes são então,

$$y - 0 = -1(x - 0) \implies y = -x, \text{ tangente a } \tilde{f} \text{ em } (0, 0),$$

$$y - 0 = -1(x - 0) \implies y = -x, \text{ tangente a } \tilde{f}^{-1} \text{ em } (0, 0).$$

Portanto, neste exemplo $\tilde{f}(0) = -0$ e $\tilde{f}'(0) = -1$: a função e sua inversa se tocam exatamente no mesmo ponto $(0, 0)$ e têm a mesma reta tangente comum $y = -x$. Veja a Figura 6.

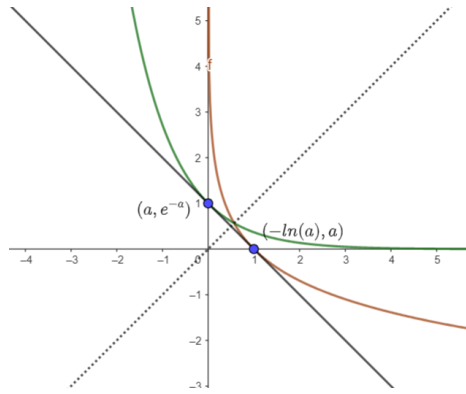


Figura 5: Caso $f'(a) = -1$: retas tangentes em pontos respectivos coincidem.

Fonte: Autora

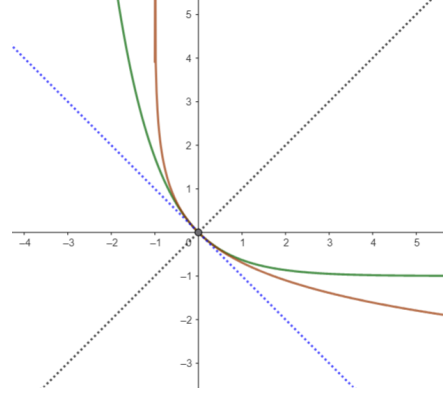


Figura 6: $\tilde{f}(x) = e^{-x} - 1$: tangentes coincidem no mesmo ponto $(0, 0)$.

Fonte: Autora

4.1.4 Caso $f'(a) = 0$

Nos pontos em que $f'(x) = 0$, o Teorema da Função Inversa (TFI) não pode ser aplicado, pois ele exige que $f'(x) \neq 0$. Ainda assim, é instrutivo analisar o que ocorre geometricamente nesses pontos.

Seja a um ponto do domínio de uma função diferenciável f tal que $f'(a) = 0$. A equação da reta tangente a f em $(a, f(a))$ é

$$L_1 : y = f'(a)(x - a) + f(a) = f(a),$$

isto é, uma reta horizontal.

Para entender a tangente à inversa f^{-1} , lembramos da identidade fundamental

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = 1.$$

Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} [f^{-1}(x)] = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} [f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Avaliando em $x = f(a)$, temos $f^{-1}(f(a)) = a$, logo

$$\left. \frac{d}{dx} [f^{-1}(x)] \right|_{x=f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

No caso em que $f'(a) = 0$, a derivada de f^{-1} não está definida. Geometricamente, isso significa que a tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(f(a), a)$ é uma reta vertical, pois

$$L_2 : x = f(a).$$

Portanto, sempre que $f'(a) = 0$, a tangente de f é horizontal, enquanto a tangente de f^{-1} (quando esta existir) é vertical. Esse comportamento reflete a relação de reciprocidade entre as inclinações das tangentes de f e de f^{-1} .

4.2 A reta $y = x$ como lugar geométrico das interseções das tangentes à função e sua inversa, em pontos correspondentes

Definição 2. Um lugar geométrico é o conjunto de todos os pontos do plano que satisfazem a uma determinada propriedade ou condição.

A partir dos resultados anteriores, observamos que, para uma função diferenciável f com derivada não nula e tal que $f'(a) \neq \pm 1$, as retas tangentes aos gráficos de f e f^{-1} nos pontos correspondentes $(a, f(a))$ e $(f(a), a)$ se intersectam exatamente sobre a reta $y = x$.

Assim, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 1. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow f(D)$ uma função diferenciável e invertível em D , tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in D$.

Então, para cada ponto $x \in D$:

- Se $f'(x) \neq \pm 1$, o ponto de interseção das tangentes ao gráfico de f em $(x, f(x))$ e ao gráfico de f^{-1} em $(f(x), x)$ existe e pertence à reta $y = x$.
- Se $f'(x) = 1$, as tangentes são paralelas e, em geral, não se intersectam. Se, adicionalmente, $f(x) = x$, as tangentes coincidem exatamente com a reta $y = x$.
- Se $f'(a) = -1$, as tangentes a $f(a)$ e a $f^{-1}(a)$ coincidem e são perpendiculares à reta $y = x$ (o ponto de interseção não é, necessariamente, único).

Dessa forma, em todos os casos possíveis, de acordo com a proposição anterior, o ponto de interseção das tangentes a f e f^{-1} , se existir, pertence à reta $y = x$. Essa reta atua como eixo de simetria entre os gráficos e também como o *lugar geométrico* dos pontos de interseção das tangentes.

Segue da Proposição (1) que, se $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow f(D)$ é uma função diferenciável em D tal que $f'(x) \neq 0$ e $f'(x) \neq \pm 1 \forall x \in D$, então, a reta $y = x$ constitui o *lugar geométrico* dos pontos de interseção das retas tangentes a f e f^{-1} nos pontos correspondentes.

Exemplo 3. Seja $f(x) = \ln x$, definida para $x > 0$, e seja $f^{-1}(x) = e^x$ sua inversa. Para cada $a > 0$, consideremos os pontos correspondentes $P = (a, \ln a)$ e $Q = (\ln a, a)$.

As tangentes a f em P e a f^{-1} em Q possuem coeficientes angulares, respectivamente,

$$f'(a) = \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad (f^{-1})'(\ln a) = a,$$

portanto, para $a \neq 1$, essas retas são *inversas entre si*, visto que têm inclinações opostas, o que implica que a interseção entre elas pertence à reta $y = x$. A única exceção ocorre em $a = 1$, pois nesse caso,

$$f'(1) = 1 \quad \text{e} \quad (f^{-1})'(0) = 1,$$

de modo que, em $a = 1$, as tangentes são paralelas e não se intersectam.

No entanto, se escrevemos as tangentes nos pontos $P = (a, \ln a)$ e $Q = (\ln a, a)$, obtemos

$$\begin{aligned} y - f(a) &= f'(a)(x - a) \Rightarrow y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a) \quad \text{e} \\ y - f^{-1}(a) &= f^{-1}'(a)(x - \ln a) \Rightarrow y - a = a(x - \ln a). \end{aligned} \quad (2)$$

Resolvendo o sistema, o ponto de interseção é

$$(x, y) = \left(\frac{a(1 - \ln a)}{1 - a}, \frac{a(1 - \ln a)}{1 - a} \right),$$

o que mostra que ele pertence à reta $y = x$, para todo $a \neq 1$.

Mas observe que, quando $a \rightarrow 1$, tem-se

$$x = y = \frac{a(1 - \ln a)}{1 - a} \rightarrow \begin{cases} +\infty, & a \rightarrow 1^-, \\ -\infty, & a \rightarrow 1^+, \end{cases}$$

isto é, o ponto de interseção diverge, mas ainda assim, o *lugar geométrico* dos pontos de interseção, à medida que a percorre $(0, \infty) \setminus \{1\}$, é **toda** a reta $y = x$, como pode-se ver na Figura 7. Na Figura 8 temos a representação das retas tangentes “tendendo a serem paralelas” quando a se aproxima de 1.

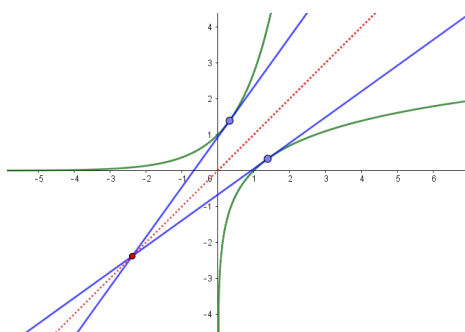


Figura 7: O lugar geométrico das interseções das tangentes a $f(x) = \ln(x)$ e sua inversa $f^{-1}(x) = e^x$ é a reta $y = x$.

Fonte: Autora

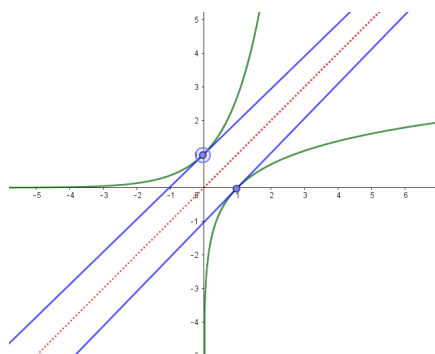


Figura 8: Caso $f'(a) = 0$ - tangentes paralelas em $x = a = 1$. Veja que nesse caso $(1, \ln(1)) = (1, 0)$ e $(\ln(1), 1) = (0, 1) = (0, e^0)$.

Fonte: Autora

5 Conclusão

Neste trabalho, foi analisado o comportamento das retas tangentes aos gráficos de uma função diferenciável f e de sua inversa f^{-1} , com base nas propriedades do Teorema da Função Inversa. A partir das demonstrações analíticas e das interpretações geométricas, verificou-se que o ponto de interseção entre as tangentes, quando existe, pertence à reta $y = x$, a qual se revela não apenas como eixo de simetria entre os gráficos de f e f^{-1} , mas também, com as devidas restrições, como o *lugar geométrico* desses pontos de interseção.

Referências

BOYER, Carl B. **A History of Mathematics**, 2nd edition. New York: Wiley, 1991.

LIMA, F. S. **Análise Real 1**. Fortaleza: Edições UFC, 2011.

IEZZI, G.; DANTE, J. **Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 4**. São Paulo: Atual, 2013.



UM ESTUDO SOBRE INVARIANTES TOPOLÓGICOS NO CONTEXTO DE CADEIAS DE TOPOLOGIAS

Miguel Sabino Rodrigues da Cunha

Universidade Federal de Uberlândia

miguelsabino@ufu.br

Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira

Universidade Federal de Uberlândia

mgov@ufu.br

Resumo.

O presente trabalho investiga a relação entre cadeias de topologias em um conjunto não-vazio X e o comportamento de invariantes topológicos, com foco na conexidade. Buscou-se compreender como o fortalecimento ou enfraquecimento de uma topologia afeta a preservação desse invariante. A partir de estudos de Lima (2020)(2020), Kühnkamp (2016)(2016), Munkres (2000)(2000) e Vieira (2019)(2019) demonstra-se que, se uma topologia $\mathcal{S}$ confere conexidade a X , então toda topologia mais fraca $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ também a confere, porém o inverso não é necessariamente verdadeiro, visto que topologias mais fortes podem romper a conexidade do espaço. Essa propriedade é ilustrada pelo caso do conjunto $X = \{a, b\}$. A partir desse exemplo e com o estudo de cadeias e infinitos enumeráveis e não enumeráveis, em Fajardo (2024)(2024) e Lima (2004)(2004), construiu-se uma cadeia completa de topologias sobre X , com o intuito de identificar aquelas para as quais qualquer topologia estritamente mais forte deixa de preservar a conexidade. Nesse contexto, as topologias de Sierpiński emergem como elementos de destaque, pois representam exatamente o ponto de transição entre a preservação e a perda da conexidade. Elas se configuram como fronteiras dentro de $Top(X)$, marcando o limite superior das topologias que mantêm o espaço conexo. A análise dessas estruturas evidencia como a organização hierárquica das topologias permite compreender com maior profundidade a estabilidade dos invariantes topológicos em relação à inclusão. Conclui-se que, ao estudar cadeias de topologias com base em um invariante fixado, é possível determinar níveis de estabilidade e ruptura de propriedades fundamentais, o que abre caminho para generalizações envolvendo outros invariantes além da conexidade e para o desenvolvimento de uma abordagem sistemática na identificação dessas topologias.

Palavras-chave: Topologia; cadeias; conexidade; invariantes topológicos.

1 Introdução

O estudo de topologias e suas propriedades invariantes está entre os temas mais fundamentais da matemática moderna. Desde a consolidação da Topologia como disciplina autônoma no século XX, a noção de *estrutura topológica* tornou-se um alicerce para diversas áreas, da

análise real à geometria diferencial. Dentro desse panorama, compreender como as topologias podem ser organizadas e comparadas é essencial para a análise da estabilidade de propriedades sob transformações estruturais.

Um conjunto não-vazio X pode ser municiado por inúmeras topologias distintas, todas compreendidas entre a topologia trivial, a mais fraca possível, e a topologia discreta, a mais forte. O conjunto de todas as topologias sobre X , denotado por

$$\text{Top}(X) = \{\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{T} \text{ é topologia em } X\},$$

é, por si só, um objeto matemático de grande interesse. Quando munido da relação de inclusão $\subseteq$, torna-se um conjunto parcialmente ordenado (poset), rico em propriedades combinatórias e algébricas.

Em Topologia Geral, investigar a estrutura de $\text{Top}(X)$ permite compreender como propriedades globais de espaços topológicos emergem ou se perdem conforme a topologia é refinada. Fixado um invariante topológico p , isto é, uma propriedade preservada por homeomorfismos, surge naturalmente a questão: como esse invariante se comporta dentro da hierarquia de $\text{Top}(X)$? Quais topologias o preservam, e quais o destroem?

Neste trabalho, analisaremos especificamente o invariante da **conexidade**. O interesse em estudar esse caso decorre de duas razões principais: (i) a conexidade é uma das propriedades topológicas mais fundamentais e intuitivas, relacionada à impossibilidade de decompor o espaço em partes disjuntas abertas; e (ii) seu comportamento sob inclusão de topologias é particularmente instrutivo, pois exhibe estabilidade sob enfraquecimento e fragilidade sob fortalecimento.

Nosso objetivo é identificar e caracterizar as topologias que delimitam o ponto exato de ruptura da conexidade. Em outras palavras, queremos descrever as fronteiras dentro de $\text{Top}(X)$ que separam as topologias que preservam o invariante das que o perdem.

O desenvolvimento teórico é acompanhado por exemplos concretos em conjuntos finitos, nos quais é possível enumerar todas as topologias possíveis e observar diretamente os fenômenos de transição e estabilidade. Com isso, pretendemos não apenas demonstrar resultados formais, mas também construir uma intuição geométrica e combinatória sobre a estrutura de $\text{Top}(X)$.

2 Desenvolvimento

Para desenvolver esse trabalho, relembramos definições importantes que são de grande uso no trabalho, como comparabilidade de topologias, cadeias, elementos maximais e invariantes topológicos. Também apresentamos a prova de que se $(X, \mathcal{S})$ é um espaço topológico conexo e $\mathcal{T}$ é uma topologia mais fraca que $\mathcal{S}$, então $(X, \mathcal{T})$ também é um espaço topológico conexo.

2.1 Definições preliminares

Definição. Sejam X um conjunto e $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. A coleção $\mathcal{T}$ é uma topologia em X se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- $(\emptyset \in \mathcal{T}) \wedge (X \in \mathcal{T})$
- $(n \in \mathbb{N}) \wedge (U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}) \implies \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$
- Para $i \in \mathcal{I}$ e $U_i \in \mathcal{T} \implies \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$

Definição. Um *espaço topológico* é um par $(X, \mathcal{T})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma *topologia* em X .

Definição. Sejam $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(X, \mathcal{T}_2)$ dois espaços topológicos sobre o mesmo conjunto X . Dizemos que $\mathcal{T}_1$ é **mais fraca** que $\mathcal{T}_2$ se $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Se a inclusão é estrita, escrevemos $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$.

Definição. Uma **cadeia de topologias** em X é uma família $\mathcal{C} \subseteq \text{Top}(X)$ tal que, para quaisquer $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{C}$, tem-se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ ou $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$.

Definição. Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espaços topológicos. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow Y$ é um *homeomorfismo*, se f é *bijetora*, *contínua* e f^{-1} é *contínua*. Neste caso, dizemos que $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ são *homeomorfos*.

Definição. Um **invariante topológico** é uma propriedade p tal que, se $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ são homeomorfos, então $(X, \mathcal{T}_1)$ satisfaz p se e somente se $(Y, \mathcal{T}_2)$ também satisfaz p .

Definição. Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito *conexo* se, dados $A, B \in \mathcal{T}$ tais que $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$, tem-se que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

2.2 Preservação da conexidade sob enfraquecimento

Proposição. Se $(X, \mathcal{S})$ é um espaço conexo e $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$, então $(X, \mathcal{T})$ também é conexo.

Demonstração. Suponha que $(X, \mathcal{T})$ não seja *conexo*. Então existem $A, B \in \mathcal{T}$ tais que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$, $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. Por hipótese $A, B \in \mathcal{S}$. Como $(X, \mathcal{S})$ é *conexo*, então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Portanto, ao enfraquecer uma topologia que faz um espaço topológico ser *conexo*, a topologia obtida também faz o espaço ser *conexo*. $\square$

Exemplo. Tendo um conjunto $X = \{a, b\}$, a topologia trivial $\mathcal{T}$ e a topologia discreta $\mathcal{S}$, tem-se que $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ e que $(X, \mathcal{T})$ é *conexo*, mas $(X, \mathcal{S})$ é *desconexo*, porque $a, b \in \mathcal{S}$, $a \cup b = X$, $a \cap b = \emptyset$, porém $a \neq \emptyset$ e $b \neq \emptyset$.

Exemplo. Tendo o conjunto $X = \{a, b\}$, a topologia trivial $\mathcal{T}$ e a topologia de Sierpiński $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, tem-se que $(X, \mathcal{T})$ é *conexo* e $(X, \mathcal{S})$ também é, porque os únicos $A, B \in \mathcal{S}$ que cumprem $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$ são $\emptyset$ e X .

Tendo em vista os últimos dois exemplos, investiga-se, a partir desses exemplos, a existência de uma topologia máxima que preserve a conexidade.

Exemplo. Para ilustrar, consideremos o conjunto $X = \{a, b\}$. As possíveis topologias sobre X são:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, X\} \quad (\text{trivial}), \\ \mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, \{a\}, X\}, \\ \mathcal{T}_3 &= \{\emptyset, \{b\}, X\}, \\ \mathcal{T}_4 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} \quad (\text{discreta}).\end{aligned}$$

A coleção das topologias que preservam a conexidade é:

$$\text{Top}(X, p) = \{\mathcal{T}_{triv}, \mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b\}.$$

Sabemos que $(X, \mathcal{T}_1)$ é conexo, pois não há abertos não-vazios próprios. Já $(X, \mathcal{T}_4)$ é desconexo, pois X é a união disjunta dos abertos $\{a\}$ e $\{b\}$. As topologias $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_3$ são conhecidas como topologias de Sierpiński. Ambas conferem conexidade ao espaço, mas qualquer topologia mais forte (no caso, a discreta) destrói essa propriedade.

2.3 Cadeias e estabilidade de invariantes

O estudo de cadeias em $\text{Top}(X)$ permite visualizar a hierarquia de preservação de um invariante. Por exemplo, para o caso anterior, temos a cadeia:

$$\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2 \subsetneq \mathcal{T}_4.$$

A conexão é preservada em $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, mas perdida em $\mathcal{T}_4$. Assim, a topologia de Sierpiński marca o limite superior da conexidade dentro dessa cadeia.

De modo geral, se $\mathcal{C}$ é uma cadeia maximal em $\text{Top}(X)$, podemos definir o subconjunto

$$\mathcal{C}_p = \{\mathcal{T} \in \mathcal{C} \mid (X, \mathcal{T}) \text{ é conexo}\}.$$

Esse subconjunto é fechado inferiormente e contém, em sua fronteira superior, as topologias críticas. Essas observações sugerem uma estrutura em camadas dentro de $\text{Top}(X)$ em função de um invariante p .

3 Conclusão

Os resultados obtidos ao longo deste trabalho evidenciam que o comportamento da conexidade dentro do conjunto parcialmente ordenado $\text{Top}(X)$ apresenta uma estrutura de estabilidade bem definida. Verificou-se que, quando uma topologia $\mathcal{S}$ confere conexidade ao espaço $(X, \mathcal{S})$, todas as topologias mais fracas do que ela preservam tal propriedade. No entanto, o fortalecimento da topologia pode provocar a ruptura da conexidade, o que introduz uma assimetria fundamental no modo como o invariante se comporta sob inclusão.

A análise detalhada do caso $X = \{a, b\}$ serviu como laboratório conceitual para compreender a natureza dessa ruptura. Observou-se que as topologias de Sierpiński ocupam uma posição crítica, ou seja, topologias de Sierpiński são conexas máximas, representando o limite superior das topologias que preservam a conexidade. Esse fato fornece uma intuição geométrica sobre a fronteira entre a estabilidade e a instabilidade topológica dentro de uma cadeia maximal. A partir dessa observação, é possível interpretar as topologias críticas como *pontos de transição* entre fases de preservação e perda do invariante.

Do ponto de vista teórico, o estudo dessas cadeias sugere que a estrutura de $\text{Top}(X)$, embora extremamente vasta, apresenta regiões de regularidade organizadas segundo o comportamento de invariantes. Essa perspectiva pode ser explorada em investigações futuras por meio da introdução de uma noção de *topologia limite* de preservação de propriedades, bem como pela caracterização de conjuntos de topologias maximais e minimais em relação a um invariante dado.

Em termos didáticos, a construção de exemplos finitos — como o caso do conjunto de dois pontos — permite visualizar concretamente a interação entre estrutura de conjuntos e comportamento topológico, oferecendo uma via acessível para compreender noções abstratas de ordem, inclusão e invariância. Esse tipo de abordagem é especialmente útil na formação inicial em Topologia, pois traduz conceitos formais em situações de fácil manipulação.

Por fim, conclui-se que o estudo das cadeias de topologias sob a ótica de invariantes não apenas enriquece a compreensão sobre o espaço $\text{Top}(X)$, mas também abre caminhos para o desenvolvimento de uma abordagem sistemática de análise estrutural de propriedades topológicas. As topologias críticas, ao demarcarem o ponto de ruptura de invariantes, constituem um elemento central na compreensão da dinâmica interna da hierarquia das topologias e, portanto, representam um objeto de interesse tanto teórico quanto pedagógico na Topologia contemporânea. Estudos futuros poderão aplicar o mesmo raciocínio a outros invariantes, como compacidade e separabilidade.

Referências

MUNKRES, J. R. **Topology**, 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

KÜHLKAMP, N. **Introdução à Topologia Geral**, 3. ed. Florianópolis: EdUFSC, 2016.

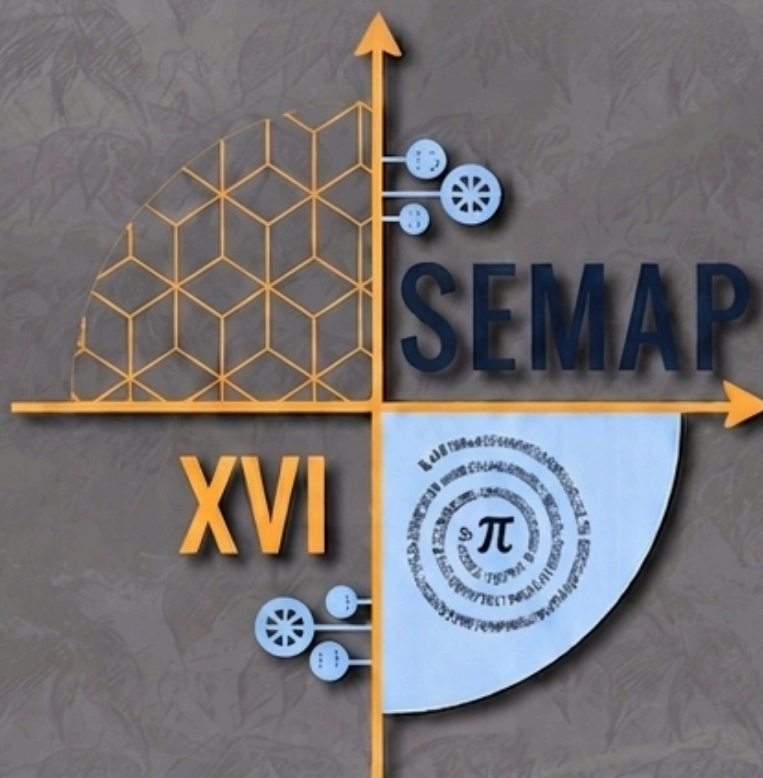
FAJARDO, R. A. S. **A teoria dos conjuntos e os fundamentos da matemática**, São Paulo: Edusp, 2024

LIMA, E. L. **Curso de Análise**, 12. ed., Rio de Janeiro: SBM - Coleção Projeto Euclides, 2004. v. 1.

VIEIRA, M. G. O.; SOUSA, I. G. S. **Invariantes Contínuos Diretos**. SEMAP, 2019.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 6, ed. IMPA, 2020.

HOMENAGEM AOS 15 ANOS DO PET MATEMÁTICA PONTAL



Petianos do PET Matemática Pontal

2011 a 2025

FÁBIO RODRIGUES SILVA

ÊNIO MARQUES MUNIZ JÚNIOR

IZABELA VIEIRA FONSECA

JEANE VILELA SILVEIRA

RANIELLE FELIPE BRITO DE FREITAS

MAGNA PAULINA DE SOUZA FERREIRA

JOSÉ HENRIQUE SOUZA BRAZ

BRUNA LUIZA DE FARIA REZENDE

LAIO COELHO FERREIRA

SIDNEY RIBEIRO DA SILVEIRA

IEDA FERREIRA SILVA

ANGÉLICA LOURENÇO OLIVEIRA

JAMES HUDSON ANTONIETTI BEGO

HEINRICH DA SOLIDADE SANTOS

ARIANNE ALVES DA SILVA

MIRIANNE ANDRESSA SILVA SANTOS

AQUISSON THEYLLON GOMES DA SILVA

MIZAEAL BORGES CAMPOS NETTO

HIGOR LUIZ DO NASCIMENTO DANTAS FERNANDES

FERNANDA ALVES CAIXETA

MARIA VICTÓRIA PAULINO DE SOUZA

ANDERSON DE SOUZA SANTOS

PAULO CÉSAR RODRIGUES SOUZA SILVA

QUEZIA CRISTIANE DE OLIVEIRA MAIA

ANDREZA BEATRIZ JACINTO DA SILVA

RAFAEL MAFRA BARBOSA

REBECA VIEIRA MACEDO

BERTRAND LUIZ CORRÊA LIMA

RICARDO DE OLIVEIRA MUNIZ JÚNIOR

DANIEL ALVES DA SILVA

JORDI FARIA ALVES

VITOR MARQUES BARBOSA

ANDRÉ LUIS MARTINS TOMAZ DA SILVA

LUANA BARBOSA DA SILVA

VITOR HUGO MUNIZ OLIVEIRA

PAULO RICARDO DE ANDRADE OLIVEIRA

NATÁLIA OLIVEIRA DO NASCIMENTO

WELTON COSTA LAVÉRCIO

ROBERTA AGNES MENDES MELO

BEATRIZ AKIRIA DE ASSIS QUARESMA

IGOR GABRIEL SANTOS DE SOUSA

IALLY ALVES BATISTA PEREIRA

LUCAS RODRIGUES DA SILVA

MATHEUS SILVEIRA CAMPOS

AMANDA VITÓRIA DE JESUS MENDES

LAURINDA APARECIDA FERREIRA DE MORAIS

LORRAINE SILVA GONÇALVES

FELIPE FARIAS ALVES

VITOR ALEXANDRE QUIRINO DE SOUZA

ANA CLÁUDIA GONÇALVES MOREIRA

SILAS SILVEIRA CAMPOS

CARLA SOARES LIMA

EDUARDA CRISTINA SILVA

GUILHERME SILVA GONDIN DE OLIVEIRA

HENRIQUE VIEIRA DOS SANTOS BRITO

MATHEUS FELIPE CALU ROCHA

GIOVANNA GRAZIELY SILVA SANTOS

EULINA NETA DE PAULA SANTOS

IGOR HENRIQUE FERREIRA DA COSTA

EDUARDO ROCHA DE PAULA

MARIANA APARECIDA MENDES DA CRUZ OLIVEIRA

PAULO HENRIQUE CAVALINI ELIAS JÚNIOR

JOSÉ ANTÔNIO ALVES QUEIROZ

SAMARA APARECIDA PARREIRA ARAUJO SILVA

FELIPE JUN LONG JIANG

ELDER NUNES FLORÊNCIO DA SILVA

GUILHERME MARTINS FERREIRA

LUIZ CARLOS SOBRAL DE SANTANA

MIGUEL SABINO RODRIGUES DA CUNHA

MARIA LUIZE RIBEIRO DE FREITAS

ARIEL SILVA DE ABREU

ANNA LAURA ALVES VILELA



Tutores do PET Matemática Pontal

2011 a 2025

Tânia Maria Machado de Carvalho

Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira

Evaneide Alves Carneiro

XVI SEMAP – 2025

Período de tutoria — Profa. Tânia Carvalho

Homenagem aos 15 anos do PET Matemática Pontal



Primeira turma do PET Matemática Pontal, 2011.



Primeira sala do PET Matemática Pontal.



PET Matemática Pontal em Iquara.



Encontro dos grupos PET UFU, 2012.



Integrantes do PET Matemática Pontal.



Registro de reunião semanal do grupo



Participação do grupo na VI SEMAP.



Comemoração do aniversário da tutora, Profa. Tânia Carvalho.



PET Matemática Pontal, Prof. Marcelo Vieira e prof^a. Odaléa Viana



PET Matemática Pontal em foto oficial.



Momento de descontração na atividade Ação nos Bairros.



O grupo prestigiando evento



Viagem do grupo a Ouro Preto.



Noite de reencontro do PET Matemática Pontal na casa das Massas.



Homenagem de despedida da tutora, Profa. Tânia Carvalho.

XVI SEMAP - 2025

Período de tutoria - Prof. Marcelo Vieira

Homenagem aos 15 anos do PET Matemática Pontal



16 de março de 2017



20 de março de 2017



08 de abril de 2017



08 de abril de 2017



08 de abril de 2017



01 de agosto de 2017



22 de outubro de 2018



06 de agosto de 2019



19 de novembro de 2020



25 de janeiro de 2021



06 de maio de 2022



07 de julho de 2022



22 de novembro de 2022



02 de dezembro de 2022 - 12 anos do PET Matemática Pontal

XVI SEMAP - 2025

Período de tutoria - Profa. Evaneide Carneiro

Homenagem aos 15 anos do PET Matemática Pontal



06/06/2023: Reunião Ordinária



07/2023: Final das Olimpíadas Pitagóricas



20/05/2024: Recepção dos Calouros dos cursos de Matemática



04/06/2024: Reunião Ordinária e Clube do Livro



21/03/2025: Reunião ordinária e recepção de novos petianos



29/04/2025: Confraternização e Clube do Livro



01/07/2025: Reunião ordinária



22/07/2025: PET Intercâmbio e Clube do Livro



20/09/2025: Oficina IA na Educação, em parceria com o PIBID (Subprojeto Pedagogia Alfabetização)



30/11/2025: Equipe organizadora da III MATRun



30/11/2025: Pódio feminino, categoria UFU - III MATRun