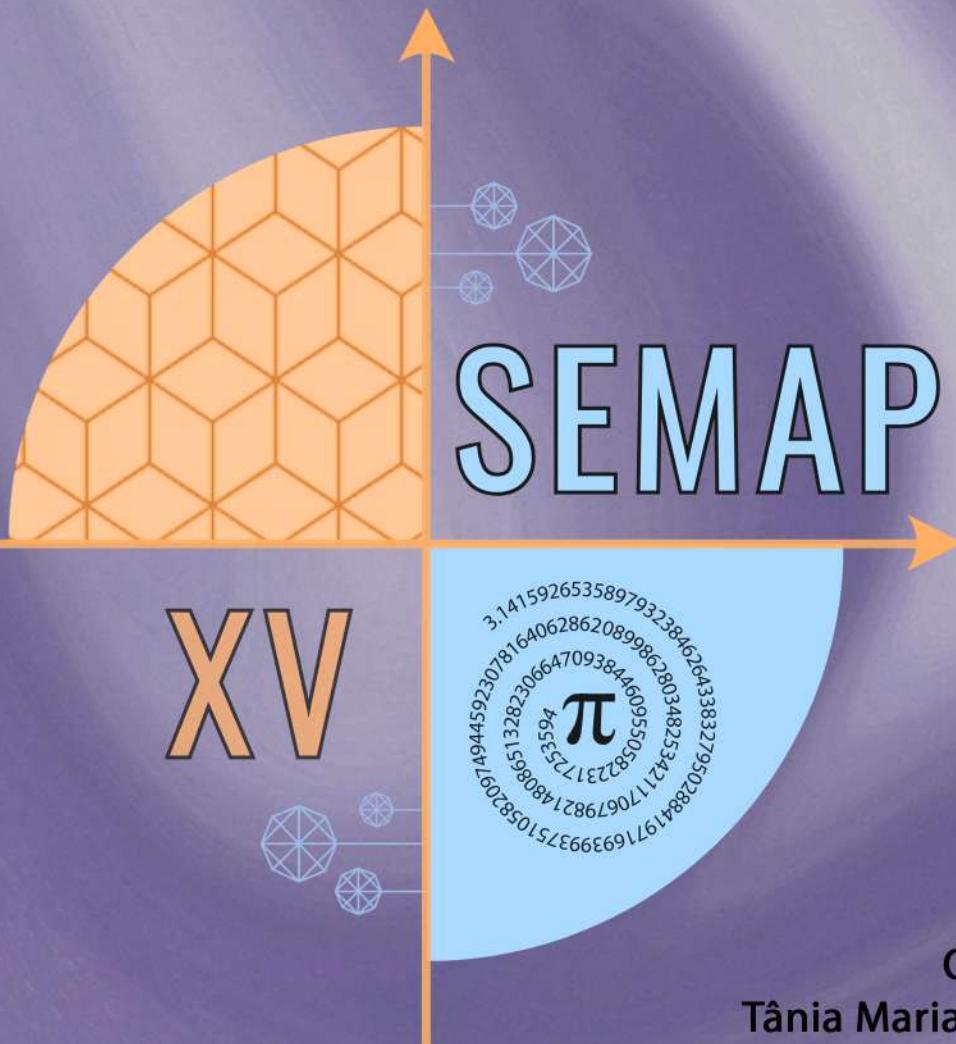


# XV SEMANA DE MATEMÁTICA DO PONTAL

ISBN: 978-65-01-48589-8



Organização:  
Tânia Maria Machado de Carvalho

**XV SEMANA DE MATEMÁTICA**  
**DO PONTAL**  
**(ANAIS)**

Ituiutaba - MG  
2024

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Semana de Matemática do Pontal  
(15. : 2024 : Ituiutaba, MG)  
XV Semana de Matemática do Pontal [livro eletrônico] / organização Tânia Maria Machado de Carvalho. -- Ituiutaba, MG : Ed. dos Autores, 2025.  
PDF

Vários autores.  
Bibliografia.  
ISBN 978-65-01-48589-8

1. Matemática 2. Palestras e conferências  
I. Carvalho, Tânia Maria Machado de. II. Título.

25-274129

CDD-510

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Matemática 510

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

DOI:  
10.6084/m9.figshare.29332934

ISBN: 978-65-01-48589-8

Disponível em:

[https://figshare.com/articles/book/XV\\_SEMANA\\_DE\\_MATEMATICA\\_DO\\_PONTAL/29332934?file=55426508](https://figshare.com/articles/book/XV_SEMANA_DE_MATEMATICA_DO_PONTAL/29332934?file=55426508)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS DO PONTAL

Campus Pontal - Bloco C - Sala 1º piso  
Rua Vinte - 1600 - Bairro Tupã  
Ituiutaba - MG - CEP 38304-402

*Reitor*  
Carlos Henrique de Carvalho

*Vice-reitor*  
Catarina Machado Azeredo

*Diretora do ICENP - UFU*  
Rosana Maria Nascimento de Assunção

*Coordenador dos Cursos de Matemática do ICENP - UFU*  
Marcelo Gonçalves de Oliveira Vieira



Esta obra está licenciada com uma Licença [CC BY](#).



## ORGANIZAÇÃO E EDITORAÇÃO

Tânia Maria Machado de Carvalho - ICENP/UFU

## CONSELHO REVISOR

Prof. Dr. Alessandro Santana Martins - IFTM ITUIUTABA  
Prof. Dr. André Ferreira e Pereira - IFTM ITUIUTABA  
Prof. Dr. André Luiz França Batista - IFTM ITUIUTABA  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira - ICENP/UFU  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Evaneide Alves Carneiro - ICENP/UFU  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Franciella Marques da Costa - UFU/ICENP  
Prof. Dr. Homero Ghioti da Silva - ICENP/UFU  
Prof. Dr. João Carlos Moreira - ICENP/UFU  
Prof. Dr. Wallisom da Silva Rosa - ICENP/UFU  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho - ICENP/UFU  
Prof. Dr. Vlademir Marim - FACED/UFU

## CAPA

Otávio Machado Pinheiro de Carvalho

## COMISSÃO ORGANIZADORA DA XIV SEMAP

Presidente: Prof. Dr. Alisson Rafael Aguiar Barbosa - ICENP/UFU

Coordenadores de Comissões:

Prof<sup>a</sup>. Dra. Evaneide Alves Carneiro - Coordenadora da Comissão de Assuntos Gerais  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Milena Almeida Leite Brandão - Coordenadora da Comissão de Divulgação  
Prof. Dr. Moisés Rodrigues Cirilo do Monte - Tesoureiro  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho - Presidente da Comissão Científica  
Prof. Dr. Wallisom da Silva Rosa - Coordenador da Comissão Cultural

**Docentes**

Prof. Dr. André Ferreira e Pereira  
Prof. Dr. Edward Luis Araújo  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Franciella Marques da Costa  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Gabriella de Freitas Alves  
Prof. Dr. Homero Ghioti da Silva  
Prof. Dr. José Laércio Doricio  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Lais Cristina Viel Gereti  
Prof. Dr. Marcelo Gonçalves O. Vieira  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Miliam Juliana A. Ferreira  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Patrícia Borges dos Santos  
Prof. Dr. Rogério Fernando Pires  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Vanda Maria Luchesi

**Técnicos****Discentes**

Dayane Alves de Oliveira  
Edis Donizeti Borges  
Eduarda Cristina Silva  
Elder Nunes Florêncio da Silva  
Felipe Jun Long Jiang  
Giovanna Graziely Silva Santos  
Guilherme Martins Ferreira  
Henrique Vieira dos Santos Brito  
Igor Henrique Ferreira da Costa  
José Antônio Alves Queiroz  
Paulo Henrique Cavalini Elias Junior  
Samara Aparecida Ferreira Araujo

Viviane de Andrade V. Almeida

**COMISSÃO CIENTÍFICA**

Prof<sup>a</sup>. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho (Presidente) - ICENP/UFU  
Prof. Dr. Alessandro Santana Martins - IFTM ITUIUTABA  
Prof. Dr. André Ferreira e Pereira - IFTM ITUIUTABA  
Prof. Dr. André Luiz França Batista - IFTM ITUIUTABA  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira - ICENP/UFU  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Franciella Marques da Costa - ICENP/UFU  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Gabriella de Freitas Alves - ICENP/UFU  
Prof. Dr. Homero Ghioti da Silva - ICENP/UFU  
Prof. Dr. João Carlos Moreira - ICENP/UFU  
Prof. Dr. Vlademir Marim - ICENP/UFU

---

## ATIVIDADES DA XV SEMAP

### MESA REDONDA

Tema: Os impactos da inteligência artificial no ensino de matemática.

Debatedores: Prof. Dr. André Souza Lemos, Prof. Dr. Attila Silva Martins, Prof. Daniel Alves da Silva.

Mediação: Prof. Dr. Henrique V. S. Brito.

### MINICURSOS

Transformações na Matemática: tecnologias e IA.

Ministrante: Prof. Daniel Alves da Silva.

Robótica com Modelix: Montagem e Programação.

Ministrante: Profa. Dra. Milena Almeida Leite Brandão.

### PALESTRAS

Ciência de dados no esporte: desvendando o jogo por meio da análise.

Palestrante: Prof. Dr. André Luiz França.

Cassinos, gatos, asteroides e a fascinante arte de analisar dados.

Palestrante: Prof. Dr. Pedro Franklin Cardoso Silva.

Aguilhas de Buffon: retas e entortadas!

Palestrante: Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino.

Matemática humanista em tempos de propagação de ódio.

Palestrante: Prof. Dr. Carlos Eduardo Mathias Motta.

A matemática e o mercado de trabalho: uma visão além da academia.

Palestrante: Prof. Dr. Attila Silva Martins.

### APRESENTAÇÕES DE TRABALHOS

Análise da AMBEV e ITAUSA usando fluxo de caixa descontado como investimentos de longo prazo

Apresentador: Felipe Jun Long Jiang

Aplicação do teorema do valor médio para controle de velocidade de veículos em rodovias pedagiadas

Apresentadora: Samara Aparecida Parreira Araujo Silva

Corrida de rua: análise de fatores relacionados ao desempenho de corredores de cinco quilômetros utilizando regressão linear múltipla  
Apresentadora: Eduarda Cristina Silva

Equações diferenciais aplicadas em circuitos em série  
Apresentador: Vitor Emanuel da Silva Ferreira Barbosa

Funções contínuas em intervalos fechados e o teorema do valor intermediário  
Apresentadora: Elmira Rosa Silva de Melo

Jogos no ensino de ciências e matemática: relatos e reflexões  
Apresentador: Marcelo Parreira de Oliveira

Números transcendentais: números de Liouville e de Euler  
Apresentador: Denilson Rodrigues Junior

Teoremas de Hahn-Banach e algumas aplicações  
Apresentadoras: Lorena Bezerra de Almeida

Topologia generalizada  
Apresentador: Henrique Vieira dos Santos Brito

Um comparativo de investimentos entre renda fixa e renda variável para carteira de investimentos a longo prazo  
Apresentador: Guilherme Martins Ferreira

Uma aplicação do cálculo diferencial para determinar o volume máximo de uma caixa  
Apresentador: Gabriel Henrique Féo de C. Malvino

Uma introdução à teoria de semigrupos lineares com aplicação à equação de onda  
Apresentador: Ially Alves Batista Pereira

## Apresentação

É com grande satisfação que apresentamos os anais da XV Semana de Matemática do Pontal (XV SEMAP), realizada entre os dias 6 e 8 de novembro de 2024, pelos Cursos de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Este evento reuniu pesquisadores, estudantes e profissionais de diversas instituições, promovendo um espaço rico para o intercâmbio de ideias e o fortalecimento de redes de colaboração.

Para um evento científico regional, completar 15 edições em um contexto de desinteresse geral e ataques à ciência é um desafio, que consideramos enfrentado com louvor pela SEMAP, e isto pode ser evidenciado pela disposição do público presente em debater os temas apresentados. Nesta edição, como era de se esperar, um tema se destacou ao longo das discussões que se seguiram às palestras e apresentações de trabalho: a inteligência artificial. Desde discussões mais técnicas sobre o surgimento e funcionamento das IAs, até questões mais teóricas ou até filosóficas, vimos um debate rico e esclarecedor para os que nele tomaram parte, inclusive os ouvintes.

Ao longo de três dias, a XV SEMAP ofereceu uma programação diversificada, que incluiu sessões de comunicações orais, minicursos, palestras e uma mesa redonda, abordando temas que refletem a interdisciplinaridade e a relevância da matemática no mundo contemporâneo. Desde aplicações práticas, como a análise de dados no esporte, investimentos e robótica, passando por análises estatísticas e debates na área educacional, até discussões teóricas sobre transformações na matemática e os impactos da inteligência artificial no ensino, o evento proporcionou um ambiente fértil para o debate e a reflexão.

Nestes anais, estão compilados os trabalhos apresentados nas sessões de comunicações, organizados de acordo com a programação do evento. Cada contribuição representa um esforço significativo de investigação, destacando-se pela relevância e diversidade dos temas abordados. Desejamos que a leitura inspire curiosidade e norteie novas pesquisas nos campos da Matemática e áreas afins, favorecendo assim a busca por inovações, que é um dos pilares que nortearam a criação da SEMAP.

**Evaneide Alves Carneiro**  
**Universidade Federal de Uberlândia**

---

## Sumário

### Trabalhos Completos

1. Aplicação do teorema do valor médio para controle de velocidade de veículos em rodovias pedagiadas .....	9
Samara Aparecida Parreira Araujo Silva	
2. Análise da AMBEV e ITAUSA usando fluxo de caixa descontado como investimentos de longo prazo .....	18
Felipe Jun Long Jiang; Homero Guiotti	
3. Corrida de rua: análise de fatores relacionados ao desempenho de corredores de cinco quilômetros utilizando regressão linear múltipla .....	24
Eduarda Cristina Silva; Gabriella de Freitas Alves	
4. Equações diferenciais aplicadas em circuitos em série .....	35
Pedro Lucas Alves Vieira; Vitor Emanuel da Silva Ferreira Barbosa; Gabriela Costa de Oliveira	
5. Funções contínuas em intervalos fechados e o teorema do valor intermediário .....	42
Elmira Rosa Silva de Melo; Elisa Regina dos Santos (orientadora)	
6. Jogos no ensino de ciências e matemática: relatos e reflexões .....	50
Marcelo Parreira de Oliveira; Vlademir Marim; Bruna Cassiane de Oliveira Silva; Ryan Custodio Amsy Silva	
7. Números transcendentais: números de Liouville e de Euler .....	59
Denilson Rodrigues Junior; Daniel Cariello	
8. Teoremas de Hahn-Banach e algumas aplicações .....	67
Lorena Bezerra de Almeida; Elisa Regina dos Santos	
9. Topologia Generalizada .....	76
Henrique Vieira dos Santos Brito; Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira	
10. Um comparativo de investimentos entre renda fixa e renda variável para carteira de investimentos a longo prazo .....	88
Guilherme Martins Ferreira; Eduardo Rocha de Paula; Homero Ghioti da Silva	
11. Uma aplicação do cálculo diferencial para determinar o volume máximo de uma caixa .....	96
Gabriel Henrique Féo de Castro Malvino; Natanael Alves Rocha; Nicholas Augusto Gomes Da Silva Machado	
12. Uma introdução à teoria de semigrupos lineares com aplicação à equação de onda .....	103
Ially Alves Batista Pereira; Alisson Rafael Aguiar Barbosa	

# TRABALHOS



## COMPLETOS

### XV SEMAP

# 2024



## Aplicação do teorema do valor médio para controle de velocidade de veículos em rodovias pedagiadas

Samara A. Parreira Araujo Silva

Universidade Federal de Uberlândia

samara.parreira@ufu.br

Wallisom da Silva Rosa

Universidade Federal de Uberlândia

wallisom@ufu.br

**Resumo.** Neste trabalho estudaremos dois dos principais teoremas da Análise Matemática: o Teorema do Valor Médio e o Teorema de Rolle. Além de revisar os fundamentos teóricos por trás desses teoremas, analisaremos a relação entre os conceitos da Física, como a velocidade média e instantânea, com o Teorema do Valor Médio (TVM), e subsequentemente, apresentaremos uma proposta de aplicação deste teorema em uma situação do cotidiano: o controle de velocidade de veículos em rodovias pedagiadas. O Teorema do Valor Médio pode ser aplicado para verificar se um condutor excedeu o limite de velocidade máxima permitida pela via, ao longo de um percurso monitorado por praças de pedágio, que servem como pontos fixos de medição de intervalos de tempo entre uma distância fixa, permitindo a fiscalização da velocidade média dos veículos ao longo do trajeto. Esta abordagem matemática oferece uma alternativa complementar aos radares tradicionais, contribuindo para uma fiscalização mais abrangente.

**Palavras-chave:** Teorema do valor médio; Controle de velocidade; Velocidade Média.

### Introdução

Uma das principais aplicações da derivada na Física é o conceito de velocidade instantânea. Se uma partícula se desloca no tempo  $t$  e sua função de deslocamento é calculada por  $S = S(t)$ , então a derivada de  $S(t)$ , em relação a  $t$ , é sua velocidade instantânea  $v(t) = dS/dt$ . Logo, do ponto de vista da Física, o Teorema do Valor Médio afirma que em uma trajetória suave (portanto, contínua), qualquer objeto atinge a sua velocidade média de percurso em algum instante de tempo. Baseando-se nesta ideia, ao analisar a velocidade média de um veículo em um determinado trecho, é possível inferir com precisão, por consequência do Teorema do Valor Médio, se o condutor ultrapassou o limite de velocidade em algum ponto (Queiró, 2020).

Este artigo tem como principal objetivo demonstrar a aplicação prática do Teorema do Valor Médio no controle de velocidade em rodovias pedagiadas. Para isso, busca-se explicar o conceito do teorema e sua relevância na análise da velocidade média de veículos ao longo

da rodovia BR-365, sentido Ituiutaba-MG à Uberlândia-MG, passando pelas praças de pedágio nos km 704 e km 645, em um intervalo de tempo dado. Assim, com base no Teorema do Valor Médio, essa abordagem permite identificar precisamente os veículos que excederam a velocidade máxima permitida no trecho analisado.

Portanto, a proposta de utilizar o Teorema do Valor Médio para monitorar a velocidade de veículos, oferece uma alternativa complementar aos radares tradicionais, que desempenham um papel crucial na fiscalização do trânsito. Segundo (Rizzotto, 2021, p. 9), a utilização de medidores de velocidades “Inibe os abusos de velocidade e contribui para a redução da velocidade média, consequentemente dos acidentes, vítimas, danos materiais e contaminação do meio ambiente” sendo assim uma alternativa para assegurar a segurança nas vias.

## 1 O Teorema do Valor Médio

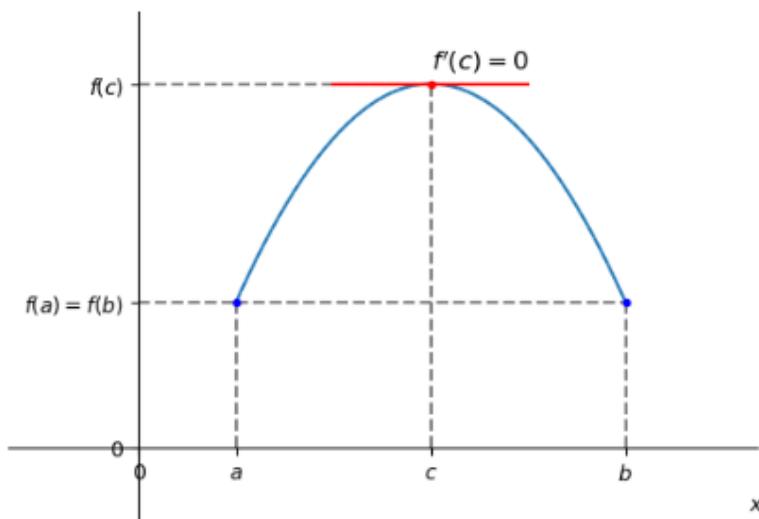
Antes de apresentar o Teorema do Valor Médio, vamos enunciar o Teorema de Rolle, pois a partir deste, podemos demonstrar o Teorema do Valor Médio.

### 1.1 Teorema de Rolle

**Teorema 1** (Teorema de Rolle). *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, com  $f(a) = f(b)$ . Se  $f$  é derivável em  $(a, b)$ , então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

A figura I ilustra o Teorema de Rolle

Figura 1: Teorema de Rolle



Fonte: [https://notaspedrok.com.br/notas/CalculoI/cap\\_apderiv\\_sec\\_valormedio.html](https://notaspedrok.com.br/notas/CalculoI/cap_apderiv_sec_valormedio.html)

**Demonstração.** Segundo o Teorema de Weierstrass, se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua no conjunto compacto  $X \subset \mathbb{R}$ , então existem  $x_0, x_1 \in X$  tais que  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$  para todo  $x \in X$ .

Assim, pelo Teorema de Weierstrass,  $f$  atinge seu valor mínimo  $m$  e seu valor máximo  $M$  em pontos de  $[a, b]$ . Caso  $m = f(a)$  e  $M = f(b)$ , ou  $m = f(b)$  e  $M = f(a)$  então como  $f(a) = f(b)$ , tem-se  $m = M$  e  $f$  será constante. Daí  $f'(x) = 0$  para qualquer  $x \in (a, b)$ . Caso  $m \neq M$ , então  $f$  não é constante e deve existir um ponto de mínimo ou de máximo em  $(a, b)$ . Supondo que  $c \in (a, b)$  seja um ponto de máximo ou mínimo, então, como  $f$  é derivável em  $c$ , devemos ter  $f'(c) = 0$ .  $\square$

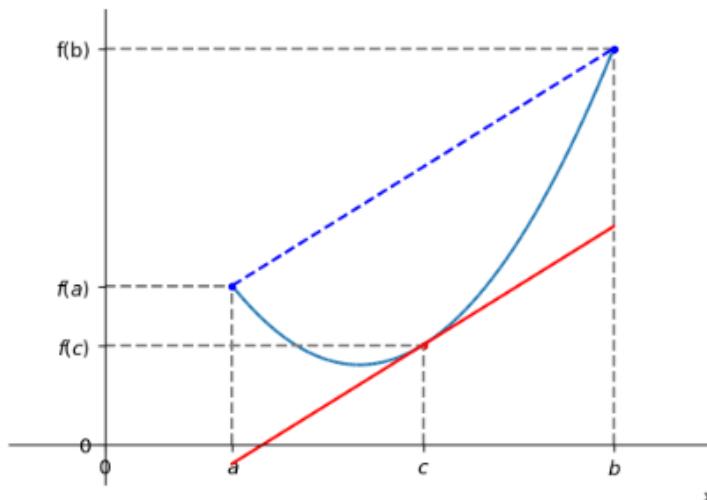
## 1.2 Teorema do Valor Médio

**Teorema 2** (Teorema do Valor Médio). *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Se  $f$  é derivável em  $(a, b)$ , existe  $c \in (a, b)$  tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A figura 2 ilustra o Teorema do Valor Médio

Figura 2: Teorema do Valor Médio



Fonte: [https://notaspedrok.com.br/notas/CalculoI/cap\\_apderiv\\_sec\\_valormedio.html](https://notaspedrok.com.br/notas/CalculoI/cap_apderiv_sec_valormedio.html)

**Demonstração.** Considerando inicialmente a reta que passa pelos pontos  $A = (a, f(a))$  e  $B = (b, f(b))$ , temos:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Essa reta é o gráfico da função  $h$  dada por:

$$h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a). \quad (1)$$

Agora, define-se uma função auxiliar  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que é a diferença entre as funções  $f$  e  $g$  descritas anteriormente. Assim:

$$g(x) = f(x) - h(x).$$

De (I), segue que:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Além disso,  $g(a) = g(b)$ , pois:

- Quando  $x = a$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) + f(a) = 0.$$

- Quando  $x = b$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a) = 0.$$

A função  $g$  também é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ , pois ela é a diferença entre  $f$  e  $h$ . Por isso,  $g$  atende as hipóteses do Teorema de Rolle. Então, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ . E como  $g'(c) = f'(c) - h'(c)$  então

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

e portanto

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

**OBSERVAÇÃO:** O Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio são na verdade equivalentes. Se assumirmos as hipóteses do Teorema de Rolle, como  $f(a) = f(b)$ , temos:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Assim, o Teorema do Valor Médio garante que existe um ponto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ , o que é exatamente o resultado do Teorema de Rolle.

## 2 Velocidades e o funcionamento de um radar

### 2.1 Velocidade Média e Velocidade Instantânea

Considere uma situação na qual uma partícula está se movendo ao longo do eixo  $x$  com uma função de posição  $s = s(t)$ , que nos dá, a cada momento, a posição ocupada pela partícula ao longo do eixo  $x$ . Suponha que essa partícula está em uma determinada posição  $s(t)$ , num momento inicial de tempo  $t$ , e que num instante  $t+x$ , ela está em  $s(t+x)$ . Portanto, no intervalo

de tempo

$$\Delta t = (t + x) - t = x$$

ocorreu uma variação no espaço dado por:

$$\Delta s = s(t + x) - s(t)$$

Assim, a **velocidade média** nesse intervalo é

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + x) - s(t)}{x}$$

Primeiramente, notamos que a velocidade média é determinada ao considerarmos dois momentos específicos no tempo. Se quisermos calculá-la em um instante preciso, podemos utilizar intervalos de tempo  $\Delta t$  cada vez menores, ou seja, fazemos  $x$  tender a 0. Assim, definimos a **velocidade instantânea**  $v(t)$  através do processo de limite da velocidade média, ou seja, é a derivada da função  $s = s(t)$ :

$$v(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + x) - s(t)}{x} = s'(t)$$

**EXEMPLO 1.** No instante  $t = 0$  um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante  $t$  é dada por  $s(t) = 16t - t^2$ .

**a)** Determine a velocidade média do corpo no intervalo de tempo, em horas,  $[2, 4]$ .

*Solução:*

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{[16 \times 4 - (4)^2] - [16 \times 2 - (2)^2]}{2} = \frac{48 - 28}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Portanto, a velocidade média é 10 km/h.

**b)** Calcule a velocidade em  $t = 2$ .

*Solução:* Para calcular a velocidade instantânea, quando  $t = 2$ , basta derivarmos a função  $s(t) = 16t - t^2$  e substituir o tempo dado:

$$\begin{aligned} s'(t) &= 16 - 2t \\ s'(2) &= 16 - 2 \times 2 = 12 \end{aligned}$$

Portanto, a velocidade instantânea quando  $t = 2$  é 12 km/h.

## 2.2 Tipos de medidores de velocidade

Os medidores de velocidades, ou radares, são utilizados pelos órgãos de trânsito para monitorar e conter a velocidade de circulação dos veículos, visando garantir a segurança nas vias, ruas e rodovias. A legislação que regulamenta o uso de equipamentos de medição para a

fiscalização de velocidade, é a Resolução do Conselho Nacional de Trânsito (CONTRAN) n.º 798/2020, e estabelece os diferentes tipos de radares:

Art. 3º Os medidores de velocidade são do tipo:

I - fixo: medidor de velocidade com registro de imagem instalado em local definido e em caráter duradouro, podendo ser especificado como:

a) controlador: medidor de velocidade destinado a fiscalizar o limite máximo de velocidade da via ou de seu ponto específico, sinalizado por meio de placa R-19; ou

b) redutor: medidor de velocidade, obrigatoriamente dotado de display, destinado a fiscalizar a redução pontual de velocidade estabelecida em relação à velocidade diretriz da via, por meio de sinalização com placa R-19, em trechos críticos e de vulnerabilidade dos usuários da via.

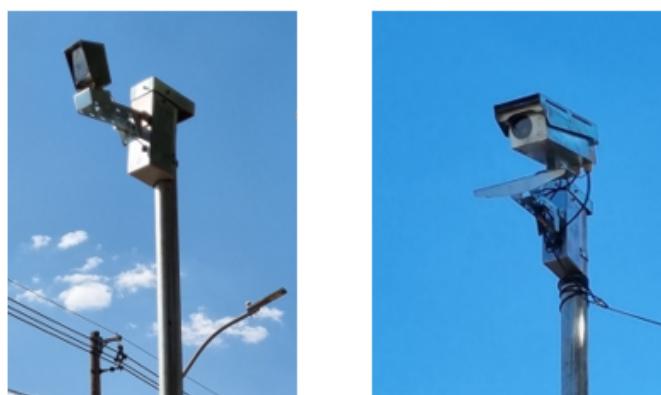
II - portátil: medidor de velocidade com registro de imagem, podendo ser instalado em viatura caracterizada estacionada, em tripé, suporte fixo ou manual, usado ostensivamente como controlador em via ou em seu ponto específico, que apresente limite de velocidade igual ou superior a 60 km/h (Brasil, 2020).

Embora esses dois tipos de medidores de velocidade têm o mesmo objetivo, ou seja, fiscalizar o limite máximo de velocidade regulamentado para o local, eles operam de maneiras distintas (Bandeira, 2023). Assim, neste trabalho, será considerado apenas os radares fixos, por conta de sua funcionalidade.

### 2.3 Radares fixos

O medidor de velocidade do tipo fixo, ou popularmente conhecido como “pardal”, é instalado nas vias, normalmente em postes, e tem a capacidade de registrar imagens. (Veja a figura 3)

Figura 3: Registrador de imagens



Fonte: Autor

Este medidor de velocidade, em específico, opera por meio de sensores eletromagnéticos instalados no asfalto, exatamente onde os veículos transitam. Podemos observar que próximo a esses radares, há duas ou três marcas no chão, seja antes ou depois da instalação, e são nessas marcações onde os sensores são instalados. (Veja a figura 4)

Figura 4: Marcações dos sensores eletromagnéticos sob o asfalto



Fonte: Autor

O funcionamento deste radar utiliza conceitos da Física, pois quando o veículo passa pelos dois sensores instalados sob o asfalto, um sinal é enviado para o sistema, sendo assim possível calcular o tempo que o veículo levou para cruzar a distância, fixa e conhecida, entre um sensor e outro (Bandeira, 2023). Portanto, tendo posse da variação do espaço em um intervalo de tempo, teremos a **velocidade média** do veículo entre os sensores instalados sob o asfalto.

Assim, caso a velocidade média exceda a velocidade permitida pela via, a câmera é acionada e registra a data, horário, local da infração, a velocidade aferida e a placa do veículo. As fotografias são recebidas pelo órgão de trânsito responsável pela via, e com base na análise das imagens, o operador decide se uma infração ocorreu ou não. Se for constatada uma infração, o operador registra os detalhes da multa, que então é enviada ao condutor do veículo.

Com base no cálculo da velocidade média, para garantir que o infrator ultrapassou a velocidade máxima permitida, utilizamos o Teorema do Valor Médio, já que ele garante que em algum instante de tempo, entre os acionamentos dos sensores, a velocidade média foi atingida.

### 3 Proposta de controle de velocidade usando o Teorema do Valor Médio

Uma das aplicações do Teorema do Valor Médio, é na cinemática, uma área de estudo da Física que se ocupa em estudar o movimento dos corpos. Suponhamos que um carro percorreu uma distância de 220 km em 2 horas, e a velocidade média permitida pela via era de 100 km/h. Ao aplicar o Teorema do Valor Médio nesse tipo de situação, conseguimos deduzir que em algum momento do percurso o carro estava a uma velocidade acima do limite permitido, ou seja, de 100km/h. Vejamos, sendo  $s = s(t)$  a função de posição do movimento do carro, e  $t$  o tempo, em horas, contado do início do percurso, pelo Teorema do Valor Médio, se  $s$  for contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ , então existe um  $t \in (0, 2)$  tal que:

$$s'(t) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} = \frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \frac{220 - 0}{2 - 0} = \frac{220}{2} = 110 \text{ km/h}$$

Portanto, em algum instante  $t$  entre o início do percurso e até 2h depois, o carro atingiu uma velocidade média de 110 km/h, que neste caso, é igual à velocidade instantânea do auto-

móvel, ultrapassando o limite permitido pela via. Podemos concluir esse resultado pois como a velocidade instantânea é a derivada da função  $s = s(t)$ , em um ponto  $t \in (0, 2)$ , pelo Teorema do Valor Médio, essa variação instantânea é igual à variação média da função nesse mesmo intervalo.

Um resultado útil desse teorema é que não precisamos nos preocupar, por exemplo, com o tempo exato em que uma partícula possa ter excedido o limite de velocidade média permitido pela via. Apenas tendo posse da distância percorrida, o Teorema do Valor Médio nos garante que em algum instante do tempo gasto para realizar o percurso, as velocidades média e instantânea possam ter ultrapassado, ou não, a velocidade regulamentada pelas leis de trânsito em uma via.

A proposta deste trabalho é aplicar o Teorema do Valor Médio no controle de velocidade em rodovias. Para isso ocorrer, vamos utilizar os serviços de praças de pedágios, cuja distância entre elas é conhecida, como pontos de medição de tempo em que um veículo leva para percorrer o trecho entre ambos. A fiscalização do tempo gasto pelo motorista no percurso é disposta quando o condutor realiza o pagamento do pedágio e recebe um comprovante com o horário de passagem. Assim, a partir do TVM, é possível determinar se o veículo ultrapassou a velocidade média permitida pela via em algum instante.

Diante disso, como um exemplo prático, vamos considerar os dois pedágios, que estão no percurso de um condutor que inicia sua viagem em Ituiutaba-MG, e tem como destino final Uberlândia-MG. Suponha que o veículo passou pela primeira Praça de Pedágio, no km 704, às 15:05 horas, e pela última Praça de Pedágio, no km 645, às 15:32 horas. Portanto, com posse das informações de tempo gasto (0,45 horas) e do módulo do deslocamento (59 km), temos que a velocidade média do veículo é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{59\text{km}}{0,45\text{horas}} \approx 131\text{km/h}$$

Assim, supondo que a velocidade média da via permitida nesse percurso seja de  $110\text{km/h}$ , e que a função posição do veículo seja contínua e diferenciável no intervalo de tempo considerado, o Teorema do Valor Médio afirma que existe algum instante de tempo  $t_0$  em que:

$$s'(t_0) = \frac{59}{0,45} \approx 131\text{km/h}$$

Ou seja, como a velocidade média permitida é de  $110\text{ km/h}$  e a velocidade média do condutor foi de aproximadamente  $131\text{km/h}$ , podemos concluir que o condutor excedeu a velocidade média permitida entre os dois pedágios, sendo assim penalizado.

#### 4 Conclusão

Utilizar o Teorema do Valor Médio como proposta de fiscalização de velocidade dos veículos é uma maneira de incentivar os condutores a manterem-se no limite de velocidade média permitida pela via durante a maioria do percurso, visto que o monitoramento da velocidade

ocorre em um espaço estendido, considerando o tempo que o veículo levou para percorrê-lo.

Entretanto, há alguns problemas referentes a essa proposta. Por exemplo: Se as hipóteses do Teorema do Valor Médio não forem atendidas, ou seja, se a função posição do veículo em função do tempo não for contínua nem diferenciável, no intervalo de tempo considerado, o teorema pode apresentar falhas. Caso o condutor realize uma parada, em algum momento do percurso monitorado, por um tempo considerável, e depois continue a viagem em uma velocidade acima da permitida, o teorema pode erroneamente indicar que ele não atingiu a velocidade máxima, devido ao tempo em que ficou parado. Por isso, também é importante manter os radares tradicionais durante o percurso, para que em pontos cruciais da via o controle de velocidade seja novamente ativado.

Este trabalho, portanto, não sugere excluir os radares de controle de velocidade. Esses dispositivos devem continuar existindo nos pontos principais da rodovia, que exigem um controle imediato de velocidade. Porém, alguns motoristas tendem a reduzir a velocidade apenas ao passar por um radar, e logo depois voltam a exceder. Assim, a combinação de radares e a aplicação do Teorema do Valor Médio oferecem uma fiscalização mais eficaz das infrações causadas pelo excesso de velocidade.

## Referências

BANDEIRA, Renan. Como funciona um radar de velocidade?. **Autoesporte**. Disponível em: <https://autoesporte.globo.com/curiosidades/noticia/2023/10/como-funciona-um-radar-de-velocidade.ghtml> Acesso em: 9 ago. 2024.

BRASIL. Conselho Nacional de Trânsito (CONTRAN). **Resolução nº 798, de 02 de setembro de 2020**. Dispõe sobre requisitos técnicos mínimos para a fiscalização da velocidade de veículos automotores, elétricos, reboques e semirreboques. Ministério dos Transportes: Brasília, 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/transportes/pt-br/assuntos/transito/conteudo-Senatran/resolucoes-contran> Acesso em: 9 ago. 2024.

QUEIRÓ, J. F. Lagrange, as multas e os recordes de atletismo **Gazeta de Matemática**, n. 190, p. 11-13, 2020. Disponível em: <https://gazeta.spm.pt/fichaartigo?id=1536> Acesso em: 9 ago. 2024.

RIZZOTTO, R. A. Indústria da Multa ou Fábrica de Criminosos do Trânsito. **Estrada**, 2021. Disponível em: [https://estradas.com.br/wp-content/uploads/2021/05/Estudo-Radares-\\_Industria-da-Multa\\_ou\\_Fabrica-de-Criminosos-do-Transito-\\_Versao-Final.pdf](https://estradas.com.br/wp-content/uploads/2021/05/Estudo-Radares-_Industria-da-Multa_ou_Fabrica-de-Criminosos-do-Transito-_Versao-Final.pdf) Acesso em: 9 ago. 2024.



## Análise da AMBEV e ITAUSA usando fluxo de caixa descontado como investimentos de longo prazo

Felipe Jun Long Jiang

Universidade Federal de Uberlândia

[felipe.jang@ufu.br](mailto:felipe.jang@ufu.br)

Homero Ghioti da Silva

Universidade Federal de Uberlândia

[homero@ufu.br](mailto:homero@ufu.br)

**Resumo.** O trabalho apresenta uma análise do fluxo de caixa descontado (FCD) para precisar o valor justo de duas empresas de capital aberto na bolsa (AMBEV e ITAUSA) com o propósito de comprá-las e mantê-las em carteira por um longo prazo participando dos lucros como acionistas. A ideia é a formação de carteira com empresas perenes e previsíveis nos seus lucros que resultam renda em uma carteira de dividendos. Essas empresas apresentam tais condições nos seus fundamentos e por isso foram escolhidas para análise nesse trabalho. O FCD visa determinar o valor econômico de uma empresa analisada, prevendo sua capacidade futura de geração de caixa e trazendo esses valores para o presente por meio de uma taxa de desconto. Esse método permite comparar o valor apurado com o valor de mercado atual da empresa para identificar subvalorização ou supervalorização, orientando a compra e venda de ações. Os resultados do trabalho indicaram que as empresas citadas estão sendo atualmente negociadas levemente valorizadas para uma carteira de renda e mostram o valor justo para se negociar.

**Palavras-chave:** Fluxo de Caixa Descontado; Valuation; AMBEV; ITAUSA; Investimentos de longo prazo.

### 1 Introdução

Através de métodos de avaliação corporativa, procuramos avaliar e entender empresas para diversos fins, tais como compra e venda, fusões e aquisições; dessa forma, as decisões tomadas pelos investidores têm o poder de criar e/ou destruir valor da empresa e determinar o valor justo do negócio e compreender as mudanças de gestão, uma vez que as sinergias entre elas podem criar maior ou menor valor para a empresa.

O modelo de fluxo de caixa descontado (DFC) é o modelo mais utilizado por investidores, gestores de ativos, empresas e analistas financeiros para precisar ativos, conduzir privatizações, aquisições e fusões de empresas.

Quando o objetivo da avaliação for a gestão de carteiras, o modelo DCF permitirá aos gestores observar se um determinado ativo está valorizado ou subvalorizado, orientando assim as suas intenções de compra e venda de cada investidor. Uma vez que, existe um certo consenso de que o preço de mercado de um ativo não se desviará do seu valor econômico no longo prazo, ou seja, manterá um constante. Dessa forma, os investidores devem comprar ações abaixo do seu valor econômico e vender ações acima do seu valor econômico.

## 2 Bolsas de Valores e Empresas Analisadas

A bolsa de valores é uma plataforma de negociação entre empresas e investidores. Empresas que tenham interesse em aumentar capital buscam pessoas ou instituições financeiras que querem participar do negócio como sócios, empregando assim investimentos. Esses valores aumentam o capital da empresa e permite o desenvolvimento e aplicação das ideias.

### 2.1 AMBEV

A AMBEV (Companhia de Bebidas das Américas) é uma das maiores empresas de bebidas do mundo e a maior da América Latina. Com operações em 18 países, a empresa possui um portfólio diversificado de marcas de cervejas, refrigerantes, energéticos e outros. Suas ações são negociadas na B3 sob o ticker ABEV3.

### 2.2 ITAUSA

A ITAUSA é uma holding de investimentos com participações em diversos setores da economia, sendo a principal controladora do Banco Itaú. A empresa tem um histórico consistente de pagamento de dividendos e baixa volatilidade em seus resultados. Suas ações são negociadas na B3 sob o ticker ITSA4.

## 3 Metodologia

Analisamos as empresas AMBEV e ITAUSA através do Fluxo de Caixa Descontado. A fórmula do fluxo de caixa descontado é:

$$DFC = \sum_{t=1}^n \frac{FCt}{(1+r)^t} + \frac{FCt}{r-g}$$

Onde:

- DCF é o valor presente do fluxo de caixa descontado
- FCt é o fluxo de caixa esperado no período t
- r é a taxa de desconto ou taxa de retorno
- n é o número total de períodos
- g é a taxa de crescimento na perpetuidade

### 3.1 WACC (Custo Médio Ponderado de Capital)

O WACC é calculado pela fórmula:

$$WACC = \frac{E}{V} \times ER + \frac{D}{V} \times Rd \times (1 - Tc)$$

Onde:

- E = valor de mercado do patrimônio
- D = valor de mercado da dívida

- $V = E + D$
- $ER =$  custo de capital próprio (calculado pelo CAPM)
- $R_d =$  custo da dívida
- $T_c =$  taxa de imposto corporativo

### 3.2 CAPM (Modelo de Precificação de Ativos Financeiros)

O CAPM é calculado por:

$$ERi = R_f + \beta_i(ER_m - R_f)$$

Onde:

- $ER_i =$  Retorno Esperado do Investimento
- $R_f =$  Taxa Livre de Risco
- $\beta_i =$  Beta do investimento
- $ER_m =$  Retorno Esperado do Mercado
- $(ER_m - R_f) =$  Prêmio de Risco de Mercado

## 4 Resultados

### 4.1 Análise da AMBEV

Para a análise do DFC da AMBEV, calculamos o fluxo de caixa contábeis dos próximos 3 anos verificando qual seria o valor da empresa na perpetuidade. Assumimos a média dos resultados dos 5 anos anteriores, usando como base a taxa Selic a 8,7% e considerando o retorno de mercado de 4,12%.

Aplicando a fórmula do CAPM:

$$ERi = 8,7\% + 0,526(12,82\% - 8,7\%) = 10,87\%$$

Calculando o WACC:

$$WACC = 63,9\% \times 10,87\% + 36,1\% \times 8,68\% \times (100 - 15)\% = 9,6\%$$

O fluxo de caixa descontado para a AMBEV foi calculado como:

$$\begin{aligned} DFC &= \frac{7.489.083,342}{(1 + 0,11)^1} + \frac{7.638.865.008,84}{(1 + 0,11)^2} + \frac{7.791.642.309,02}{(1 + 0,11)^3} \\ &+ \frac{97.545.117.904,90}{(1 + 0,11)^3} \\ &= 93.185.249.334,05 \text{ aproximadamente} \end{aligned}$$

Considerando 15.757.657.336 ações, o valor justo por ação é R\$5,91.

Tabela 1: Resumo do Fluxo de Caixa Descontado para ITAUSA

BOLSA	AMBEV	WACC	0,0960	1º Ano	R\$ 7.489.083,342
Tempo	Média de 3 anos	E/V	0,639	Valor presente	R\$ 6.832.634.704,92
Fluxo de Caixa Livre	R\$ 7.489.083,342	ER	10,87%	2º Ano	R\$ 7.638.865.008,84
NOPAT	R\$ 11.918.829,342	Rf	8,7%	Valor presente	R\$ 6.358.400.992,03
EBIT	R\$ 17.051.258.000	(ERm - Rf)	4,12%	3º Ano	R\$ 7.791.642.309,02
IR	0,301	$\beta_i$	0,526	Valor presente	R\$ 5.917.082.490,34
Depreciação	R\$ 5.543.784.000	D/V	0,361	Perpetuidade	R\$ 97.545.117.904,90
CAPEX	R\$ 6.004.000.000	Rd	8,68%	Valor presente	R\$ 74.077.131.146,75
Variação Capital	R\$ -3.969.530.000	Taxa crescimento	0,02	DFC	R\$ 93.185.249.334,05
		Taxa perpet.	0,015	Valor Ação	R\$ 15.757.657.336
				Preço Ação	R\$ 5,91

## 4.2 Análise da ITAUSA

Para a ITAUSA, seguimos a mesma metodologia:

$$ERi = 8,7\% + 0,677(12,82\% - 8,7\%) = 11,49\%$$

$$WACC = 81,5\% \times 11,49\% + 18,5\% \times 10,58\% \times (100 - 15)\% = 11,02\%$$

O fluxo de caixa descontado para a ITAUSA:

$$\begin{aligned}
DFC &= \frac{3.094.729.000}{(1 + 0,11)^1} + \frac{3.156.623.580}{(1 + 0,11)^2} + \frac{3.219.756.051,6}{(1 + 0,11)^3} \\
&+ \frac{34.301.490.239,14}{(1 + 0,11)^3} \\
&= 32.762.954.372,56 \text{ aproximadamente}
\end{aligned}$$

Considerando 3.549.302.243 ações, o valor justo por ação é R\$9,23.

## 5 Análise dos Resultados

Analizando os resultados concluímos que o valor justo das ações da AMBEV atualmente é de R\$5,91 por ação e da ITAUSA é de R\$9,23 por ação. Com base na cotação de fechamento

Tabela 2: Resumo do Fluxo de Caixa Descontado para ITAUSA

BOLSA	ITAUSA	WACC	0,1102	1º Ano	R\$ 3.094.729.000
Tempo	Média de 3 anos	E/V	0,815	Valor presente	R\$ 2.787.355.200,34
Fluxo de Caixa Livre	R\$ 3.094.729.000	ER	11,49%	2º Ano	R\$ 3.156.623.580
NOPAT	R\$ 7.864.729.000	Rf	8,7%	Valor presente	R\$ 2.560.720.500,28
EBIT	R\$ 12.385.400.000	(ERm - Rf)	4,12%	3º Ano	R\$ 3.219.756.051,60
IR	0,365	$\beta_i$	0,677	Valor presente	R\$ 2.352.513.048,84
Depreciação	R\$ 830.000.000	D/V	0,185	Perpetuidade	R\$ 34.301.490.239,14
CAPEX	R\$ 493.000.000	Rd	10,58%	Valor presente	R\$ 25.062.365.623,10
Variação Capital	R\$ -5.107.000.000	Taxa crescimento	0,02	DFC	R\$ 32.762.954.372,56
		Taxa perpet.	0,015	Valor Ação	R\$ 3.549.302.243
				Preço Ação	R\$ 9,23

de 08 de setembro de 2024, as ações da AMBEV (ABEV3) eram negociadas a R\$12,99 e da ITAUSA (ITSA4) eram negociadas a R\$11,18.

Portanto, os resultados indicam que para o investidor que visa obter renda comprando as ações e mantendo-as na carteira por um longo prazo, deve-se considerar que esse pode não ser o melhor momento para comprar essas empresas, uma vez que a margem de segurança é negativa, o que impacta um retorno de capital muito baixo. Embora a AMBEV e ITAUSA sejam ambas ótimas empresas para investir e que não serão descartadas pelo investidor de longo prazo, o presente estudo indica que o mesmo aguarde uma provável oscilação do mercado para que compre as empresas.

## 6 Conclusão

O DCF (Fluxo de Caixa Descontado) é uma teoria amplamente utilizada para se precisificar o valor justo de empresas. A proposta é verificar o fluxo de caixa de um último período do passado, fazer uma projeção desse fluxo de caixa para o futuro e trazer esses valores a valor presente para tomada de decisão para compra ou venda da empresa.

O valor justo resultante de uma análise com DFC depende fortemente das premissas a serem consideradas no estudo. Portanto, deve-se considerar isso, pois dependendo dessas premissas escolhidas pode-se chegar em valor justo variados. As premissas aqui adotadas foram para um crescimento conservador para as empresas estudadas e assumindo que a compra seria por um investidor a longo prazo e que assume consideravelmente a participação nos lucros como renda de carteira.

O presente trabalho avaliou o DFC para duas empresas listadas na bolsa de valores brasileira: AMBEV (ABEV3) e ITAUSA (ITSA4) perfazendo como uma estratégia para o investidor pela bolsa em comprar as ações num preço justo. Os resultados indicaram que tanto a AMBEV quanto a ITAUSA, na cotação de quando a análise foi realizada, estão sendo negociadas acima

do seu valor justo. Porém, situações como esta permitem o investidor a tomar a decisão de comprar no momento oportuno, quando a variação do preço de mercado permitir a entrada. Com isso, a rentabilidade da carteira do investidor será beneficiada.

O FDC é excelente metodologia para avaliar o preço justo da empresa. Esse método assume a análise dos fundamentos financeiros da empresa: lucros, dívidas, valor tangível, intangível, etc. Pode ser utilizado complementando os estudos por outros métodos de análise para que o investidor de longo prazo tome a decisão de comprar ou vender suas ações na bolsa de valores.

## Referências

- CAMPOS, Felipe Bernardes. O MODELO DO FLUXO DE CAIXA DESCONTADO. *AVALIAÇÃO DE EMPRESAS*, 2009. Disponível em: <https://pantheon.ufrj.br/bitstream/11422/5113/1/FBCampos.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2023.
- ESTIVALET SVIDZINSKI, Arthur. Ambev: ABEV3. *FUNDAMENTOS*, 2023. Disponível em: <https://fundamentei.com.br/abev3>. Acesso em: 01 fev. 2024.
- AMARAL, Stephanio Esteves. Ambev: ABEV3. *status invest*, 2023. Disponível em: <https://statusinvest.com.br/acoes/abev3>. Acesso em: 06 fev. 2024.
- ADAMODAR. In: PAGES.STERN.NYU.EDU. Disponível em: <https://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/>. Acesso em: 5 jun. 2024.
- INSTITUCIONAL. In: B3. Disponível em: [https://www.b3.com.br/pt\\_br/institucional](https://www.b3.com.br/pt_br/institucional). Acesso em: 5 jun. 2024.
- LIRA, Lucas Machado. RI da AMBEV. *Divulgação de Resultados*, 2024. Disponível em: <https://api.mziq.com/mzfilemanager/v2/d/c8182463-4b7e-408c-9d0f-42797662435e/1a0f3e0eb-4bae-66b9-457f-3d946094c666?origin=1>. Acesso em: 17 jun. 2024.
- ROSA, Lícia. RI da ITAUSA. *Divulgação de Resultados*, 2024. Disponível em: <https://www.itausa.com.br/Download.aspx?Arquivo=DgJ7coR73lbYA94vsGDUrg==>. Acesso em: 21 jun. 2024.



## **Corrida de rua: análise de fatores relacionados ao desempenho de corredores de cinco quilômetros utilizando regressão linear múltipla**

Eduarda Cristina Silva

Universidade Federal de Uberlândia

[eduarda.cristina@ufu.br](mailto:eduarda.cristina@ufu.br)

Gabriella de Freitas Alves

Universidade Federal de Uberlândia

[gabriellaalves@ufu.br](mailto:gabriellaalves@ufu.br)

**Resumo.** A corrida de rua tem ganhado popularidade, principalmente devido aos seus benefícios físicos e psicológicos. Com o aumento no número de participantes, compreender as variáveis que impactam o tempo dos corredores torna-se fundamental para otimizar treinamentos e promover práticas saudáveis. Este estudo teve como objetivo analisar os fatores que influenciam o desempenho de corredores de cinco quilômetros, utilizando a técnica de regressão linear múltipla. As variáveis estudadas incluíram o tempo de prática, volume de treino semanal, idade, gênero, frequência semanal de corrida, além da presença de acompanhamento de treinador e nutricionista. Os resultados indicaram que o gênero masculino tende a obter tempos melhores que o feminino, enquanto a idade mais avançada está associada a tempos mais altos. Já o volume de treino e o tempo de prática estão relacionados a melhores desempenhos. Este estudo contribui para o entendimento de como diferentes fatores, tanto biológicos quanto comportamentais, afetam o desempenho de corredores de rua, proporcionando insights valiosos para a elaboração de treinos mais eficazes.

**Palavras-chave:** atividade física; tempo de corrida; estudo multifatorial.

### **1 Introdução**

A prática regular de atividade física é reconhecida como essencial para a manutenção de uma boa saúde. Embora grande parte da população ainda não adote um estilo de vida saudável, muitas pessoas acabam sentindo a necessidade de incorporar exercícios físicos em sua rotina, seja por orientação médica, preocupações estéticas ou pelo desejo pessoal de cultivar hábitos mais saudáveis. Nesse contexto, a corrida se destaca como uma atividade de fácil execução, proporcionando benefícios integrais ao indivíduo, atendendo tanto às necessidades físicas quanto mentais. A prática regular de atividade física, especialmente a corrida de rua, influencia diretamente o bem-estar geral do indivíduo, ajudando a reduzir a pressão arterial e a melhorar as funções cardíacas e respiratórias (Almeida; Penoni, 2020). Por apresentar tantos benefícios, a

corrida de rua tem atraído cada vez mais participantes. Entre 2022 e 2023, a quantidade de corridas em todo o país aumentou 20% (Fortuna, 2024). Somente em 2023, a Associação Brasileira de Corridas de Rua registrou mais de 150.000 disputas (Monitchele, 2024).

Assim, diante do expressivo aumento de praticantes de corridas de rua, compreender os fatores que influenciam o desempenho desses corredores torna-se essencial, não apenas para melhorar os resultados individuais, mas também para promover práticas saudáveis e sustentáveis entre os praticantes. Nesse contexto, a análise de regressão linear múltipla poderá ser muito útil ao permitir relacionar diferentes elementos ao desempenho obtido em corridas.

De acordo com Gujarati e Porter (2011), a regressão linear é o estudo da dependência de uma variável, chamada variável dependente, em relação a uma ou mais variáveis independentes. Nos estudos que envolvem mais de uma variável independente, a análise denomina-se regressão linear múltipla. A regressão linear possibilita a realização de estudos multifatoriais, ou seja, permite a análise de diversas variáveis ao mesmo tempo.

Alguns estudos já utilizaram análises de regressão linear para relacionar diferentes fatores ao desempenho de corredores. Thuany et al. (2020), analisou a relação entre o tempo gasto para percorrer um quilômetro e fatores biológicos, variáveis do treinamento e a percepção sobre o ambiente de prática. Os resultados indicaram que os três fatores analisados exercem influência sobre a performance dos praticantes. Thuany (2022) investigou, na região norte do país, a associação entre o volume de treinamento de corredores de rua e fatores ambientais. O autor identificou associação direta e significativa entre ambiente e volume de treinamento.

Apesar da vasta literatura sobre o assunto, um estudo multifatorial mais amplo envolvendo corredores de diversas regiões do Brasil é de grande importância para contribuir de forma significativa com o tema. Dessa forma, este trabalho teve como objetivo utilizar ferramentas da regressão linear múltipla para identificar e analisar fatores relacionados ao melhor tempo obtido por corredores, especificamente em corridas de cinco quilômetros.

## 2 Material e Métodos

### 2.1 Conjunto de dados

Os dados obtidos para a realização desta pesquisa foram coletados via formulário do Google Forms. A captação de participantes foi realizada via divulgação do formulário em diferentes redes sociais, incluindo o Facebook, Instagram e Whatsapp. Todos os participantes foram informados sobre os objetivos da pesquisa e consentiram em responder o questionário de forma anônima.

O questionário continha questões que buscavam analisar os fatores relacionados ao melhor tempo obtido por corredores de cinco quilômetros. Coletou-se a variável “Melhor Tempo” (menor tempo, em minutos, obtido em corridas de cinco quilômetros), além de outras nove variáveis, detalhadas a seguir, que podem estar associadas a esse resultado. Ao responder as questões relacionadas as nove variáveis, os participantes foram alertados de que os dados for-

necidos deveriam ser da época em que obtiveram o melhor tempo nos cinco quilômetros. Tais variáveis foram: Idade, Frequência (quantidade de dias nos quais praticava a corrida por semana), Volume (distância média em quilômetros que percorria por semana), Tempo de prática (há quantos anos praticava corrida de rua), Treinador (se possuía acompanhamento profissional ou não), Nutricionista (se possuía acompanhamento nutricional ou não), Esporte (se praticava outro esporte ou não), Fortalecimento (se fazia fortalecimento muscular ou não).

Um total de 188 corredores de todos os estados brasileiros aceitaram participar da pesquisa. No entanto, alguns questionários foram excluídos da análise devido à falta de respostas em questões obrigatórias e/ou por apresentarem inconsistências nas respostas. Assim, a análise final foi realizada com 147 questionários.

## 2.2 Análise Descritiva

Inicialmente, realizou-se uma análise descritiva dos dados. Para isso, procedeu-se o cálculo da média aritmética, desvio padrão, coeficiente de variação, mínimo e máximo para as variáveis quantitativas: Idade, Frequência, Volume, Tempo de prática e Melhor tempo. Depois, construiu-se gráficos de barras para as variáveis qualitativas: Gênero, Treinador, Esporte, Nutricionista e Fortalecimento.

## 2.3 Análise de Regressão Linear Múltipla

Após a análise descritiva, procedeu-se a análise de regressão linear múltipla, considerando a variável “Melhor tempo” como variável dependente ( $Y$ ), e como independentes as variáveis Gênero ( $X_1$ ), Idade ( $X_2$ ), Volume ( $X_3$ ), Tempo de prática ( $X_4$ ), Frequência ( $X_5$ ), Treinador ( $X_6$ ), Esporte ( $X_7$ ), Nutricionista ( $X_8$ ) e Fortalecimento ( $X_9$ ).

Para realizar uma análise de regressão é necessário que todas as variáveis envolvidas sejam quantitativas ou tornadas quantitativas. Dessa forma, para possibilitar a inclusão das variáveis qualitativas no ajuste do modelo de regressão realizou-se a transformação de suas categorias em variáveis binárias da seguinte forma:

$$\text{Gênero} = \begin{cases} 1, & \text{masculino} \\ 0, & \text{feminino} \end{cases} \quad \text{Esporte} = \begin{cases} 1, & \text{não praticava outro esporte} \\ 0, & \text{praticava outro esporte} \end{cases}$$

$$\text{Treinador} = \begin{cases} 1, & \text{não tinha treinador} \\ 0, & \text{tinha treinador} \end{cases} \quad \text{Nutricionista} = \begin{cases} 1, & \text{não tinha nutricionista} \\ 0, & \text{tinha nutricionista} \end{cases}$$

$$\text{Fortalecimento} = \begin{cases} 1, & \text{não fazia fortalecimento muscular} \\ 0, & \text{fazia fortalecimento muscular} \end{cases}$$

Com a transformação das variáveis qualitativas em binárias, a relação entre a variável dependente e as variáveis independentes foi modelada pela seguinte equação de regressão estimada:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \hat{\beta}_4 X_{4i} + \hat{\beta}_5 X_{5i} + \hat{\beta}_6 X_{6i} + \\ + \hat{\beta}_7 X_{7i} + \hat{\beta}_8 X_{8i} + \hat{\beta}_9 X_{9i}, \quad i = 1, 2, \dots, 147$$

sendo  $\hat{Y}_i$  o valor estimado da variável dependente  $Y$  para cada ponto amostral, e  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4, \hat{\beta}_5, \hat{\beta}_6, \hat{\beta}_7, \hat{\beta}_8$  e  $\hat{\beta}_9$  os parâmetros estimados da equação.

Para a estimação dos parâmetros utilizou-se o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), descrito em Hoffman (2016). Após o ajuste do modelo de regressão, verificou-se a existência de pontos influentes. De acordo com Montgomery e Runger (2013) é preciso analisar observações distantes do resto do conjunto de dados para determinar se esses pontos influenciam de maneira errônea o ajuste da equação. Essa verificação foi feita pelo método da Distância de Cook, descrito em Altman e Krzywinski (2016).

Posteriormente estimou-se os resíduos ( $\epsilon_i$ ) do modelo ajustado para verificar as pressuposições da regressão linear múltipla. Os resíduos são dados pela diferença entre um valor observado ( $Y_i$ ) e um valor ajustado ( $\hat{Y}_i$ ) (Anderson; Sweeney; Willians, 2007). Os resíduos da análise de regressão possuem forte relação com a qualidade de ajuste e com a confiabilidade dos testes estatísticos sobre os parâmetros ajustados, tornando-se muito importante a análise de resíduos após o ajuste de qualquer modelo (Charnet et al., 2008).

Ao estabelecer o modelo de regressão linear múltipla, pressupõe-se que: a variável dependente é função linear das variáveis independentes; os valores das variáveis independentes são fixos;  $E(\epsilon_i) = 0$ , ou seja,  $E(\epsilon) = (\vec{0})$ , onde  $(\vec{0})$  representa um vetor de zeros; os resíduos são homocedásticos, ou seja, a variância dos erros é constante; os resíduos são não correlacionados entre si e os resíduos têm distribuição normal.

Para verificar se tais pressuposições foram satisfeitas utilizou-se a análise de resíduos, por meio de testes de hipóteses. Procedeu-se os seguintes testes: teste de Kolmogorov-Smirnov, descrito em Fávero et al. (2009), para testar a hipótese de normalidade e os testes de Breusch-Pagan-Godfrey e Durbin-Watson, descritos em Gujarati e Porter (2011) para testar, respectivamente, a homocedasticidade da variância dos resíduos e a pressuposição de resíduos não correlacionados.

Após a análise de resíduos, realizou-se o teste t de hipóteses, descrito em Anderson, Sweeney e Williams (2007), para analisar se cada uma das variáveis independentes individuais era significativa, determinando quais variáveis deveriam permanecer no modelo estimado. Além disso, utilizou-se o coeficiente de determinação múltiplo ajustado para quantificar o percentual da variabilidade do Melhor tempo explicado pela equação de regressão obtida.

Analisa-se ainda a existência de multicolinearidade, ou seja, a existência de forte cor-

relação entre as variáveis independentes, o que poderia gerar problemas para a análise. Essa análise foi feita por meio do Fator de Inflação de Variância (FIV), conforme Gujarati e Porter (2011).

Para testar as hipóteses de todos os testes de hipóteses citados acima, utilizou-se o valor  $p$ , que é o menor nível de significância que conduz à rejeição da hipótese nula, com os dados amostrais (Montgomery e Runger, 2013). Para os testes  $t$ , rejeitou-se as hipóteses nulas para valor  $p < 0,05$  e para os testes da análise de resíduos rejeitou-se as hipóteses nulas para valor  $p < 0,01$ .

Todas as análises estatísticas foram feitas no software R (R Core Team, 2022). Para fazer os gráficos de barras utilizou-se o pacote `ggplot2` (Wickham, H. 2016). Realizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov com o pacote `nortest` (Gross; Ligges, 2015) e Durbin-Watson e Brescheu-Pagan com o pacote `lmtest` (Hothorn et al., 2022). Para fazer os gráficos da distância de Cook utilizou-se o pacote `olsrr` (Hebbali, 2020).

### 3 Resultados e Discussão

#### 3.1 Análise descritiva

Uma análise inicial das variáveis quantitativas mostrou que o tempo de prática de corrida de rua (Tempo de prática), na época em que obtiveram o Melhor tempo, foi a variável com maior variação em relação à média, apresentando coeficiente de variação (CV) próximo a 113% (tabela 1). Enquanto alguns corredores ainda não mantinham a prática de correr, outros praticavam o esporte há mais de 25 anos.

A distância, em média, percorrida por semana (Volume) também apresentou grande variação em relação à média com CV de 81,66%, seguida pela frequência semanal de treinos (Frequência) com CV de 37,89%. Embora a frequência média tenha ficado entre 3 e 4 vezes por semana, alguns corredores treinavam apenas 1 vez na semana enquanto outros treinavam todos os dias. A idade média dos corredores (Idade) era de aproximadamente 36 anos, com CV de 24,67%, tendo o corredor mais jovem 13 anos. O tempo nos 5 quilômetros (Melhor tempo) apresentou o menor CV (21,12%) dentre as variáveis, indicando menor variação de seus valores em torno do tempo médio de aproximadamente 24 minutos.

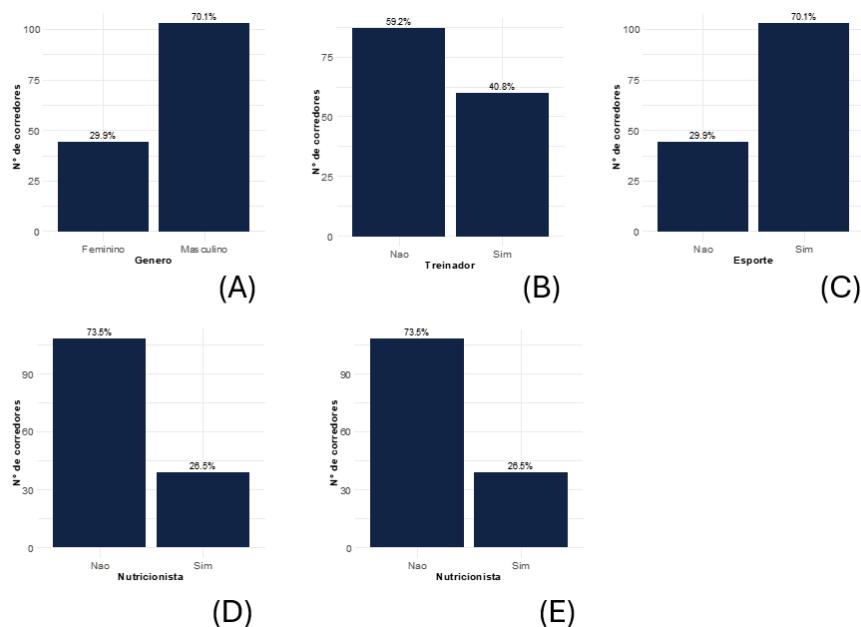
Analizando as variáveis qualitativas, nota-se que a maioria dos participantes da pesquisa é do sexo masculino, sendo 70,1% homens e 29,9% mulheres. (figura 1A). Somente 40,8% dos corredores possuíam treinador/assessoria voltado para a corrida de rua (figura 1B). A maioria dos corredores praticavam algum outro tipo de esporte (figura 1C). Apenas 26,5% faziam acompanhamento nutricional (figura 1D), porém 70,1% faziam fortalecimento muscular (figura 1E).

Tabela 1: Estatísticas descritivas das variáveis quantitativas.

Estatísticas	Idade	Volume	Tempo de prática	Frequência	Melhor tempo
Média Aritmética	36,05	25,22	3,93	3,65	24,27
Desvio Padrão	8,89	20,59	4,47	1,38	5,13
CV	24,67%	81,66%	113,68%	37,89%	21,12%
Mínimo	13	1,5	0	1	15,55
Máximo	69	100	27	7	45

Fonte: A autora

Figura 1: Gráficos de barras das variáveis qualitativas



Fonte: A autora

### 3.2 Análise de Regressão Linear Múltipla

Após ajustar o modelo de regressão linear, calculou-se a Distância de Cook verificando-se a presença de apenas 7 observações influentes. Inicialmente, estes pontos foram investigados, analisando-se o comportamento do modelo com a retirada deles. Apenas uma dessas observações apresentava comportamento muito distante das demais, alterando a modelagem e a análise de resíduos. Dessa forma, optou-se por retirar essa observação da análise.

Após a retirada do ponto influente, estimou-se novamente os parâmetros do modelo, sendo que as variáveis Treinador, Esporte, Nutricionista e Fortalecimento não foram estatisticamente significativas. Portanto, ajustou-se o modelo apenas com as variáveis independentes Gênero, Idade, Volume e Tempo de prática, que apresentaram relação significativa com o Melhor tempo, ao nível de significância de 5% (tabela 2).

O modelo de regressão ajustado é dado pela seguinte equação:

$$\text{Melhor Tempo} = 25,284 - 3,326 \times \text{Gênero} - 0,091 \times \text{Volume} + 0,116 \times \text{Idade} - 0,171 \times$$

Tabela 2: Estimativas de mínimos quadrados

Coeficientes	Estimativa	Erro padrão	Valor p
Intercepto	25,28455	1,45637	< 0,00000
Gênero	-3,32568	0,71285	< 0,00000
Volume	-0,09097	0,01590	< 0,00000
Idade	0,11611	0,03671	0,00191
Tempo de prática	-0,17095	0,07363	0,02168

Fonte: A autora

### Tempo de prática

Analisando, os parâmetros estimados, se compararmos um corredor do sexo masculino com outro do sexo feminino, que tenham o mesmo volume de corrida, a mesma idade e o mesmo tempo de prática, estimou-se que os do sexo masculino gastarão em média 3,326 minutos a menos que os do sexo feminino, para percorrer 5 quilômetros. Araújo, Torres e Macêdo (2020) mostrou que o gênero masculino apresenta resultados melhores na velocidade média quando comparado ao feminino. De acordo com Thuany et al. (2020) indivíduos do sexo feminino, apresentam um ritmo de corrida inferior ao masculino de aproximadamente 71 segundos. Isso se deve, em parte, a características fisiológicas, que favorece o desempenho masculino (Nikolaïdis et al., 2020). Estudos indicam que essas diferenças podem estar associadas a fatores como valores menores de  $VO_{2max}$  (quantidade máxima de oxigênio que uma pessoa consegue utilizar durante exercícios intensos) para o sexo feminino (Joyner et al., 2017).

Comparando pessoas do mesmo gênero, com a mesma idade e com o mesmo tempo de prática espera-se que o aumento de 1 quilômetro na distância média percorrida por semana acarrete uma redução média de aproximadamente 0,091 minutos no Melhor tempo. Diferente da distância e do tempo de prática, a idade se relaciona de forma diretamente proporcional ao tempo gasto. Considerando pessoas do mesmo gênero, mesmo volume de corrida e tempo de prática, estima-se que o acréscimo de 1 ano na idade acarrete um aumento médio de 0,116 minutos no tempo de corrida. Nikolaïdis et al. (2020) observou menor velocidade média em faixas etárias mais velhas, para todas as distâncias de corrida analisadas em seu estudo. A redução na velocidade de corrida, em grupos etários mais avançados, pode ser devida ao declínio da capacidade aeróbica associado ao envelhecimento. Além disso, o declínio da função cardiovascular e muscular, sendo que mudanças na biomecânica e maior vulnerabilidade a lesões relacionadas à corrida são fatores relatados como contribuintes para essa redução na capacidade aeróbica (Willy; Paquete, 2019).

Por fim, com o aumento de 1 ano no tempo de prática estimou-se uma redução média de 0,171 minutos no Melhor tempo, comparando corredores do mesmo gênero, com o mesmo volume de corrida e mesma idade. Thuany et al. (2020) também encontrou associação significativa entre o tempo de prática e a performance de corredores.

Após o ajuste da equação realizou-se a análise de resíduos, não rejeitando-se as hipóteses de que as pressuposições foram satisfeitas, ao nível de significância de 1% (tabela 3). Tais resultados indicam boa qualidade do ajuste e confiabilidade dos testes estatísticos sobre os parâmetros ajustados. Além disso, verificou-se a ausência de multicolinearidade substancial entre as variáveis independentes com valores de FIV inferiores a 10 (tabela 4), conforme recomendado por Montgomery et al. (2013).

Tabela 3: Resultados dos testes de hipóteses da análise de resíduos

Testes	Valor <i>p</i>
Kolmogorov-Smirnov	0,013
Durbin-Watson	0,316
Breusch-Pagan-Godfrey	0,366

Fonte: A autora.

Tabela 4: Valores do Fator de Inflação da Variância (FIV)

Variáveis	Gênero	Volume	Idade	Tempo de prática
FIV	1,1136	1,122882	1,081345	1,140726

Fonte: A autora.

Por meio do coeficiente de determinação ajustado ( $R_a^2$ ), obteve-se  $R_a^2 = 0,4206$ , ou seja, 42,06% da variabilidade do melhor tempo dos corredores nos cinco quilômetros pode ser explicada estatisticamente pela variabilidade nas variáveis Gênero, Volume, Idade e Tempo de Prática. Valores baixos de  $R^2$  não são incomuns na literatura, principalmente em estudos dessa natureza. Thuanny et al. (2020) obteve um coeficiente de determinação de 39% ao relacionar diferentes variáveis a performance de corredores de rua. De acordo com Moksony (1999) um valor baixo de  $R^2$  indica apenas que a variável dependente é afetada por diversos outros fatores além dos selecionados para a análise, tornando assim seu valor irrelevante visto que o objetivo do estudo é estabelecer uma relação específica. Ozili (2023) afirmou que em estudos envolvendo o comportamento humano é comum a obtenção de baixos valores de  $R^2$ , devido principalmente a dificuldade de captar todos os fatores que influenciam a variável de interesse.

### 3.3 Conclusão

Os resultados deste estudo indicaram que o gênero masculino tende a obter tempos melhores que o feminino, enquanto a idade mais avançada está associada a tempos mais altos. Já o volume de treino e o tempo de prática estão relacionados a melhores desempenhos.

A análise de regressão linear múltipla se mostrou útil na análise dos fatores relacionados ao melhor tempo obtido por corredores de cinco quilômetros. Além disso, contribuiu para o

entendimento de como diferentes fatores, tanto biológicos quanto comportamentais, afetam o desempenho de corredores de rua, proporcionando insights valiosos para a elaboração de treinos mais eficazes.

## Referências

- ALMEIDA, E. C.; PENONI, A. O. Perfil dos praticantes de atividades físicas ao ar livre em cidade do interior de Minas Gerais. **Revista Brasileira de Prescrição e Fisiologia do Exercício Físico - RBPFE**, Minas Gerais, v. 14, n. 91, p. 372–381, mai./jun. 2020.
- ALTMAN, N.; KRZYWINSKI, M. Analyzing outliers: influential or nuisance? **Nature Methods**, v. 13, n. 4, p. 281–283, 2016.
- ANDERSON, D. R.; SWEENEY, D. J.; WILLIAMS, T. A. **Estatística aplicada à administração e economia**. 2. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.
- ARAÚJO, D. L.; TORRES, N. R. S.; MACÊDO, A. T. Análise de velocidade média e ritmo em um desafio de corrida de rua durante a quarentena. **Digital Editora**, 2020.
- CHARNET, R. et al. **Análise de Modelos de Regressão Linear: com aplicações**. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2008.
- FÁVERO, L. P. et al. **Análise de dados: modelagem multivariada para tomada de decisões**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.
- FORTUNA, D. Corrida de rua ganha novos adeptos e se torna a atividade física preferida pelos brasileiros. **Cbn.globo.com**, Brasília, 27 jan. 2024. Disponível em: <https://encurtador.com.br/0MFRu>. Acesso em: 7 set. 2024.
- GROSS, J.; LIGGES, U. nortest: tests for normality. R package version 1.0-4, 2015. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=nortest/>. Acesso em: 29 nov. 2020.
- GUJARATI, D. N.; PORTER, D. C. **Econometria básica**. 5. ed. Porto Alegre: Artimed, 2011.
- HOFFMANN, R. **Análise de Regressão: Uma Introdução à Econometria**. 5. ed. Piracicaba: HUCITEC, 2016.
- HOTHORN, T. et al. lmtest: Testing Linear Regression Models. R package version 0.9-40, 2022. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=lmtest/>. Acesso em: 29 nov. 2022.
- WICKHAM, H. **ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis**. Springer-Verlag, New York, 2016.
- JOYNER, M. J. Physiological limits to endurance exercise performance: influence of sex. **J Physiol**, v. 595, n. 9, p. 2949–2954, May 1 2017.
- MOKSONY, F. Small is beautiful. The use and interpretation of  $R^2$  in social research. **Szociológiai Szemle**, Special issue, p. 130–138, 1990.
- MATTHIESEN, S. Q. **Corrida: Atletismo**. 1. ed. Odysseus, 184p. v. 1, 2007.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

MONITCHELE, M. Interesse pelas corridas de rua dispara entre os brasileiros. **Veja.abril.com.br**, 4 jun. 2024. Disponível em: <https://encurtador.com.br/hpK57>. Acesso em: 8 set. 2024.

NIKOLAIDIS, P. T. et al. Número de finalistas e desempenho de mulheres e homens da mesma faixa etária em corrida de longa distância: comparação entre corridas de 10 km, meia maratona e maratona em Oslo. **Research in Sports Medicine**, v. 29, n. 1, p. 56–66, 2020.

OZILI, P. K. The acceptable R-square in empirical modelling for social science research. In: **Social research methodology and publishing results: A guide to non-native English speakers**. IGI Global, 2023. p. 134–143.

R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2022. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. Acesso em: 10 nov. 2022.

THUANY, M.; GOMES, T. N.; ALMEIDA, M. B. Fatores associados ao desempenho em corredores de rua. **Revista Carioca de Educação Física**, v. 15, n. 2, p. 9, 2020.

THUANY, M. et al. Corrida de rua no Norte do Brasil: as características do ambiente podem influenciar na prática? **Arquivos Brasileiros de Educação Física**, v. 5, n. 2, p. 72–80, 2022.

WILLY, R. W.; PAQUETE, M. R. A fisiologia e biomecânica do corredor mestre. **Revista de Medicina Esportiva e Artroscópica**, v. 27, n. 1, p. 15–21, 2019.



## Equações diferenciais aplicadas em circuitos em série

Vitor Emanuel da Silva Ferreira Barbosa

Universidade do Estado de Minas Gerais

vitor.1599427@discente.uemg.br

Pedro Lucas Alves Vieira

Universidade do Estado de Minas Gerais

pedro.1599442@discente.uemg.br

Gabriela Costa de Oliveira

Universidade do Estado de Minas Gerais

gabriela.oliveira@uemg.br

**Resumo.** Este trabalho faz uma abordagem do estudo de modelos de equações diferenciais relacionados aos circuitos em série. Os modelos estudados envolvem equações diferenciais lineares, que descrevem o comportamento da corrente ou tensão em circuitos elétricos de primeira e segunda ordem. O presente trabalho teve como objetivo apresentar um estudo envolvendo equações diferenciais lineares e suas aplicações no campo de circuitos elétricos, tendo como base os conceitos teóricos e históricos de circuitos em série. Concluiu-se que é possível modelar um circuito em série a partir das equações diferenciais. A aplicação das equações diferenciais no estudo dos circuitos elétricos, como os circuitos RLC, revela-se como um fator fundamental para o avanço tecnológico, permitindo a resolução de problemas mais complexos.

**Palavras-chave:** equações diferenciais; circuitos em série; aplicações.

### Introdução

As equações diferenciais são um suporte matemático para muitas áreas da ciência e da engenharia. O uso de equações diferenciais se faz presente em diversas áreas devido à suas aplicações no campo da mecânica, da elétrica, da biologia, entre outras ciências. Como exemplo dessas aplicações podemos citar o cálculo do fluxo de corrente elétrica em um componente, o decaimento radioativo, o crescimento demográfico, o índice de disseminação de uma doença, reações químicas, esvaziamento de um tanque, entre outros.

Apesar da grande importância das equações diferenciais em diversas áreas, os livros didáticos de equações diferenciais acabam enfatizando, como forma de aplicação, problemas relacionados à mecânica e ao crescimento populacional, e poucos exemplos são apresentados

em relação ao estudo de circuitos elétricos. Quando isso ocorre, são feitas apenas comparações de problemas de circuitos elétricos que envolvem equações diferenciais com os sistemas massa-mola, pois as pulsações e a ressonância aparecem em ambos os tipos de problemas (DIACU, 2004).

Vale ressaltar que o estudo de circuitos elétricos se torna fundamental no desenvolvimento de projetos voltados para a área de engenharia elétrica e, para isso, o uso das equações diferenciais e de estratégias de resolução tornam-se ferramentas importantes para o desenvolvimento de pesquisas na área, uma vez que tais modelos são modelados por equações diferenciais para descrever seu comportamento físico.

Assim, o presente trabalho teve com o objetivo principal apresentar um estudo sobre equações diferenciais ordinárias e suas aplicações no campo de circuitos elétricos, usando o método do fator integrante, com o intuito de inserir conceitos e conteúdos importantes nesta área, afim de subsidiar conhecimento para estudantes de matemática e engenharias, bem como para pesquisadores que buscam maiores informações sobre o assunto. Além disso, busca-se apresentar uma relação mais clara entre as equações diferenciais aplicadas a circuitos elétricos. Dessa forma, espera-se, que com o auxilio do presente material, o leitor tenha condições de compreender o conteúdo de equações diferenciais ordinárias de uma forma contextualizada, a partir de aplicações na área de circuitos elétricos.

## 1 Desenvolvimento

O estudo de equações diferenciais pode ser aplicado em problemas físicos, biológicos, populacionais, em problemas relacionados a processos químicos, elétricos, mecânicos, estatísticos, entre outros (OLIVEIRA, 2015). Ou seja, as equações diferenciais modelam estes fenômenos, dependendo de cada problema em particular.

Os problemas apresentados neste trabalho envolvendo circuitos elétricos, são modelados a partir de equações diferenciais lineares. Portanto, nessa seção serão examinadas soluções para equações diferenciais de primeira ordem lineares.

### 1.1 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Uma equação diferencial da forma

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

é chamada de equação linear.

Dividindo pelo coeficiente  $a_1(x)$ , obtemos uma forma mais útil de uma equação linear:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \quad (2)$$

Procuramos uma solução para (2) em um intervalo  $I$  onde as funções  $P(x)$  e  $f(x)$  são contínuas.

Para encontrar uma solução para (2) a estratégia adotada consiste em multiplicar a equação diferencial (2) por uma função escolhida de modo que a equação resultante seja integrável. A função é chamada de fator integrante. Desse modo, ao se multiplicar a equação (2) por  $\mu(x)$ , tem-se:

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)f(x). \quad (3)$$

Observe que o membro esquerdo da equação (3), de fato, é a derivada de um produto de duas funções. Considere a derivada do produto das funções  $\mu(x)$  e  $y$  denotada por  $\frac{d[\mu(x).y]}{dx}$ , da regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{d[\mu(x).y]}{dx} = \frac{d\mu(x)}{dx}y + \mu(x)\frac{dy}{dx}. \quad (4)$$

Igualando a parte esquerda de (3) com a parte direita de (4) tem-se:

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \frac{d\mu(x)}{dx}y + \mu(x)\frac{dy}{dx}. \quad (5)$$

Subtraindo o termo  $\mu(x)\frac{dy}{dx}$  da equação (5) e dividindo por  $y$ , observa-se que vale a igualdade

$$\mu(x)p(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}. \quad (6)$$

Como o objetivo é determinar o fator integrante  $\mu(x)$ , então

$$\frac{d\mu(x)}{dx} \cdot \frac{1}{\mu(x)} = p(x); \quad \mu(x) \neq 0. \quad (7)$$

Nota-se que o lado esquerdo da equação (7) pode ser escrito como a derivada de  $\ln(\mu(x))$  e assim, a partir de (7), tem-se

$$\frac{d\ln(\mu(x))}{dx} = p(x). \quad (8)$$

Integrando em relação à  $x$ , ambos os lados da equação (8)

$$\ln(\mu(x)) = \int p(x). \quad (9)$$

Por fim, utilizando as propriedades de logaritmo e exponencial, se obtém o fator de integração  $\mu(x)$ :

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}. \quad (10)$$

com  $\mu(x) \neq 0$  para todo  $x$  em um intervalo  $I$  e contínua.

Para se determinar a solução geral a equação diferencial (2), deve-se substituir o fator integrante  $\mu(x)$  definido em (10) em (3), e resolvendo obtém-se a solução:

$$y = \frac{\int \mu(x)f(x)dx}{\mu(x)}. \quad (11)$$

## 1.2 Circuitos Elétricos

Esta sessão é destinada aos conceitos básicos sobre a teoria de circuitos elétricos necessários para entendimento das aplicações realizadas posteriormente. Serão apresentados a definição dos circuitos, as leis necessárias para a análise de circuitos elétricos e a expressão matemática que descreve o comportamento de um circuito elétrico.

Um circuito elétrico é descrito como um caminho fechado no qual os elementos elétricos do circuito estão ligados por um meio condutor. Uma corrente elétrica passa por esses componentes causando a diferença de potencial em cada componente (SADIKU *et al*, 2014). Os elementos que compõem o circuito determinam sua classificação. Neste trabalho se utilizará apenas circuitos do tipo RLC.

**Resistor:** Esse dispositivo elétrico pode ser usado com duas finalidades, a de transformar energia elétrica em energia térmica por meio do efeito joule e a de limitar a corrente elétrica em um circuito, oferecendo uma oposição à passagem de corrente elétrica através de seu material. A essa oposição dá-se o nome de resistência elétrica ou impedância e possui como unidade o *Ohm*<sup>4</sup>.

**Capacitor:** É um componente que armazena a carga elétrica, podendo assim, assumir o papel de fonte do circuito, descarregando toda a carga acumulada nos demais componentes do circuito.

**Indutor:** Um indutor é um dispositivo elétrico que armazena energia elétrica. Quando a corrente elétrica passa por cada espira, o indutor armazena a energia produzindo um campo magnético. É como um filtro para o circuito. Os circuitos são classificados também de acordo com a disposição dos componentes, ou seja, do modo em que o circuito elétrico é montado. A ligação entre elementos do circuito pode ser realizada em dois arranjos, sendo eles em série ou paralelo.

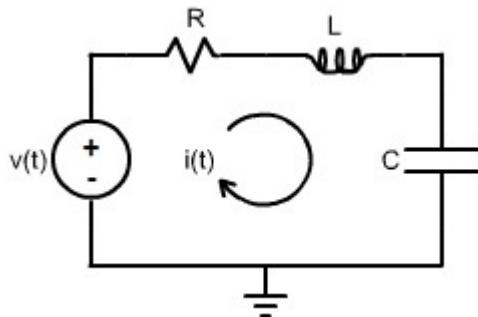
Na Figura 1 tem-se a representação de um circuito em série composto por um resistor (R), um indutor (L) e um capacitor (C).

O circuito em série apresenta três características importantes:

1. Fornece apenas um caminho para a circulação da corrente elétrica.
2. A intensidade da corrente é a mesma ao longo de todo o circuito em série.
3. O funcionamento de qualquer um dos dispositivos depende do funcionamento dos dispositivos restantes.

Existem algumas leis da Física que são fundamentais para a análise de circuitos elétricos.

Figura 1: Circuito RLC em série.



Fonte: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/24941/img/23945.PNG>

Dentre elas destaca-se a Lei de Ohm e as Leis de Kirchhoff.

**Lei de Ohm:** A lei de Ohm afirma que para uma determinada classe de materiais condutores, mantidos a mesma temperatura, tem-se que a razão entre a tensão (V) e a corrente elétrica (I), em dois pontos distintos do condutor, será dada por uma constante definida como resistência elétrica (R).

$$R = \frac{V}{I} \quad (12)$$

**1º Lei de Kirchhoff:** Essa lei é conhecida também como a lei das correntes ou lei dos nós e afirma que em um nó (ponto de junção ou encontro entre diferentes caminhos possíveis para a corrente elétrica em um circuito), a soma das correntes elétricas que entram é igual à soma das correntes que saem, ou seja, um nó não acumula carga. Isto é devido ao Princípio da Conservação da Carga Elétrica, o qual estabelece que num ponto qualquer a quantidade de carga elétrica que chega deve ser exatamente igual à quantidade que sai.

**2º Lei de Kirchhoff:** Esta lei é conhecida como a lei das tensões ou lei das malhas e afirma que a soma algébrica da D.D.P (Diferença de Potencial Elétrico) em um percurso fechado é nula, ou seja, a soma da voltagem da fonte  $E$  com a voltagem do indutor ( $L$ ) e do resistor ( $R$ ) devem resultar em zero. Essa mesma citação, de acordo com o (ZILL, 2001), a soma da queda de tensão no indutor ( $L(di/dt)$ ) e a queda de tensão no resistor ( $iR$ ) é igual a voltagem ( $E(t)$ ) no circuito, ou seja, em termos matemáticos temos a seguinte equação diferencial ordinária em função da corrente  $i$  do tempo em segundos  $t$ :

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i = E(t) \quad (13)$$

A queda de potencial em um capacitor com capacidade  $C$  é dada por  $\frac{q(t)}{C}$  em que  $q$  é a carga no capacitor. Então, para o circuito em série, mostrado na Fig (1), a segunda lei de Kirchhoff nos dá:

$$R.i + \frac{1}{C}q = E(t) \quad (14)$$

Mas a corrente  $i$  e a carga  $q$  estão relacionadas por  $i = \frac{dq}{dt}$ , logo, torna-se a equação diferencial linear

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \quad (15)$$

## 2 Aplicação

Uma bateria de 12 volts é conectada a um circuito em série no qual a indutância é  $\frac{1}{2}$  henry e a resistência 10 Ohm. Determine a corrente  $i$  se a corrente inicial é zero.

De (12), vemos que devemos resolver:

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 12 \quad (16)$$

sujeita a  $i(0) = 0$ . Primeiro, multiplicamos a equação diferencial por 2, e tiramos o fator de integração  $e^{20t}$ . Obtemos então

$$\frac{d}{dt}[e^{20t}i] = 24e^{20t} \quad (17)$$

Aplicando integração em ambos os lados da equação (17), tem-se:

$$e^{20t}i = \frac{24}{20}e^{20t} + c$$

Portanto,

$$i = \frac{6}{5} + ce^{-20t}.$$

Agora,  $i(0) = 0$  implica  $c = -\frac{6}{5}$ . Logo,

$$i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$$

## 3 Conclusão

A aplicação das equações diferenciais no estudo dos circuitos elétricos, como os circuitos RLC, revela-se como um fator fundamental para o avanço tecnológico, permitindo a resolução de problemas mais complexos, como determinação precisa da corrente e dos tempos ideais em diversas condições operacionais do circuito. Tais equações modelam o comportamento dinâmico dos circuitos, ajudando a prever as respostas do sistema em diferentes entradas, facilitando o processo de desenvolvimento de novos sistemas e componentes eletrônicos, de maior eficiência e confiabilidade.

## Referências

- DIACU, F. **Introdução a equações diferenciais: teorias e aplicações**, Rio de Janeiro, 2004. p. 262p.
- MATTHEW. N. O. SADIKU, SARHAN M. MUSA, CHARLES K. ALEXANDRE. **Análise de circuitos elétricos com aplicações**, São Paulo, 2014.
- ZILL, D. G. MICHAEL, R. C. 2001. **Equações diferenciais**, São Paulo, 2001.
- OLIVEIRA, G. C.. **Solução Analítica em Condução de Calor Multicamada: Aplicação em Ferramentas Revestidas**. 2015. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.



## Funções contínuas em intervalos fechados e o teorema do valor intermediário

Elmira Rosa Silva de Melo

Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade Federal de Uberlândia  
elmira.rosa@ufu.br

Elisa Regina dos Santos

Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade Federal de Uberlândia  
elisars@ufu.br

**Resumo.** Neste trabalho, abordamos a análise de funções contínuas em intervalos fechados e o Teorema do Valor Intermediário (TVI), um pilar da Análise Matemática. O TVI, que surgiu no início do século XX, afirma que para uma função contínua  $f$  em um intervalo fechado  $[a, b]$ , e para qualquer valor  $N$  entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , existe um ponto  $c$  em  $(a, b)$  tal que  $f(c) = N$ . Esse teorema é essencial para garantir que uma função contínua atinge todos os valores intermediários entre seus extremos, evidenciando a importância da continuidade. Além de sua relevância teórica, o teorema tem aplicações significativas na determinação da existência de raízes e na análise de comportamentos intermediários de funções. A compreensão e aplicação do Teorema do Valor Intermediário são essenciais para a construção de uma base sólida em Análise Matemática, e suas implicações vão além da teoria pura, impactando a prática em várias disciplinas que dependem da análise contínua de funções. Exploramos como o teorema facilita a compreensão de como as funções se comportam ao longo de intervalos e como isso impacta problemas de Otimização e Análise Numérica. Discutimos também a conexão entre a continuidade em intervalos fechados e a solução de equações, ressaltando o papel crucial do TVI na Análise Funcional e na Teoria das Funções. Para discutir o tema em questão apresentaremos diversos conceitos e resultados preliminares, tais como as noções de sequência e limites de sequências e funções. O trabalho será baseado em [Figueiredo \(1996\)](#) e [Stewart \(2013\)](#).

**Palavras-chave:** Funções Contínuas. Intervalos Fechados. Valores Intermediários.

### Introdução

As funções contínuas em intervalos fechados são um dos conceitos centrais na Análise Matemática, com implicações que se estendem desde fundamentos teóricos até aplicações práticas em várias disciplinas. A continuidade de uma função em um intervalo fechado garante certas propriedades que são essenciais para a compreensão do comportamento das funções em diversos contextos. Entre essas propriedades, destaca-se o Teorema do Valor Intermediário,

um resultado crucial que formaliza a ideia intuitiva de que uma função contínua não tem salto na imagem. Especificamente, o Teorema do Valor Intermediário afirma que, se uma função é contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$  e  $y$  é um valor entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , então existe pelo menos um ponto  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = y$ . Esse teorema não apenas consolida a compreensão sobre as funções contínuas, mas também tem aplicações importantes em diversos campos, como na solução de equações, na física, na economia, e em qualquer área que envolva o estudo de fenômenos contínuos. O objetivo deste trabalho é explorar as propriedades das funções contínuas em intervalos fechados, analisar o Teorema do Valor Intermediário, incluindo sua demonstração rigorosa, e examinar uma aplicação. Para tanto, apresentaremos um levantamento bibliográfico sobre o tema incluindo definições e resultados essenciais para a compreensão do resultado principal do trabalho, o Teorema do Valor Intermediário. Tal levantamento bibliográfico foi realizado através de [Figueiredo \(1996\)](#) e [Stewart \(2013\)](#).

## 1 Definições e Resultados Preliminares

Para compreender os conceitos que abordaremos, é crucial primeiro estabelecer uma base sólida com alguns resultados e definições preliminares.

**Definição 1.** *Uma sequência numérica (ou simplesmente sequência) é uma função  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , ou seja, que a cada  $n \in \mathbb{N}$  corresponde um valor  $a_n \in \mathbb{R}$ . Esses  $a_n$ 's são chamados **termos da sequência** e não são necessariamente diferentes. Tal sequência é denotada por  $(a_n)$ .*

**Definição 2.** *Uma sequência  $(a_n)$  converge para um número real  $r$  se, dado  $\varepsilon > 0$  real, existe um natural  $N$  tal que*

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - r| < \varepsilon.$$

*O número  $r$  é chamado de **limite** da sequência e a sequência é dita **convergente** nesse caso. Usamos as notações:  $a_n \rightarrow r$  e  $r = \lim a_n$ . Uma sequência que não é convergente é dita **divergente**.*

**Definição 3.** *Seja  $A = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$  um subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$ . A restrição  $s|A : A \rightarrow \mathbb{R}$  da sequência  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada uma **subsequência** de  $s$ . Portanto, a subsequência  $s|A$  é uma sequência definida por:*

$$j \in \mathbb{N} \longmapsto s(n_j) = a_{n_j}.$$

**Proposição 1.** *Se  $(a_n)$  e  $(b_n)$  são sequências convergentes e  $a_n \leq b_n$  para todo  $n$ , então*

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

*Demonstração.* Veja ([Figueiredo, 1996](#), Propriedade 6). □

**Teorema 1** (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada  $(a_n)$  possui uma subsequência convergente.*

*Demonstração.* Veja (Figueiredo, 1996, Teorema 1.5). □

Consideremos uma função real  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida em um subconjunto  $A$  dos números reais.

**Definição 4.** *Seja  $c$  um número real tal que, para algum  $d > c$ , o intervalo aberto  $(c, d)$  esteja contido em  $A$ . A função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tem **limite à direita** no ponto  $c$  se existir um real  $r$  tal que, para qualquer sequência  $(x_n)$  contida em  $A$ , com  $x_n > c$  e  $x_n \rightarrow c$ , tenhamos que a sequência  $(f(x_n))$  converge para  $r$ , isto é,  $\lim f(x_n) = r$ . Tal número  $r$  é chamado **limite à direita** de  $f$  no ponto  $c$ , o qual é denotado por  $f(c^+)$  ou  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ .*

A função não precisa estar definida no ponto  $c$  para o limite à direita existir.

**Definição 5.** *Seja  $c \in \mathbb{R}$  tal que, para algum  $c' < c$ , o intervalo aberto  $(c', c)$  esteja contido em  $A$ . A função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tem **limite à esquerda** no ponto  $c$  se existir um real  $s$  tal que, para qualquer sequência  $(x_n)$  contida em  $A$ , com  $x_n < c$  e  $x_n \rightarrow c$ , tenhamos  $\lim f(x_n) = s$ . Tal número  $s$  é chamado **limite à esquerda** de  $f$  no ponto  $c$ , o qual é denotado por  $f(c^-)$  ou  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ .*

**Definição 6.** *Seja  $c \in \mathbb{R}$  tal que existam intervalos abertos  $(c', c)$  e  $(c, d)$  contidos em  $A$ . A função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tem **limite** no ponto  $c$  se existem os limites à direita  $f(c^+)$  e à esquerda  $f(c^-)$ , e  $f(c^+) = f(c^-)$ . Esse valor comum é chamado **limite** de  $f$  em  $c$  e é denotado por  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ .*

**Teorema 2.** *Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real, e suponhamos que  $c$  seja tal que existam intervalos  $(c', c)$  e  $(c, d)$  contidos em  $A$ . Então,  $f$  tem limite no ponto  $c$  se, e somente se, existir um número real  $r$ , tal que  $f(x_n) \rightarrow r$ , para qualquer sequência  $(x_n)$ , contida em  $(c', c) \cup (c, d)$  e convergente para  $c$ .*

*Demonstração.* Veja (Figueiredo, 1996, Teorema 2.4). □

## 2 Funções contínuas

A seguir, apresentamos a definição formal de uma função contínua.

**Definição 7.** *Seja  $I$  um intervalo. Uma função real  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **contínua** em um ponto  $c$  no interior de  $I$  se*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

*Se o intervalo contém a extremidade  $a$ , então a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é **contínua** em  $a$  se*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Se o intervalo contém a extremidade  $b$ , então a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é **contínua** em  $b$  se

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

**Exemplo 1.** A seguir, vamos explorar alguns exemplos.

a) Para a função  $f(x) = k$  com  $x \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = k = f(c), \forall c \in \mathbb{R},$$

ou seja,  $f$  é contínua em todo  $c \in \mathbb{R}$ .

b) Para  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$  temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq f(0),$$

ou seja,  $f$  não é contínua em  $x = 0$ .

c) Para  $f(x) = x^2$ , temos  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 = f(2)$ . Daí,  $f$  é contínua em  $x = 2$ .

d) Para  $f(x) = \frac{1}{x}$ , não se pode falar em continuidade em  $x = 0$  pois  $f$  não está definida em  $x = 0$ .

Vamos analisar o teorema a seguir.

**Teorema 3.** Uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em um ponto  $c \in I$  se, e somente se, para toda sequência  $(x_n)$  em  $I$ , tivermos que

$$x_n \rightarrow c \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(c).$$

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $f$  seja contínua em  $c$ . Então  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ . Seja  $(x_n)$  uma sequência convergente para  $c$ . Se existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in I - \{c\}$  para  $n \geq n_0$ , então  $f(x_n) \rightarrow f(c)$ , pelo Teorema 2. Se não existir tal  $n_0$ , então  $(x_n)$  é formada de duas subsequências  $(x_{n_j})$  e  $(x_{m_j})$  tais que

$$x_{n_j} = c \text{ e } x_{m_j} \in I - \{c\} \text{ para todo } j.$$

Claramente,  $f(x_{n_j}) \rightarrow f(c)$ , pois  $f(x_{n_j}) = f(c)$ . E pelo Teorema 2,  $f(x_{m_j}) \rightarrow f(c)$ . Logo,  $f(x_n) \rightarrow f(c)$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que para qualquer sequência  $(x_n) \subset I$  tenhamos

$$x_n \rightarrow c \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(c).$$

Em particular, para toda sequência  $(x_n) \subset I - \{c\}$  convergendo para  $c$ , temos que  $f(x_n) \rightarrow f(c)$ . Logo, pelo Teorema 2,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ . Isso mostra que  $f$  é contínua em  $c$ .  $\square$

### 3 Funções contínuas em intervalos fechados

Começaremos com as definições de função limitada superiormente e inferiormente.

**Definição 8.** Uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida em um subconjunto  $A$  dos reais é **limitada superiormente** se existir um número real  $M$  tal que

$$f(x) \leq M \text{ para todo } x \in A.$$

Em outras palavras,  $f$  é limitada superiormente, se  $f(A)$  tem cota superior. Nesse caso,  $M$  é uma cota superior de  $f(A)$  e, pelo Postulado de Dedekind,  $f(A)$  tem um supremo. Definimos o **supremo da função  $f$**  (denotado por  $\sup f$ ) como o supremo de  $f(A)$ .

**Definição 9.** Uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é **limitada inferiormente** se existir um número real  $N$  tal que

$$f(x) \geq N \text{ para todo } x \in A.$$

O **ínfimo da função  $f$**  (denotado por  $\inf f$ ) é o ínfimo de  $f(A)$ .

**Exemplo 2.** Vejamos alguns exemplos a seguir:

1)  $f(x) = \frac{1}{x}$  não tem supremo nem ínfimo. Nesse caso, é comum dizer que o supremo de  $f$  é  $+\infty$  e que o ínfimo de  $f$  é  $-\infty$ .

2) Para

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

temos  $\inf f = 0$  e  $\sup f = 2$ .

3) Para  $f(x) = \sqrt{x}$ , temos que  $\sup f = +\infty$  e  $\inf f = 0$ .

4) Para  $f(x) = \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right)$ , temos que  $\inf f = -1$  e  $\sup f = 1$ .

Vejamos agora a definição de função limitada.

**Definição 10.** Uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida em um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  é **limitada** se for limitada superiormente e inferiormente.

As funções dos Exemplos 2.2 e 2.4 são limitadas. É claro que uma função  $f$  é limitada se, e só se, existir  $K > 0$  tal que  $|f(x)| \leq K$  para todo  $x \in A$ . Dada uma função limitada superiormente, pode existir ou não um ponto  $x_0 \in A$  tal que  $f(x_0) = \sup f$ . Para a função do Exemplo 2.2 não existe um tal ponto  $x_0$ , enquanto para a função do Exemplo 2.4 existe.

**Definição 11.** Dizemos que a função  $f$  assume **máximo** em  $A$ , quando existir um tal  $x_0$ , e o número  $\sup f$  será chamado de **máximo de  $f$** . De forma análoga, quando existir  $x_0 \in A$  tal que  $f(x_0) = \inf A$ , então o  $\inf f$  será chamado de **mínimo de  $f$**  e diremos que a função  $f$  assume **mínimo** em  $A$ .

Vejamos o resultado a seguir.

**Lema 1.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ . Então  $f$  é limitada.

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $f$  é limitada superiormente. De modo análogo, podemos mostrar que  $f$  é limitada inferiormente. Suponhamos por contradição que  $f$  não seja limitada superiormente. Assim, dado  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in [a, b]$  tal que  $f(x_n) > n$ . Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass,  $(x_n)$  possui uma subsequência  $(x_{n_j})$  convergente. Seja  $r = \lim x_{n_j}$ , o qual pertence ao intervalo  $[a, b]$ . Pela continuidade de  $f$ , segue que  $f(x_{n_j}) \rightarrow f(r)$ . Logo, dado  $\varepsilon = 1$ , existe um  $n_{j_0} \in \mathbb{N}$  tal que para  $n_j \geq n_{j_0}$  temos

$$|f(x_{n_j}) - f(r)| < 1.$$

Daí,

$$n_j < f(x_{n_j}) < 1 + f(r),$$

o que é absurdo. Portanto, o lema fica provado.  $\square$

**Teorema 4.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ . Então  $f$  assume máximo e mínimo em  $[a, b]$ .

*Demonstração.* Seja  $M = \sup f$ , o qual existe pelo Lema 1. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in [a, b]$  tal que  $M - \frac{1}{n} < f(x_n)$ , isto é,  $M - f(x_n) < \frac{1}{n}$ . Construímos desse modo uma sequência  $(x_n)$ . Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass,  $(x_n)$  possui uma subsequência  $(x_{n_j})$  convergente para um  $r \in [a, b]$ . Pela continuidade de  $f$ , temos que  $f(x_{n_j}) \rightarrow f(r)$ , segundo o Teorema 3. Como  $M - f(x_{n_j}) < \frac{1}{n_j}$ , temos que

$$M - f(r) \leq 0,$$

pela Proposição 1. Assim,  $M \leq f(r)$  com  $r \in [a, b]$ . Já que  $M = \sup f$ , temos  $M = f(r)$ , como queríamos demonstrar. De modo análogo, conseguimos demonstrar que  $f$  assume mínimo.  $\square$

## 4 Teorema do Valor Intermediário

Para demonstrar o TVI, precisaremos primeiro estabelecer dois lemas.

**Lema 2.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Suponha que, para um ponto  $x_0 \in I$ , temos  $f(x_0) < c$ . Então, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) < c$ , para todo  $x \in I$  tal que  $|x - x_0| \leq \varepsilon$ .

**Demonstração.** Suponha por contradição que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in I$  tal que  $f(x_n) \geq c$  e  $|x_n - x_0| \leq \frac{1}{n}$ . Observe que a sequência  $(x_n)$  converge para  $x_0$ . Pela continuidade de  $f$ , temos que  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ , segundo o Teorema 3. Daí,  $f(x_0) \geq c$ , o que é um absurdo.  $\square$

**Lema 3.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Suponha que, para um ponto  $x_0 \in I$ , tenhamos  $f(x_0) > d$ . Então, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) > d$ , para todo  $x \in I$  tal que  $|x - x_0| \leq \varepsilon$ .

**Demonstração.** Aplique o lema anterior à função  $g(x) = -f(x)$ .  $\square$

Agora, a partir desses dois lemas, conseguimos provar o próximo resultado.

**Teorema 5** (Teorema do Valor Intermediário). Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ . Então  $f$  assume todos os valores entre  $f(a)$  e  $f(b)$ .

**Demonstração.** Suponhamos sem perda de generalidade que  $f(a) < f(b)$ . Seja  $c \in (f(a), f(b))$ . Queremos provar que existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) = c$ . Seja

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq c\}.$$

O conjunto  $A$  é não vazio (pois  $x_0 \in A$ ) e  $b$  é uma cota superior de  $A$ . Logo,  $A$  possui um supremo. Seja  $x' = \sup A$ . Claramente  $x' \leq b$ . Vamos mostrar que  $x' < b$ . De fato, como  $f(b) > c$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) > c$ , para todo  $x \in [b - \varepsilon, b]$ . Assim, os valores de  $[b - \varepsilon, b]$  também são cotas superiores de  $A$ . Logo,  $b$  não pode ser supremo de  $A$ , ou seja,  $x' < b$ . Provemos agora que  $f(x') = c$ . Suponhamos que  $f(x') < c$ . Pelo Lema 2, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) < c$  para todo  $x \in [x' - \varepsilon, x' + \varepsilon]$ , o que contradiz o fato de  $x'$  ser sup  $A$ . Outra possibilidade seria  $f(x') > c$ . Então, pelo segundo lema, teríamos um  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) > c$  para todo  $x \in [x' - \varepsilon, x' + \varepsilon]$ . Daí,  $x' - \varepsilon$  seria uma cota superior para  $A$ , o que contradiz o fato de  $x'$  ser o sup  $A$ . Portanto,  $f(x') = c$ , o que prova o teorema.  $\square$

Vejamos um exemplo (Stewart, 2013, Seção 2.5, Exemplo 10) utilizando o Teorema do Valor Intermediário.

**Exemplo 3.** Mostremos que existe uma raiz da equação

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 e 2. Seja  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ . Estamos procurando por uma solução da equação dada, isto é, um número  $c$  entre 1 e 2 tal que  $f(c) = 0$ . Portanto, tomamos  $a = 1$  e  $b = 2$  no Teorema do Valor Intermediário. Temos:

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

$e$

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0.$$

Logo,  $f(1) < 0 < f(2)$ , isto é, 0 é um número entre  $f(1)$  e  $f(2)$ . Como  $f$  é contínua, por ser um polinômio, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existe um número  $c$  entre 1 e 2 tal que  $f(c) = 0$ . Em outras palavras, a equação  $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$  tem pelo menos uma raiz  $c$  no intervalo  $(1, 2)$ .

De fato, podemos localizar mais precisamente a raiz usando novamente o Teorema do Valor Intermediário. Uma vez que

$$f(1,2) = -0,128 < 0 \text{ e } f(1,3) = 0,548 > 0$$

uma raiz deve estar entre 1,2 e 1,3. Uma calculadora fornece, por meio de tentativa e erro,

$$f(1,22) = -0,007008 < 0 \text{ e } f(1,23) = 0,056068 > 0$$

assim, uma raiz está no intervalo  $(1,22; 1,23)$ .

## Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

## Referências

FIGUEIREDO, D. G. **Análise 1**. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1.



## **Jogos no ensino de ciências e matemática: relatos e reflexões**

Marcelo Parreira de Oliveira

Escola Estadual Governador Israel Pinheiro

[marceloparreiradeoliveira@gmail.com](mailto:marceloparreiradeoliveira@gmail.com)

Vlademir Marim

Universidade Federal de Uberlândia

[vlademirmarim@gmail.com](mailto:vlademirmarim@gmail.com)

Bruna Cassiane de Oliveira Silva

Escola Estadual Governador Israel Pinheiro

[bsilvaoliveira0909@gmail.com](mailto:bsilvaoliveira0909@gmail.com)

Ryan Custodio Amsy Silva

Escola Estadual Coronel Tonico Franco

[ryanasilva05617@gmail.com](mailto:ryanasilva05617@gmail.com)

**Resumo.** Este trabalho, originado do Programa de Iniciação Científica – Júnior (PIBIC – JR), desenvolvido pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU), e apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), tem como objetivo utilizar jogos didáticos com foco na busca por uma melhora no ensino de Ciências e Matemática. A pesquisa investiga de que maneira essas ferramentas educacionais podem aprimorar a formação dos professores, apoiando o crescimento das habilidades cognitivas, sociais e emocionais, que são fundamentais para um ensino de qualidade. Os jogos são apresentados como ferramentas valiosas que, se bem escolhidas e aplicadas, podem introduzir e aprofundar conteúdos, além de ajudar na resolução de problemas, permitindo que os alunos usem estratégias para superar desafios. O estudo destaca a importância do papel do professor como mediador, evitando que os jogos se tornem uma prática secundária, e assegurando sua eficácia no aprendizado; além disso, destaca o papel dos Laboratórios de Ensino como ambientes ideais para a aplicação desses jogos, promovendo uma abordagem de ensino mais dinâmica e inovadora. A pesquisa resulta na criação de quatro jogos didáticos, dois voltados para a Química e dois para a Matemática, com uma intenção pedagógica nas áreas de Ciências e Matemática, embasados em jogos tradicionais, tais como dominó, ludo e memória, evidenciando a prática dos conceitos abordados e o impacto positivo dos jogos na educação. É importante acrescentar que os jogos possibilitam uma abordagem dinâmica para o aprendizado, buscando uma interatividade, experimentação e ludicidade; ajudam na resolução de problemas, promovendo compreensão, pensamento crítico e engajamento. Sua eficácia depende de planejamento, prática e adaptação de todos os atores envolvidos no processo de aprendizagem.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Laboratório de Matemática; PIBIC.

## Introdução

Este trabalho é oriundo do Programa de Iniciação Científica – Júnior (PIBIC – JR), promovido e incentivado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), e desenvolvido na Universidade Federal de Uberlândia (UFU), na Faculdade de Educação (FACED). Seu principal objetivo é constituir, refletir e apresentar construção de quatro jogos didáticos para o ensino de Ciências e Matemática, embasados em jogos tradicionais, tais como dominó, ludo e memória.

A utilização dos jogos educacionais pode ser uma ferramenta de ensino, que, segundo **KISHIMOTO (1994 apud MARIM, 2011)**, beneficia os alunos, pois a interação entre os seus pares desenvolve as capacidades cognitiva, afetiva e de inserção social.

**HUIZINGA (2007, p. 33 apud SILVA, 2022, p. 5)** afirma que jogo “é uma atividade voluntária exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas”.

Ainda, de acordo com **Marim (2011)**:

Os jogos podem ser utilizados para introduzir, amadurecer conteúdos e preparar o aluno para aprofundar os itens já trabalhados; além disso, devem ser escolhidos e preparados com cuidado para levar o estudante a adquirir conceitos matemáticos de importância e utilizados não como instrumentos recreativos na aprendizagem, mas como facilitadores, colaborando para trabalhar os bloqueios que os alunos apresentam em relação a alguns conteúdos matemáticos **(Marim, 2011, p. 142)**.

**Xexéo (2009 apud Juul, 2009, s/p)** “considera que jogos possuem regras fixas, resultado variável, resultado valorizado, consequências negociáveis, ligação do jogador com o resultado e esforço do jogador”. Dessa forma, eles têm a flexibilidade de serem utilizados de várias maneiras e podem proporcionar resultados e experiências diversas e abrangentes.

De acordo com **Lucchese e Ribeiro (2009, s/p)**, “os jogos podem ser classificados sobre a perspectiva de diversos critérios”; sendo eles: Cooperatividade, Dinâmica e Informação. Os autores também definem algumas das classificações dos jogos: Jogos Não Digitais, Jogos de Cartas, Jogos de Tabuleiro, Jogos Atléticos, Jogos Infantis e Educativos e Jogos Digitais.

Com isso, vemos que os jogos didáticos são bastante amplos e possuem uma grande variedade; porém, todo jogo “é um sistema no qual os jogadores envolvem-se em um conflito artificial, definido por regras, que determina um resultado quantificável” **(Salen; Zimmerman, 2012, p. 95)**.

Compreende-se, então, que o jogo educativo, considerado como uma metodologia no processo de aprendizagem, pode proporcionar um ensino de qualidade, e que, para isso, os professores podem promover diferentes oportunidades no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

No decorrer da realização dos jogos didáticos, podemos encontrar diversos desafios que podem ser solucionados com a resolução de problemas, permitindo que o aluno pense em estratégias ou soluções para conseguir resolver o problema apresentado Embasados nesta perspectiva, a

Resolução de problemas se baseia na proposição e enfrentamento do que chamamos de situação-problema. Isto é, ampliando o conceito de problema devemos considerar que a resolução de problemas trata de situações que não possuem solução evidente e que exigem que o resolvedor combine seus conhecimentos e se decida pela forma de usá-los em busca da solução. A primeira característica da perspectiva metodológica da resolução de problemas é considerar como problema toda situação que permita alguma problematização (Smole; Diniz; Marim, 2008 apud Marim, 2011, p. 126).

A utilização dos jogos na educação básica para o ensino de Ciências e Matemática colabora no processo ensino e aprendizagem. De acordo com Múrcia (2005 apud Miranda, 2019),

os jogos didáticos, podem viabilizar uma metodologia facilitadora na elaboração de conceitos, no reforço de conteúdo, na sociabilidade entre os alunos, na criatividade e no espírito de competição e cooperação, tornando esse processo transparente, ao ponto que o domínio sobre os objetivos propostos na obra seja assegurado (Múrcia, 2005, p. 16 apud Miranda, 2019, p. 5).

No desenvolvimento de atividades envolvendo os jogos didáticos na sala de aula, o professor deverá ser o mediador do processo de ensino e aprendizagem, incentivando o protagonismo do aluno e sua relação com os seus pares.

Segundo Pereira e Bianco (2019, p. 40), “Um dos cuidados a serem tomados quando se utiliza essa estratégia de ensino é que quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tornando-se um “apêndice” em sala de aula”.

Esse método pode trazer muitos benefícios quando empregado de maneira avaliativa, também servindo como uma introdução a um assunto e podendo ser explorado como ferramenta de aprendizado, entre outras possibilidades. Segundo Pereira e Bianco (2019),

As atividades com jogos podem ser utilizadas para reforçar ou recuperar habilidades que os alunos necessitem. Podemos dizer que as atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e principalmente as dificuldades dos alunos (Pereira; Bianco, 2019, p. 40).

Para além da sala de aula, os jogos poderão ser desenvolvidos em outros espaços formativos, como por exemplo no Laboratório de Ensino de Ciências e Matemática. Este espaço é uma possibilidade estratégica para o processo de ensino e aprendizagem, já que possui um espaço coletivo onde o professor terá oportunidade de trabalhar de maneiras diversificadas. De acordo com Paiva, Cunha e Silva (2016, p. 10), o “Laboratório de Matemática não se restringe a um espaço físico para se dar uma aula diferente, mas que pode contribuir para estabelecer situações pedagógicas desafiadoras e que podem auxiliar no processo de ensino da matemática”.

Segundo Paiva, Cunha e Silva (2006 apud Lorenzato, 2006, s/p.), o “Laboratório de Ensino de Ciências e Matemática que pode ser um espaço especialmente dedicado a criação de situações pedagógicas desafiadoras, como também um espaço que serve para auxiliar no equacionamento de situações previstas pelo professor em seu planejamento”. Com isso, vemos que o laboratório é um espaço que ajuda o docente de diversas formas no planejamento de sua aula.

Embassados nas concepções de jogos, resolução de problemas e laboratório de ensino de ciências e matemática, construímos quatro jogos didáticos ao longo desta pesquisa, incentivada pela FAPEMIG, envolvendo a área de ciências e matemática, fundamentados em jogos tradicionais, tais como dominó, ludo e memória. Dois desses jogos são concentrados na área do ensino de química, e os outros dois no ensino de matemática.

## 1 Criação dos jogos

Desenvolver jogos didáticos para o ensino de Ciências e Matemática tem o objetivo de tornar o aprendizado mais envolvente e engajado, pois integra desafios e recompensas, buscando promover a resolução de problemas e o pensamento crítico.

### 1.1 Ludo de Química

O Ludo de Química é classificado como um jogo de azar/sorte, pois as movimentações dos marcadores são determinadas a partir do lançamento de um dado; tem como objetivo pedagógico consolidar os conceitos básicos da Química para estudantes do Ensino Médio. Foi construído a partir de pesquisas sobre jogos didáticos, e elaborado na estrutura de um tabuleiro de papel com quatro cores de linhas que são ligadas ao centro dele.

Esse jogo pode ser jogado por dois, três ou quatro jogadores; cada um deles com um marcador que possui a mesma cor das linhas que estão no tabuleiro, com objetivo de completar o circuito, em primeiro lugar.

Ao começar a partida, dão-se as seguintes ações: (1) cada jogador lança o dado, e se tirar "1" ou "6", poderá movimentar o marcador; caso contrário, terá que passar a vez, até conseguir sortear os números "1" ou "6"; (2) após tirar um "6" e colocar um marcador no tabuleiro, deve-se jogar o dado novamente, para descobrir quantas casas você deve andar; (3) os peões não podem retroceder, e só devem andar para frente, no sentido horário; (4) caso o marcador caia numa casa com um ponto de interrogação (casa de pergunta), o jogador deve pegar uma carta e responder à pergunta proposta; (5) a resposta dada será julgada pelos demais e, se estiver certa, o jogador deverá pegar uma carta no monte "bônus" (cartas laranjas) e executar o comando da carta, que lhe concederá uma vantagem no jogo; (6) caso a resposta esteja errada, o jogador deverá pegar uma carta no monte "ônus" (cartas azuis) e executar o comando da carta que lhe concederá uma desvantagem no jogo; (7) se um marcador cair no mesmo lugar que o oponente já está, o oponente terá sua peça capturada e deverá voltar ao início do tabuleiro; isso porque o jogo não permite que duas peças ocupem a mesma casa, com exceção das casas duplas (casas rosas); (8) para levar as suas peças até a reta final, deve-se dar uma volta por todo o tabuleiro; (9) após fazer uma volta completa, coloca-se a peça na trilha que leva ao centro do tabuleiro correspondente à sua cor; para chegar até a tão cobiçada área final, o dado deve chegar a um número exatamente igual à distância do marcador até a área; (10) se o resultado for maior que a distância determinada, o jogador não poderá se movimentar; e (11) vence o jogador que

completar a volta pelo tabuleiro e entrar na área final (autor, ano).

Embassados em problematizações, ao longo do percurso, os jogadores responderão diversas questões, e o professor mediará as situações durante e no final da partida, de forma individual ou coletiva.

Como exemplo de problematizações, temos: (1) Com relação à estrutura do átomo, podemos afirmar que: (a) Na sua eletrosfera, encontram-se os elétrons e os nêutrons; (b) No seu núcleo, encontram-se os prótons e elétrons; (c) No seu núcleo, encontram-se os prótons e os nêutrons; e (2) A ligação covalente ocorre entre: (a) Ametal e metal; (b) Metal e hidrogênio; (c) Ametal e hidrogênio. Cada jogador deve estar preparado para pensar e responder a cada pergunta corretamente, pois, se a sua resposta estiver incorreta, ele será prejudicado com a carta “ônus”, que dará ao jogador desvantagem no jogo.

## 1.2 Dominó com elementos químicos

O Dominó com elementos químicos tem como objetivo fazer com que o jogador se livre de todas as suas peças; seu objetivo pedagógico é reconhecer e memorizar os símbolos e nomes dos elementos químicos. O jogo foi criado com peças feitas de papel, que são divididas ao meio por uma linha. Cada lado contém um elemento químico, que deve ser ligado à outra peça que contenha o elemento químico na sua forma simbólica.

As regras do jogo podem variar de acordo com a quantidade de jogadores. Com 2 jogadores: (1) A partida se inicia com o jogador que tiver o duplo C (a peça que tem o símbolo C em seus dois lados); (2) após a primeira peça ser jogada, o próximo jogador deve encaixar sua peça nas pontas do caminho formado pelo dominó, combinando o elemento químico com a sua fórmula; (3) quando o jogador consegue encaixar uma peça, ele passa a vez; caso não consiga, ele deve “comprar” no monte; (4) se não houver peças no monte, ele passará a vez; (5) o jogo acaba quando as peças de um jogador acabam ou quando nenhum jogador tiver as peças necessárias para encaixar nas pontas do caminho formado pelo dominó. Com 4 jogadores: (1) a partida se inicia com o jogador que tiver o duplo C (a peça que tem o símbolo C em seus dois lados); (2) o jogo roda no sentido horário; (3) após a primeira peça ser jogada, o próximo jogador deve encaixar sua peça nas pontas do caminho formado pelo dominó, combinando o elemento químico com a sua fórmula; (4) quando o jogador consegue encaixar uma peça, ele passa a vez; caso ele não consiga, ele deve “comprar” no monte; (5) se não houver peças no monte, ele passará a vez; (6) o jogo chega ao fim quando as peças de um jogador acabam ou quando nenhum jogador tiver as peças necessárias para encaixar nas pontas do caminho formado pelo dominó.

Como exemplo de problematização, temos: (1) Montar estratégias para que o oponente tenha menos chance de vencer o jogo. Um exemplo de problematização é o jogador guardar peças que tenham o mesmo número diversas vezes; por exemplo, se um jogador tiver 3 peças com o elemento químico Carbono, quando as únicas peças que tiverem no tabuleiro forem peças com a letra C, o jogador que tiver a maior quantidade de peças escritas o elemento químico Carbono terá mais chance de vencer o jogo.

### 1.3 Jogo da Memória.

O Jogo da Memória é classificado como um jogo de estratégia e memorização com propósito de formar a maior quantidade de pares ao final do jogo, tendo como objetivo pedagógico trabalhar a notação científica, a qual é estudada no ensino de Matemática. O jogo foi construído com peças de papel 5x5 centímetros cada, e possui no total 40 peças.

Para compreendermos como se joga, apresentamos as regras: (1) no início de cada partida, todas as cartas deverão ser embaralhadas; (2) o jogo pode conter até três jogadores, sendo que o objetivo é juntar pares; cada carta terá uma par; (3) a partida termina assim que todas as cartas acabarem; (4) o jogador que tiver feito mais pares ganha o jogo; (5) a jogatina será dividida em dois níveis de dificuldade, que podem ser definidos com base em seu conhecimento de notação científica.

No primeiro nível, as cartas deverão ficar com o verso para cima. Cada jogador terá 30 segundos para fazer o par (caso o jogador, ao final dos 30 segundos, tenha pegado uma carta, ela ainda contará). Quando o tempo acabar, o próximo jogador deverá jogar. No segundo nível, cartas estarão com seu verso virado para baixo. Neste nível, o jogador que fizer um par ele continuará a jogar; caso ele não tenha feito um par, ele deverá passar a vez para o próximo competidor.

Como exemplo de problematização, temos: (1) Um jogador tirou uma peça que tem  $10^2$  elevado a 2, quais são as cartas que podem ser encaixadas a ela? Qual carta o jogador poderia criar para poder encaixar na peça no qual ele retirou?

### 1.4 Responda se Puder

O jogo intitulado “Responda se Puder” é caracterizado de estratégias e sorte, cujo propósito é responder a perguntas aleatórias de maneira ágil, tendo como objetivo pedagógico consolidar o conteúdo científico de Progressão Geométrica (P.G) e Progressão Aritmética (P.A). O jogo foi criado com bases em pesquisas sobre os jogos didáticos, e possui dezoito cards de perguntas, sendo construídas em tiras de papel.

O jogo para a sua melhor funcionalidade, possui algumas regras: (1) o jogo pode ser dividido por duas equipes, possuindo entre dois e quatro participantes; (2) o desafio consiste em responder a alguns cartões, que estarão em um saco para que possa ser sorteados aleatoriamente um nível; há três níveis de dificuldade; (3) todos os níveis estão dentro do saco para serem sorteados de forma aleatória; (4) O nível da pergunta pode ser identificado por sua cor; o nível um é representado pela cor rosa, o nível dois pela cor azul e o nível três é representado pela cor amarela; (5) o desafio deve conter um mediador para poder ler e sortear as perguntas; (6) após o juiz ler, a equipe deverá eleger um jogador para poder responder à pergunta; (7) caso o jogador não consiga compreender a pergunta, ele poderá pedir para o regulador ler a pergunta novamente; (8) caso a equipe tenha respondido certo, consegue três pontos; (9) caso o grupo responda errado, irá perder um ponto; (10) a equipe que chegar a quinze pontos ou mais ganha;

(11) as equipes podem contar com o auxílio folha para responder; (12) caso ocorra de todos os cartões acabar e nenhuma equipe tiver 15 pontos, a equipe que estiver com mais pontos ganha.

Como exemplo de problematização, temos: (1) Qual é o 20º termo da P.A (12, 15, 18, ...)?; ou, também: Qual o número que está faltando na sequência (4, 22, 40, x, 76)? Com a utilização desses problemas, buscamos que o aluno entenda o processo de como chegar ao resultado, fazendo com que ele pense nos possíveis caminhos para poder alcançar a resolução do problema.

## 2 Análise

A utilização de jogos no ensino da matemática tem sido amplamente estudada e defendida como uma metodologia eficaz para a promoção de um ambiente de aprendizagem dinâmico e significativo, de acordo com kishimoto (1994). do ponto de vista da definição, de acordo com huizinga (2007), xexéo (2009) e marim (2011), os jogos educativos podem ser descritos como atividades estruturadas que possuem regras, objetivos e resultados que engajam os alunos de forma lúdica, mas com a intenção de promover o desenvolvimento de competências matemáticas específicas.

As características fundamentais dos jogos educativos incluem a interatividade, a possibilidade de experimentação, e a criação de um ambiente que promove a motivação intrínseca. A interatividade permite que os alunos sejam agentes ativos no seu processo de aprendizagem, enquanto a experimentação oferece a oportunidade de testar hipóteses e aprender com os erros. A motivação é potenciada pela natureza lúdica dos jogos, que torna a aprendizagem um processo mais atraente.

Em termos de classificação, lucchese e ribeiro (2009) afirmam que os jogos educativos podem ser categorizados de várias formas, tais como jogos digitais, analógicos, ou jogos competitivos e cooperativos. esta classificação é essencial para que o professor possa escolher o tipo de jogo mais adequado às necessidades dos seus alunos e aos objetivos específicos de aprendizagem que pretende alcançar.

No que diz respeito à concepção, a criação de jogos educativos requer um equilíbrio entre o conteúdo matemático e os elementos de jogo (Marim, 2011). Um bom jogo educativo deve incorporar desafios matemáticos autênticos que estejam alinhados com o currículo, ao mesmo tempo que oferece uma experiência de jogo envolvente e gratificante. Este equilíbrio é crucial para que o jogo não seja apenas divertido, mas também apresente-se como uma ferramenta eficaz de aprendizagem.

A prática do uso de jogos educativos nas salas de aula pode ser abordada de diversas maneiras. o professor pode utilizar os jogos como uma forma de introduzir novos conceitos, para reforçar o conteúdo já ensinado, ou como uma ferramenta de avaliação formativa (marim, 2011).

A implementação do jogo nas práticas docentes, de forma bem-sucedida, requer que o

professor esteja familiarizado com os jogos e com estratégias pedagógicas associadas, incluindo a facilitação do jogo, o apoio aos alunos durante o processo, e a ligação dos resultados do jogo ao conteúdo curricular.

As adaptações dos jogos educativos são necessárias para atender à diversidade de perfis dos alunos. Isso pode incluir modificações nas regras do jogo, ajustes no nível de dificuldade, ou a incorporação de elementos que atendam a necessidades educacionais especiais. A flexibilidade na adaptação dos jogos garante que todos os alunos possam participar de maneira significativa e que o jogo cumpra sua função pedagógica.

Além disso, o laboratório de matemática, quando utilizado como espaço para a prática de jogos educativos, pode se tornar um ambiente altamente eficaz para a aplicação da metodologia de resolução de problemas. Nesse contexto, os jogos atuam como ferramentas que promovem a interação ativa dos alunos, desafiando-os a aplicar conceitos matemáticos em situações práticas e dinâmicas (smole; diniz; marim, 2008).

A prática de jogos no laboratório de matemática (lorenzato, 2006) permite que os alunos enfrentem problemas em um ambiente controlado, onde podem testar estratégias, fazer hipóteses e experimentar diferentes soluções sem o medo do erro. Esse ambiente favorece o desenvolvimento de habilidades de pensamento crítico e criativo, essenciais para a resolução de problemas.

Além disso, o laboratório oferece a possibilidade de adaptar os jogos às necessidades e níveis de habilidade dos alunos, garantindo que todos possam participar de forma significativa. Dessa forma, o Laboratório de Matemática se consolida como um espaço onde a teoria e a prática se encontram, promovendo uma aprendizagem mais profunda e envolvente.

### 3 Conclusão

Os jogos educativos, quando integrados de forma adequada no espaço escolar, representam uma poderosa metodologia para a resolução de problemas na educação matemática. Eles não apenas facilitam a compreensão de conceitos matemáticos complexos, mas também promovem habilidades de pensamento crítico, colaboração e resolução de problemas. Contudo, a eficácia dos jogos depende de uma concepção cuidadosa, da prática pedagógica e das adaptações necessárias para incluir todos os alunos.

Portanto, é imperativo que os professores tenham formação adequada e recursos para implementar esta metodologia de forma eficaz. Ao fazer isso, os jogos podem se tornar uma ferramenta central na transformação do ensino da Matemática, tornando-o mais envolvente, inclusivo e eficaz.

### Referências

HUIZINGA, Johan. **Homo ludens: o jogo como elemento da cultura.** 5. ed. São Paulo: Perspectiva, 2007.

JUUL, J. **A Casual Revolution: Reinventing Video Games and Their Players.** The MIT Press, 2009.

KISHIMOTO, T. M. **O Jogo e a Educação Infantil.** São Paulo: Pioneira, 1994.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino da matemática e materiais manipuláveis.** In: LORENZATO, S. (org.). *O Laboratório de Ensino da Matemática na formação de professores.* São Paulo: Autores Associados, 2006.

LUCCHESE, F.; RIBEIRO, B. **Conceituação dos Jogos Digitais.** Universidade Estadual de Campinas, 2009. Disponível em: <https://www.dca.fee.unicamp.br/~martino/disciplinas/ia369/trabalhos/t1g3>. Acesso em: 25 ago. 2024.

MARIM, V. **Formação continuada do professor que ensina matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: um estudo a partir da produção acadêmico-científica brasileira.** 2011. 217 f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2011.

MIRANDA, Erica Viviane Nogueira. **Os jogos didáticos como instrumento criativo: uma proposta metodológica no ensino.** VI Congresso Nacional de Educação, 2019.

PAIVA, J.; CUNHA, A.; SILVA, K. **Laboratório de Matemática: Uma Abordagem Construtiva do Ensino de Matemática.** In: Educação Matemática na Contemporaneidade: Desafios e Possibilidades. Anais... São Paulo, 13 a 15 de jun. 2016. Disponível em: [https://www.sbmbrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4988\\_4191\\_ID.pdf](https://www.sbmbrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4988_4191_ID.pdf). Acesso em: 25 ago. 2024.

PEREIRA, M.; BIANCO, L. **Os Jogos no Ensino de Ciências e Matemática: suas possibilidades de aplicação e suas limitações.** Uirapuru, Scientia Vitae, vol. 7, jan./mar. 2019. Disponível em: <https://www.revistaifspsr.com/v7n23p37-41.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2024.

SALEN, Katie; ZIMMERMAN, Eric. **Regras do jogo: fundamentos do design de jogos.** São Paulo: Blucher, 2012.

SILVA, Joanna D'arc Bispo da. **O uso dos jogos no ensino da matemática.** 2022. 220 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Pedagogia) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2022. Disponível em: <https://repository.ufrpe.br/handle/123456789/3845>. Acesso em: 25 ago. 2024.

XEXÉO, G. **O Que São Jogos?** Ludes Ludologia, Engenharia e Simulação, 2013. Disponível em: <https://ludes.cos.ufrj.br/wp-content/uploads/2016/07/LJP1C01-0-que-sao-jogos-v2.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2024.



## Números transcendentes: números de Liouville e de Euler

Denilson Rodrigues Junior

Universidade Federal de Uberlândia  
Instituto de Matemática e Estatística  
denilson.rodrigues@ufu.br

Daniel Cariello

Universidade Federal de Uberlândia  
Instituto de Matemática e Estatística  
dcariello@ufu.br

**Resumo.** Os números transcendentes são números complexos que não são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. Mostrar que um número dado é transcidente é uma tarefa não trivial. Entretanto, construir uma família explícita de tais números não é algo tão complicado. Nesse trabalho vemos as duas situações. Primeiro mostramos os números de Liouville: uma família de números transcendentes que Liouville construiu em 1851. Essa foi a primeira demonstração da transcendência de um número na matemática e também uma prova da existência de números não algébricos. Em seguida, apresentamos uma versão da demonstração de Hermite, originalmente apresentada em 1873 e depois simplificada por Hilbert e Hurwitz, de que o número de Euler é transcidente. Essa foi a primeira vez em que a transcendência de um número já familiar aos matemáticos é demonstrada. Veremos que esses resultados seguem de técnicas elementares de cálculo, como propriedades básicas de derivadas e o teorema do valor médio para polinômios.

**Palavras-chave:** Números transcendentes; Números de Liouville; Número de Euler.

### Introdução

Um número complexo é chamado de algébrico, se existir um polinômio com coeficientes inteiros tal que uma de suas raízes é esse número complexo. Dizemos que um número complexo é transcidente se ele não for algébrico.

#### **Exemplo 1.** Exemplos de números algébricos

- $i$  é algébrico pois é raiz de  $x^2 + 1$ , cujos coeficientes são inteiros.
- $\sqrt{2}$  é algébrico, pois é raiz de  $x^2 - 2$ , cujos coeficientes são inteiros.
- Qualquer racional  $\frac{p}{q}$  é algébrico pois é raiz de  $qx - p$ , cujos coeficientes  $q, p$  são inteiros.

Segundo Erdős (1983), a definição apresentada de números transcendentes é devida a Euler. No entanto, Euler nunca provou a existência desses números, talvez por considerar sua existência óbvia, o que não é o caso para os padrões atuais.

Determinar a transcendência de um número não é algo trivial, pois devemos mostrar a ausência de um polinômio com coeficientes inteiros cuja raiz é esse número. Entretanto, veremos que com técnicas elementares é possível provar resultados interessantíssimos.

Nesse trabalho veremos como Liouville, pela primeira vez na matemática, construiu infinitos números transcendentes e que o número de Euler também é transcendent.

Na demonstração de Liouville publicada em 1851 é utilizado apenas o teorema do valor médio para polinômios e na demonstração de que  $e$  é transcendent utiliza-se outras técnicas de cálculo. Estamos seguindo as referências: Figueiredo (2002) e Herstein (1975).

## 1 Números de Liouville

Para demonstrar que os números que Liouville construiu são transcendent precisamos demonstrar uma desigualdade satisfeita por todos os algébricos e depois ver que os números de Liouville não a satisfazem.

**Teorema 1.** *Seja  $\alpha$  uma raiz de um polinômio de grau  $n$  com coeficientes inteiros. Existe uma constante  $A > 0$  tal que para todo racional  $\frac{p}{q}$ , diferente de  $\alpha$ , temos  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{A|q|^n}$ .*

*Demonstração.* Seja  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  tal que  $a_i \in \mathbb{Z}$  para todo  $i$ ,  $a_n \neq 0$  e  $f(\alpha) = 0$ .

Como existem apenas  $n$  raízes para  $f(x)$ , existe  $d > 0$  tal que  $\alpha$  é a única raiz de  $f(x)$  no intervalo  $[\alpha - d, \alpha + d]$ .

A derivada  $f'(x)$  também é um polinômio e, portanto, contínua em  $[\alpha - d, \alpha + d]$ . Assim existe  $M > 0$  tal que  $|f'(x)| < M$  para todo  $x \in [\alpha - d, \alpha + d]$ .

Para qualquer racional  $\frac{p}{q} \in [\alpha - d, \alpha + d] \setminus \{\alpha\}$ , aplicando o teorema do valor médio, obtemos um  $\epsilon$  entre  $\alpha$  e  $\frac{p}{q}$  e, portanto, dentro de  $[\alpha - d, \alpha + d]$  tal que

$$\left| f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| |f'(\epsilon)|.$$

Como  $\epsilon \in [\alpha - d, \alpha + d]$  temos que  $|f'(\epsilon)| < M$ . Como  $f(\alpha) = 0$  temos pela igualdade anterior que

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| < M \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|. \quad (1)$$

Agora

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + a_0 q^n}{q^n} \right|. \quad (2)$$

Como  $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$  então o numerador da fração  $\boxed{2}$  não é zero, mas é um número inteiro.

Assim

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq \frac{1}{|q|^n}.$$

Pela equação I, obtemos

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{M|q|^n},$$

para qualquer racional  $\frac{p}{q} \in [\alpha - d, \alpha + d] \setminus \{\alpha\}$ .

Agora se o racional  $\frac{p}{q} \notin [\alpha - d, \alpha + d]$ , isto é,  $\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > d$  então

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > \frac{d}{|q|^n}, \text{ pois } |q|^n \geq 1.$$

Escolhendo  $\frac{1}{A} = \min \left\{ \frac{1}{M}, d \right\}$ , obtemos para qualquer racional  $\frac{p}{q} \neq \alpha$  que

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > \frac{1}{A|q|^n}.$$

□

**Definição 1.** Um número  $\alpha \in \mathbb{R}$  é chamado de número de Liouville, se existir uma sequência de números racionais distintos  $\left( \frac{p_j}{q_j} \right)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{|q_j|^j}$ .

**Teorema 2.** Todo número de Liouville é transcendente.

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  um número de Liouville. Por definição existe uma sequência de números racionais distintos  $\left( \frac{p_j}{q_j} \right)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{|q_j|^j}$ . Podemos supor que  $p_j$  é inteiro e  $q_j$  é natural para todo  $j$ .

Suponha por contradição que  $\alpha$  seja algébrico, então ele é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros de grau  $n$ . Pelo teorema I, existe uma constante  $A > 0$  tal que  $\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| > \frac{1}{Aq_j^n}$ .

As duas desigualdades acima juntas dão

$$\frac{1}{q_j^j} > \left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| > \frac{1}{Aq_j^n}.$$

Portanto,  $|q_j|^{j-n} < A$ . Se existir uma subsequência  $(q_{j_t})_t$  de  $(q_j)_j$  tal que  $q_{j_t} > 1$ , então

$$A > q_{j_t}^{j_t-n} \geq 2^{j_t-n}.$$

Isso é absurdo, porque  $j_t \rightarrow \infty$ . Isso significa que existe  $N$  tal que  $q_j = 1$  para todo  $j > N$ .

Assim para  $j > N$ ,

$$|\alpha - p_j| = \left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{|q_j|^j} = 1.$$

Mas só existe uma quantidade finita de inteiros  $p_j$  que satisfazem essa desigualdade.

Então para  $j > N$ , a quantidade de números distintos na sequência  $\left( \frac{p_j}{q_j} \right)_{j \in \mathbb{N}}$  é finita.

Portanto, a quantidade de números distintos na sequência  $\left( \frac{p_j}{q_j} \right)_{j \in \mathbb{N}}$  é finita. Mas, pela definição dos números de Liouville, todos os racionais  $\left( \frac{p_j}{q_j} \right)_{j \in \mathbb{N}}$  são distintos, o que é uma contradição.

□

**Exemplo 2.** Seja  $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}}$ , onde  $a_k \in \{1, 2, \dots, 9\}$  para todo  $k$ .

Defina  $p_j = \sum_{k=1}^j \frac{a_k 10^{j!}}{10^{k!}}$  e  $q_j = 10^{j!}$  para todo  $j$ . Note que  $p_j$  é inteiro e

$$\frac{p_j}{q_j} = \sum_{k=1}^j \frac{a_k}{10^{k!}}.$$

Assim  $\left( \frac{p_j}{q_j} \right)_{j \in \mathbb{N}}$  é uma sequência crescente de racionais, portanto todos são distintos.

Agora

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| &= \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} \leq \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{9}{10^{k!}} = \frac{9}{10^{(j+1)!}} \left( 1 + \frac{1}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+3)!-(j+1)!}} + \dots \right) \\ &< \frac{9}{10^{(j+1)!}} \left( 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) = \frac{9}{10^{(j+1)!}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10^{(j+1)!}} \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{10}{10^{(j+1)!}} = \frac{10}{(10^{j!})^{j+1}} = \frac{10}{(10^{j!})^j 10^{j!}} < \frac{1}{(10^{j!})^j} = \frac{1}{q_j^j}.$$

Isso mostra que  $\alpha$  é um número de Liouville e, portanto, transcendente pelo último teorema.

Agora veremos a demonstração que o número de Euler é transcendente.

## 2 Transcendência do e

A demonstração da transcendência do  $e$  que veremos a seguir é devida a Hurwitz que simplifica a prova de Hilbert, que já havia simplificado a de Hermite, que foi a original. Esta-

mos seguindo o livro: [Herstein \(1975\)](#).

Precisaremos do seguinte lema.

**Lema 1.** Seja  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in [0, n]$ . Temos que  $|(1-x)(2-x)\dots(n-x)| \leq n!$

*Demonstração.* Seja  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $k-1 \leq x \leq k$ .

Note que  $\prod_{j=1}^n (j-x) = \prod_{j=1}^{k-1} (k-j-x) \cdot \prod_{j=1}^{n-k} (k+j-x)$

Como  $|k-j-x| \leq |k-x| + j \leq j+1$ ,

$$\prod_{j=1}^{k-1} |(k-j-x)| \leq \prod_{j=1}^{k-1} (j+1) = 2 \dots k.$$

Agora como  $|k+j-x| \leq |k-x| + j \leq j+1 \leq k+j$ ,

$$\prod_{j=1}^{n-k} |(k+j-x)| \leq \prod_{j=1}^{n-k} (k+j) \leq (k+1) \dots n.$$

Portanto,  $\prod_{j=1}^n (j-x) \leq n!$

□

**Teorema 3.** O número  $e$  é transcendente.

*Demonstração.* Primeiro começemos com uma observação que vale para um polinômio com coeficientes reais qualquer. Seja  $f(x)$  um polinômio com coeficientes reais de grau  $r$ . Depois usaremos um  $f(x)$  específico.

Defina  $F(x) = f(x) + f^{(1)}(x) + \dots + f^{(r)}(x)$ , onde  $f^{(i)}(x)$  é a  $i$ -ésima derivada de  $f$ .

Note que  $\frac{d(e^{-x}F(x))}{dx} = -e^{-x}F(x) + e^{-x}F^{(1)}(x)$ .

Como  $f^{(r+1)}(x) = 0$ , já que  $f(x)$  é um polinômio de grau  $r$ , então

$$F^{(1)}(x) = f^{(1)}(x) + \dots + f^{(r)}(x) = F(x) - f(x).$$

Assim  $\frac{d(e^{-x}F(x))}{dx} = -e^{-x}F(x) + e^{-x}(F(x) - f(x)) = -e^{-x}f(x)$ .

Como  $e^{-x}F(x)$  é uma função continuamente diferenciável no intervalo  $[0, k]$ , para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , então existe  $\theta_k \in ]0, 1[$  tal que

$$\frac{e^{-k}F(k) - (e^0F(0))}{k - 0} = \frac{d(e^{-x}F(x))}{dx} \bigg|_{\theta_k k}.$$

Portanto,  $e^{-k}F(k) - F(0) = -e^{-\theta_k k}f(\theta_k k)k$ , ou de forma equivalente,

$$F(k) - e^kF(0) = -e^{(1-\theta_k)k}f(\theta_k k)k.$$

Variando esse  $k = 1, \dots, n$  obtemos

$$\begin{aligned} F(1) - eF(0) &= -e^{1-\theta_1} f(\theta_1) = \epsilon_1 \\ F(2) - e^2 F(0) &= -2e^{(1-\theta_2)\cdot 2} f(\theta_2 \cdot 2) = \epsilon_2 \\ &\vdots \\ F(n) - e^n F(0) &= -ne^{(1-\theta_n)\cdot n} f(\theta_n \cdot n) = \epsilon_n. \end{aligned}$$

Agora suponha que exista um polinômio  $p(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$  com coeficientes inteiros tal que  $p(e) = 0$ . Note que se  $c_0 = 0$  então  $p(x)/x$  é outro polinômio cuja raiz é  $e$ . Sem perda de generalidade podemos supor que  $c_0 \neq 0$ . Multiplicando por  $-1$  se necessário podemos supor que  $c_0 > 0$ .

Se multiplicarmos a primeira equação da fórmula acima por  $c_1$ , a segunda por  $c_2$  e assim sucessivamente e depois somarmos obteremos

$$c_1 F(1) + c_2 F(2) + \dots + c_n F(n) - F(0)(c_1 e^1 + c_2 e^2 + \dots + c_n e^n) = c_1 \epsilon_1 + \dots + c_n \epsilon_n.$$

Lembre- se  $c_1 e^1 + c_2 e^2 + \dots + c_n e^n = -c_0$ . Assim

$$c_0 F(0) + c_1 F(1) + c_2 F(2) + \dots + c_n F(n) = c_1 \epsilon_1 + \dots + c_n \epsilon_n.$$

Finalmente definiremos

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p (2-x)^p \dots (n-x)^p, \quad (3)$$

onde  $p$  é qualquer primo maior do que  $n$  e  $c_0$ .

Quando expandido,  $f(x)$  fica com o seguinte formato:

$$f(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{a_0 x^p}{(p-1)!} + \frac{a_1 x^{p+1}}{(p-1)!} + \dots, \text{ onde os } a_i \in \mathbb{Z}.$$

Se derivarmos  $\frac{x^{p+k}}{(p-1)!}$  um número de vezes maior ou igual a  $p$  vezes obtemos algo parecido com

$$\frac{(k+p)(k+p-1)\dots(k+1)\cdot m}{(p-1)!} x^s = \frac{(k+p)!}{k!(p-1)!} m x^s, \text{ com } m \in \mathbb{Z}.$$

Sabemos de combinatória que  $\binom{k+p}{p} = \frac{(k+p)!}{k!p!} \in \mathbb{N}$ .

Portanto  $\binom{k+p}{p} p = \frac{(k+p)!}{k!(p-1)!} \in \mathbb{N}$ .

Concluímos que  $\frac{(k+p)!}{k!(p-1)!} \in \mathbb{N}$  e é divisível por  $p$ .

Portanto, para  $i \geq p$ ,  $f^{(i)}(x)$  é um polinômio com coeficientes inteiros e múltiplos de  $p$ . Consequentemente,  $f^{(i)}(j) \in \mathbb{Z}$  e é múltiplo de  $p$  para qualquer  $j \in \mathbb{Z}$ .

Pela equação (3), sabemos que  $1, 2, \dots, n$  são raízes de multiplicidade  $p$  de  $f(x)$ . Portanto, para  $j = 1, \dots, n$  temos

$$f(j) = f^{(1)}(j) = f^{(2)}(j) = \dots = f^{(p-1)}(j) = 0.$$

Assim

$$F(j) = \overbrace{f(j) + f^{(1)}(j) + \dots + f^{(p-1)}(j)}^{=0} + \overbrace{f^{(p)}(j) + \dots + f^{(r)}(j)}^{\text{múltiplo de } p}.$$

Então para  $j = 1, \dots, n$ ,  $F(j)$  é múltiplo de  $p$ .

Pela equação (3), 0 também é raiz de  $f(x)$ , mas com multiplicidade  $p-1$ , então  $f(0) = f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = \dots = f^{(p-2)}(0) = 0$  e  $f^{(p-1)}(0) = (n!)^p$  (veja a expansão de  $f(x)$  acima).

Novamente para  $i \geq p$  temos  $f^{(i)}(0)$  é inteiro múltiplo de  $p$ .

$$\text{Assim } F(0) = \overbrace{f(0) + \dots + f^{(p-2)}(0)}^{=0} + \overbrace{f^{(p-1)}(0)}^{=(n!)^p} + \overbrace{f^{(p)}(0) + \dots + f^{(r)}(0)}^{\text{múltiplo de } p}.$$

Lembre-se que  $p > n$ , o que implica que  $(n!)^p$  não é múltiplo de  $p$ . Assim  $F(0) \in \mathbb{Z}$ , mas não é múltiplo de  $p$ .

Pela definição dos  $\epsilon_j$  e pela equação (3), temos que

$$\epsilon_j = \frac{-je^{j(1-\theta_j)}(1-j\theta_j)^p(2-j\theta_j)^p \dots (n-j\theta_j)^p(j\theta_j)^{p-1}}{(p-1)!},$$

onde  $\theta_j \in ]0, 1[$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Agora note que

- $|-e^{j(1-\theta_j)}| < e^j \leq e^n$ ,
- $|(j\theta_j)^{p-1}j| < j^p \leq n^p$  e
- para todo  $x \in [0, j]$ , onde  $j \in \{1, \dots, n\}$ , temos que  $|(1-x)(2-x) \dots (n-x)| \leq n!$ , pelo lema I.

Portanto,  $|(1-j\theta_j)(2-j\theta_j) \dots (n-j\theta_j)| \leq n!$  e consequentemente

$$|(1-j\theta_j)(2-j\theta_j) \dots (n-j\theta_j)|^p \leq (n!)^p.$$

Logo,  $|\epsilon_j| \leq \frac{e^n(n!)^p n^p}{(p-1)!} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ . Então podemos escolher um  $p$  primo grande, maior que  $c_0$  e  $n$  tal que

$$|c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + \dots + c_n\epsilon_n| < 1$$

Como  $c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + \dots + c_n\epsilon_n = c_0F(0) + c_1F(1) + \dots + c_nF(n) \in \mathbb{Z}$ , a única possibilidade é  $c_0F(0) + c_1F(1) + \dots + c_nF(n) = 0$ . Entretanto,  $c_0F(0) + c_1F(1) + \dots + c_nF(n)$  não pode ser 0, pois 0 é múltiplo de  $p$ . Absurdo.

Conclusão e não pode ser algébrico. □

### 3 Conclusão

Nesse trabalho vimos como técnicas elementares de cálculo foram utilizadas na demonstração da transcendência de  $e$  e dos números de Liouville. Esses resultados são exemplos de como cálculo é uma ferramenta útil também no estudo de números.

### Referências

ERDÖS, P.; DUDLEY U. Some Remarks and Problems in Number Theory Related to the Work of Euler. **Mathematics Magazine**, v. 56, n. 5, p. 292-298, 1983.

FIGUEIREDO, D. G. **Números irracionais e transcendentes**. 3 ed., Rio de Janeiro: SBM - Coleção Iniciação Científica, 2002.

HERSTEIN, I. N. **Topics in algebra**. 2 ed., New York: John Wiley & Sons, 1975.



## Teoremas de Hahn-Banach e algumas aplicações

Lorena Bezerra de Almeida  
Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade Federal de Uberlândia  
lore.lo2310@ufu.br

Elisa Regina dos Santos  
Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade Federal de Uberlândia  
elisars@ufu.br

**Resumo.** Neste trabalho, exploramos o Teorema de Hahn-Banach e suas aplicações na Análise Funcional. Originário do trabalho de Helly, Hahn e Banach no início do século XX, o teorema desempenha um papel fundamental na extensão de funcionais lineares contínuos definidos em subespaços para todo o espaço, sem perder a continuidade ou a norma. Entre as diversas aplicações discutidas, destacamos a extensão de funcionais lineares contínuos, a relação entre a separabilidade de um espaço normado e seu dual, e a representação de espaços normados separáveis como subespaços de  $\ell_\infty$ . Essas aplicações ressaltam a versatilidade e a importância do teorema na teoria dos espaços normados e na Análise Funcional em geral. Além disso, discutimos como a extensão de funcionais auxilia na caracterização da norma de vetores em termos de funcionais lineares e como a separação de pontos em subespaços fechados é facilitada pelo teorema. As contribuições teóricas apresentadas são cruciais para uma compreensão mais profunda das propriedades estruturais dos espaços normados e seus duais, evidenciando o papel central do Teorema de Hahn-Banach na Análise Funcional contemporânea.

**Palavras-chave:** Análise Funcional. Funcionais Lineares Contínuos. Espaços Normados. Espaços Separáveis.

### Introdução

O Teorema de Hahn-Banach é um dos pilares da Análise Funcional cujas origens remontam a trabalhos de Helly e Hahn no início do século XX. Helly provou formas menos gerais do teorema em 1912, e Hahn expandiu esses resultados em 1922. A forma mais conhecida, envolvendo funcionais definidos em espaços de Banach, foi publicada por Hahn em 1927. Banach completou o desenvolvimento do teorema em 1929, formulando-o para funcionais definidos em espaços normados. As primeiras provas desses resultados frequentemente usavam indução transfinita, sendo que o Lema de Zorn, uma ferramenta moderna mais comum, só foi introduzido em 1935 (Pietsch, 2007).

Neste trabalho, exploramos o Teorema de Hahn-Banach e suas aplicações em várias áreas da Análise Funcional. Entre as aplicações discutidas, destacamos a extensão de funcionais lineares contínuos, a relação entre a separabilidade de um espaço normado e de seu dual, e a representação de espaços normados separáveis como subespaços de  $\ell_\infty$ . Essas aplicações ilustram a versatilidade e a importância do Teorema de Hahn-Banach na teoria dos espaços normados e na Análise Funcional como um todo.

## 1 Definições e resultados preliminares

Ao longo deste trabalho, utilizaremos o símbolo  $\mathbb{K}$  para denotar o corpo dos números reais ( $\mathbb{R}$ ) ou complexos ( $\mathbb{K}$ ), o símbolo  $\mathcal{L}(E, F)$  para indicar o espaço dos operadores lineares contínuos entre espaços normados  $E$  e  $F$ , e  $E'$  para denotar  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ . Suparemos que o leitor esteja familiarizado com os conceitos de espaço de Banach, operador linear contínuo e algumas definições de Topologia Geral. Sugerimos (Botelho; Pellegrino; Teixeira, 2015) para mais detalhes. Vejamos algumas definições e resultados preliminares.

**Definição 1.** Sejam  $E$  um espaço normado,  $x_0 \in E$  e  $A \subseteq E$ . A **distância** do ponto  $x_0$  ao conjunto  $A$  é dada por

$$\text{dist}(x_0, A) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in A\}.$$

**Proposição 1.** Sejam  $E$  um espaço normado,  $x \in E$  e  $A \subseteq E$ . Então,  $\text{dist}(x, A) = 0$  se, e somente se,  $x \in \overline{A}$ , onde  $\overline{A}$  é o fecho de  $A$ .

*Demonstração.* Sabemos que  $x \in \overline{A}$  se, e somente se, existe uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Então, basta mostrar que  $\text{dist}(x, A) = 0$  se, e somente se, existe uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .

( $\Rightarrow$ ) Por hipótese, temos que  $\inf\{\|x - y\| : y \in A\} = \text{dist}(x, A) = 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_\varepsilon \in A$  tal que  $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$ . Daí,

$$\begin{aligned} &\text{para } \varepsilon = 1 > 0, \text{ existe } x_1 \in A \text{ tal que } \|x - x_1\| < 1; \\ &\text{para } \varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \text{ existe } x_2 \in A \text{ tal que } \|x - x_2\| < \frac{1}{2}; \\ &\quad \vdots \\ &\text{para } \varepsilon = \frac{1}{n} > 0, \text{ existe } x_n \in A \text{ tal que } \|x - x_n\| < \frac{1}{n}. \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Assim, obtemos uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$  tal que

$$0 \leq \|x - x_n\| < \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Portanto,  $x_n \rightarrow x$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $\varepsilon > 0$ . Como existe uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$  tal que  $x_n \rightarrow x$ , então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que  $0 \leq \|x - x_{n_0}\| < \varepsilon$ . Assim,

$$\text{dist}(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\} = 0.$$

 $\square$ 

**Definição 2.** Um espaço normado  $E$  é dito **separável** se contém um subconjunto enumerável e denso em  $E$ . Mais geralmente, um espaço métrico  $M$  é dito **separável** quando contém um subconjunto enumerável e denso em  $M$ .

**Proposição 2.** Todo subespaço de um espaço métrico separável é separável.

*Demonstração.* (Botelho, 2024), Corolário 10.8.

 $\square$ 

Na proposição a seguir denotamos por  $[A]$  o subespaço gerado por um subconjunto  $A$  de um espaço vetorial  $E$ .

**Proposição 3.** Um espaço normado  $E$  é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável  $A \subseteq E$  tal que  $[A]$  é denso em  $E$ .

*Demonstração.* Veja (Botelho; Pellegrino; Teixeira, 2015), Lema 1.6.3.

 $\square$ 

**Proposição 4.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados sobre  $\mathbb{K}$ .

(a) Dado  $T : E \rightarrow F$  linear,  $T$  é contínuo se, e somente se, existe  $C \geq 0$  tal que  $\|T(x)\| \leq C\|x\|$  para todo  $x \in E$ .

(b) A expressão

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

define uma norma no espaço  $\mathcal{L}(E, F)$ .

(c)  $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$  para todos  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $x \in E$ .

*Demonstração.* Veja (Botelho; Pellegrino; Teixeira, 2015), Teorema 2.1.1 e Proposição 2.1.4.

 $\square$ 

**Definição 3.** Dizemos que dois espaços normados  $E$  e  $F$  são **topologicamente isomorfos**, ou simplesmente **isomorfos**, se existir um operador linear contínuo bijetor  $T : E \rightarrow F$  cujo operador inverso  $T^{-1} : F \rightarrow E$ , que é sempre linear, é também contínuo. Esse operador  $T$  é chamado **isomorfismo topológico**, ou simplesmente **isomorfismo**.

**Definição 4.** Sejam  $E, F$  espaços normados e  $f : E \rightarrow F$  uma função. Dizemos que  $f$  é uma **isometria** se  $\|f(x)\| = \|x\|$  para todo  $x \in E$ . Um operador linear que é uma isometria é chamado **isometria linear**. Um isomorfismo que é uma isometria é chamado de **isomorfismo isométrico** e, nesse caso, dizemos que os espaços são **isomorfos isometricamente**.

**Observação 1.** *Toda isometria linear é contínua e injetora. De fato, sejam  $E, F$  espaços normados e  $T : E \rightarrow F$  uma isometria linear. Note que*

$$x \in \text{Nuc}(T) \iff T(x) = 0 \iff \|x\| = \|T(x)\| = 0 \iff x = 0.$$

*Logo,  $T$  é injetor. Além disso, observe que*

$$\|T(x)\| = \|x\| \leq \|x\|, \text{ para todo } x \in E.$$

*Pela Proposição 4(a),  $T$  é contínuo.*

**Observação 2.** *Toda isometria linear sobrejetora é um isomorfismo. Com efeito, sejam  $E, F$  espaços normados e  $T : E \rightarrow F$  uma isometria linear sobrejetora. Como vimos na observação anterior,  $T$  é injetora e contínua, logo  $T$  é bijetora e contínua. Por  $T$  ser linear, sabemos que  $T^{-1}$  é linear. Seja  $y \in F$ . Como  $T$  é bijetora, existe um único  $x \in E$  tal que  $T(x) = y$ . Assim,*

$$\|T^{-1}(y)\| = \|x\| = \|T(x)\| = \|y\|.$$

*Daí,  $T^{-1}$  é uma isometria linear e, portanto, contínua. Desse modo,  $T$  é isomorfismo.*

## 2 O Teorema da Extensão de Hahn-Banach

A ideia central do Teorema de Hahn-Banach na sua forma aplicável a espaços normados consiste na capacidade de estender funcionais lineares contínuos que são inicialmente definidos em um subespaço  $G$  de um espaço normado  $E$ . Essa extensão pode ser feita de maneira que não apenas a linearidade e a continuidade sejam mantidas, mas também o valor da norma seja preservado.

**Teorema 1** (Teorema de Hahn-Banach). *Sejam  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$  e  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que satisfaz*

$$\begin{aligned} p(ax) &= |a| \cdot p(x), \text{ para todos } a \in \mathbb{K} \text{ e } x \in E, \\ p(x+y) &\leq p(x) + p(y) \text{ para todos } x, y \in E. \end{aligned}$$

*Se  $G \subseteq E$  é um subespaço vetorial de  $E$  e  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$  um funcional linear tal que  $|\varphi(x)| \leq p(x)$  para todo  $x \in G$ , então existe um funcional linear  $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{K}$  que estende  $\varphi$  a  $E$  e que satisfaz  $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$  para todo  $x \in E$ .*

*Demonstração.* Veja (Botelho; Pellegrino; Teixeira, 2015), Teorema 3.1.2. □

Vejamos algumas consequências do Teorema de Hahn-Banach.

**Corolário 1** (Teorema de Hahn-Banach). *Seja  $G$  um subespaço de um espaço normado sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  e seja  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$  um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo  $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{K}$  cuja restrição a  $G$  coincide com  $\varphi$  e  $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$ .*

*Demonstração.* Tome  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$ . Dados  $x, y \in E$  e  $a \in \mathbb{K}$ , note que

$$p(ax) = \|\varphi\| \cdot \|ax\| = |a| \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\| = |a| \cdot p(x)$$

e

$$p(x+y) = \|\varphi\| \cdot \|x+y\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| + \|\varphi\| \cdot \|y\| = p(x) + p(y).$$

Como  $\varphi$  é contínuo, pela Proposição 4(c) segue que

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| = p(x), \text{ para todo } x \in G.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear  $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{K}$  cuja restrição a  $G$  coincide com  $\varphi$  e que satisfaz  $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$  para todo  $x \in E$ . Observe que

$$\{|\varphi(x)| : x \in G \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \{|\tilde{\varphi}(x)| : x \in G \text{ e } \|x\| \leq 1\} \subseteq \{|\tilde{\varphi}(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}.$$

Assim,

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in G \text{ e } \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{|\tilde{\varphi}(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \|\tilde{\varphi}\|. \quad (1)$$

Por outro lado,

$$|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|, \text{ para todo } x \in E.$$

Daí,  $\|\tilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$ , e  $\tilde{\varphi}$  é contínuo, pela Proposição 4(a). Disso e de (1), resulta que  $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$ .  $\square$

**Corolário 2.** *Seja  $E$  um espaço normado. Para todo  $x_0 \in E$ , com  $x_0 \neq 0$ , existe um funcional linear  $\varphi \in E'$  tal que  $\|\varphi\| = 1$  e  $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ .*

*Demonstração.* Considere  $G = [x_0]$  e defina  $\tilde{\varphi} : G \rightarrow \mathbb{K}$  por  $\tilde{\varphi}(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$ . Dados  $\alpha x_0, \beta x_0 \in G$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ , temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\lambda(\alpha x_0) + \beta x_0) &= \tilde{\varphi}((\lambda\alpha + \beta)x_0) = (\lambda\alpha + \beta)\|x_0\| = \lambda \cdot \alpha \|x_0\| + \beta \|x_0\| \\ &= \lambda \tilde{\varphi}(\alpha x_0) + \tilde{\varphi}(\beta x_0). \end{aligned}$$

Logo,  $\tilde{\varphi}$  é linear. Além disso,

$$|\tilde{\varphi}(\alpha x_0)| = |\alpha| \cdot \|x_0\| = \|\alpha x_0\| \leq \|\alpha x_0\|, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Da Proposição 4(a)  $\tilde{\varphi}$  é contínuo. Pelo Corolário 1, existe um funcional linear contínuo  $\varphi :$

$E \rightarrow \mathbb{K}$  tal que  $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$  para todo  $x \in G$  e  $\|\varphi\| = \|\tilde{\varphi}\|$ . Assim,

$$\|\varphi\| = \|\tilde{\varphi}\| = \sup\{|\tilde{\varphi}(x)| : x \in G \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|\alpha x_0\| : \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \|\alpha x_0\| \leq 1\} = 1.$$

Como  $x_0 \in G$ , então  $\varphi(x_0) = \tilde{\varphi}(x_0) = \|x_0\|$ . □

**Corolário 3.** *Sejam  $E$  um espaço normado,  $E \neq \{0\}$  e  $x \in E$ . Então,*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\}.$$

*Demonstração.* Para cada  $\varphi \in E'$  com  $\|\varphi\| \leq 1$ , temos que

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|x\|.$$

Assim,  $\|x\|$  é uma cota superior dos conjuntos  $\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\}$  e  $\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}$ . Se  $x \neq 0$ , pelo Corolário 2, existe  $\phi \in E'$  tal que  $\|\phi\| = 1$  e  $|\phi(x)| = \|x\|$ , ou seja,  $\|x\| \in \{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\}$  e  $\|x\| \in \{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}$ . Então,

$$\max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\} = \|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}. \quad \square$$

### 3 Aplicações do Teorema de Hahn-Banach para espaços separáveis

Nesta seção, exploramos algumas aplicações práticas do Teorema de Hahn-Banach em espaços normados separáveis. Em particular, veremos como esse teorema nos permite estabelecer a existência de funcionais lineares com propriedades específicas, investigar a relação entre a separabilidade de um espaço e seu dual, e demonstrar que todo espaço normado separável pode ser isomorficamente embutido em um espaço muito conhecido, o  $\ell_\infty$ . Essa última aplicação não só ilustra a utilidade do Teorema de Hahn-Banach, mas também sublinha a riqueza estrutural dos espaços normados separáveis, possibilitando uma visão mais abrangente de sua funcionalidade.

**Teorema 2.** *Sejam  $E$  um espaço normado,  $M$  um subespaço fechado de  $E$ ,  $y_0 \in E - M$  e  $d = \text{dist}(y_0, M)$ . Então, existe um funcional linear  $\varphi \in E'$  tal que  $\|\varphi\| = 1$ ,  $\varphi(y_0) = d$  e  $\varphi(x) = 0$  para todo  $x \in M$ .*

*Demonstração.* Seja  $N = M \oplus [y_0]$ . Então, para  $z \in N$ , existem únicos  $a \in \mathbb{K}$  e  $x \in M$  tais que  $z = x + ay_0$ . Defina

$$\varphi_0 : N \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_0(x + ay_0) = ad.$$

Dados  $x_1 + a_1 y_0, x_2 + a_2 y_0 \in N$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ , temos que

$$\begin{aligned}\varphi_0(\lambda(x_1 + a_1 y_0) + (x_2 + a_2 y_0)) &= \varphi_0((\lambda x_1 + x_2) + (\lambda a_1 + a_2) y_0) = (\lambda a_1 + a_2) d \\ &= \lambda \cdot a_1 d + a_2 d = \lambda \varphi_0(x_1 + a_1 y_0) + \varphi_0(x_2 + a_2 y_0).\end{aligned}$$

Logo,  $\varphi_0$  é linear. Note que

$$\varphi_0(M) = \{\varphi_0(x + 0 \cdot y_0) : x \in M\} = \{0\},$$

Além disso,  $\varphi_0(y_0) = \varphi_0(0 + 1 \cdot y_0) = d$ .

Provemos que  $\|\varphi_0\| = 1$ . Seja  $z = x + a y_0 \in N$ . Para  $a \neq 0$ ,

$$|\varphi_0(z)| = |a| \cdot d \leq |-a| \cdot \left\| \frac{x}{-a} - y_0 \right\| = \|x + a y_0\| = \|z\|,$$

e para  $a = 0$  a desigualdade  $|\varphi_0(z)| \leq \|z\|$  é óbvia. Assim,  $\|\varphi_0\| \leq 1$  e, pela Proposição 4(a),  $\varphi_0$  é contínuo.

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_\varepsilon \in M$  tal que  $d \leq \|y_0 - x_\varepsilon\| < d + \varepsilon$ . Seja  $z_\varepsilon = \frac{y_0 - x_\varepsilon}{\|y_0 - x_\varepsilon\|}$ . Então,  $z_\varepsilon \in N$ ,  $\|z_\varepsilon\| = 1$  e

$$\varphi_0(z_\varepsilon) = \frac{d}{\|y_0 - x_\varepsilon\|} > \frac{d}{d + \varepsilon}.$$

Daí,

$$\|\varphi_0\| = \sup\{|\varphi_0(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \geq |\varphi_0(z_\varepsilon)| > \frac{d}{d + \varepsilon} \quad (2)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Por  $M$  ser fechado e da Proposição 1, segue que

$$\text{dist}(y_0, M) = 0 \iff y_0 \in M.$$

Pela hipótese,  $y_0 \notin M$ . Logo,  $d = \text{dist}(y_0, M) > 0$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  em (2), obtemos  $\|\varphi_0\| \geq 1$ .

Portanto,  $\|\varphi_0\| = 1$ . Pelo Teorema de Hahn-Banach (Corolário 1), existe  $\varphi \in E'$  que estende  $\varphi_0$  a  $E$  tal que  $\|\varphi\| = \|\varphi_0\| = 1$ . Por fim, como  $M \subseteq N$  e  $y_0 \in N$ , temos  $\varphi(M) = \varphi_0(M) = \{0\}$  e  $\varphi(y_0) = \varphi_0(y_0) = d$ .  $\square$

**Teorema 3.** *Seja  $E$  um espaço normado. Se  $E'$  é separável, então  $E$  também é separável.*

*Demonstração.* Seja  $S_{E'}$  a esfera unitária de  $E'$ , ou seja,  $S_{E'} = \{\varphi \in E' : \|\varphi\| = 1\}$ . Pela Proposição 2,  $S_{E'}$  é separável. Seja  $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$  um subconjunto enumerável e denso de  $S_{E'}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , podemos tomar  $x_n \in S_E$  tal que  $|\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}$ . Chamemos  $M = \overline{[x_1, x_2, \dots]}$  e provemos que  $M = E$ . Suponha que  $M \neq E$ . Então existe  $y_0 \in E - M$ . Pelo Teorema 2, existe  $\varphi \in E'$  com  $\|\varphi\| = 1$  de modo que  $\varphi(y_0) = d = \text{dist}(y_0, M)$  e  $\varphi(x) = 0$  para todo

$x \in M$ . Daí,

$$\|\varphi - \varphi_n\| = \sup_{y \in B_E} |(\varphi - \varphi_n)(y)| \geq |(\varphi - \varphi_n)(x_n)| = |\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}.$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o que contradiz o fato de  $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$  ser denso em  $S_{E'}$ . Portanto,  $M = E$ . Pela Proposição 3,  $E$  é separável.  $\square$

**Teorema 4.** *Todo espaço normado separável é isomorfo isometricamente a um subespaço de  $\ell_\infty$ .*

*Demonastração.* Se  $E = \{0\}$ , basta considerar  $T : E \rightarrow \{(0, 0, \dots)\}$  dada por  $T(x) = (0, 0, \dots)$ . É fácil ver que  $T$  é isometria linear e sobrejetora, logo é isomorfismo isométrico. Suponha  $E \neq \{0\}$  um espaço normado separável e  $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  um subconjunto enumerável denso em  $E$ . Podemos supor que  $0 \notin D$ . Pelo Corolário 2, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe um funcional linear  $\varphi_n \in E'$  tal que  $\|\varphi_n\| = 1$  e  $\varphi_n(x_n) = \|x_n\|$ . Considere o operador

$$T : E \rightarrow \ell_\infty, \quad T(x) = (\varphi_n(x))_{n=1}^\infty.$$

Para cada  $x \in E$  e pela continuidade de cada  $\varphi_n$ , temos

$$|\varphi_n(x)| \leq \|\varphi_n\| \cdot \|x\| = \|x\|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(x)| \leq \|x\|. \quad (3)$$

Portanto,  $T$  está bem definido no sentido de que  $T(x) \in \ell_\infty$ . Além disso, dados  $x, y \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ , obtemos

$$\begin{aligned} T(\lambda x + y) &= (\varphi_n(\lambda x + y))_{n=1}^\infty = (\lambda \varphi_n(x) + \varphi_n(y))_{n=1}^\infty = \lambda (\varphi_n(x))_{n=1}^\infty + (\varphi_n(y))_{n=1}^\infty \\ &= \lambda T(x) + T(y). \end{aligned}$$

Logo,  $T$  é linear. Note que pela desigualdade (3) temos

$$\|T(x)\|_\infty = \|(\varphi_n(x))_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(x)| \leq \|x\|, \quad \text{para todo } x \in E. \quad (4)$$

Então,  $T$  é contínuo pela Proposição 4(a). Observe que

$$\|T(x_k)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(x_k)| \geq |\varphi_k(x_k)| = \|x_k\|, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

De (4) e (5) segue que  $\|T(x_k)\|_\infty = \|x_k\|$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $D$  é denso em  $E$ , dado  $y \in E$ , existe uma sequência  $(y_n)_{n=1}^\infty \subseteq D$  tal que  $y_n \rightarrow y$ . Disso e da continuidade de

$\|T(\cdot)\|$ , resulta que

$$\|y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(y_n)\| = \|T(y)\|.$$

Pela unicidade do limite, obtemos  $\|T(y)\| = \|y\|$  para todo  $y \in E$ . Pela Observação 2,  $T$  é um isomorfismo isométrico entre  $E$  e  $T(E) \subseteq \ell_\infty$ .  $\square$

## Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

## Referências

- PIETSCH, A. **History of Banach Spaces and Linear Operators**. 1. ed. Boston: Springer Science & Business Media, 2007.
- BOTELHO, G. PELLEGRINO, D. TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- BOTELHO, G. **Topologia Geral**. IME-UFU. 2024.



## Topologia generalizada

Henrique Vieira dos Santos Brito

ICENP/UFU

henrique.vieira@ufu.br

Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira

ICENP/UFU

mgov@ufu.br

**Resumo.** Este trabalho explora o conceito de topologia generalizada, inspirado nos estudos de Császár (2002) e Császár (2004). Inicialmente, definimos topologia e apresentamos exemplos, discutindo conjuntos abertos e fechados, além de definir fecho e interior de conjuntos. Em seguida, apresentamos proposições e demonstrações sobre as propriedades de fecho e interior com respeito a uma topologia. Na segunda parte do trabalho, introduzimos a noção de função monotônica  $\gamma$  definida sobre o conjunto das partes de um conjunto  $X$  qualquer e apresentamos exemplos como a função fecho e a função interior. Definimos conjuntos  $\gamma$ -abertos e introduzimos a topologia generalizada. Finalmente, apresentamos resultados que demonstram como gerar topologias generalizadas a partir de funções monotônicas. Este estudo contribui para a compreensão e aplicação de topologias generalizadas, ampliando o escopo das topologias clássicas e oferecendo novas perspectivas para o estudo de topologias.

**Palavras-chave:** topologia generalizada; função monotônica;  $\gamma$ -aberto.

### Introdução

A teoria das topologias generalizadas surge como uma extensão natural da topologia clássica, permitindo uma maior flexibilidade na definição de conceitos fundamentais como abertos, fechados, fecho e interior. Este trabalho é inspirado nas contribuições significativas de Császár (2002), que exploraram propriedades topológicas em espaços generalizados. Inicialmente, revisamos os conceitos básicos de topologia, incluindo exemplos ilustrativos de topologias, e discutimos as definições de conjuntos abertos e fechados. Em seguida, aprofundamos na definição de fecho e interior de conjuntos a partir de uma topologia, apresentando proposições e suas respectivas demonstrações sobre as propriedades desses operadores.

Na segunda parte do trabalho, focamos em funções monotônicas definidas sobre o conjunto das partes de um conjunto  $X$  qualquer, destacando exemplos importantes como a função fecho e a função interior. Introduzimos a noção de conjuntos  $\gamma$ -abertos apartir de uma função  $\gamma$  definida sobre o conjunto das partes de um conjunto  $X$  qualquer e formalizamos a definição

de topologia generalizada. Finalmente, apresentamos resultados que demonstram como topologias generalizadas podem ser geradas a partir de funções monotônicas, oferecendo uma nova perspectiva para o estudo de topologias e ampliando o escopo das topologias tradicionais.

## 1 Noções básicas de Topologia

Nesta seção serão apresentadas definições e resultados sobre Topologia considerados pré-requisitos para a compreensão de objetos e resultados abordados na próxima seção.

**Definição 1.** Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico e  $U \subset M$ . Dizemos que  $U$  é aberto em  $M$  (com respeito a métrica  $d$ ) se, e somente se,  $U = \text{int}(U)$ .

Em outras palavras, dizemos que  $U$  é aberto em um espaço métrico  $M$  se, e somente se, para todo  $a \in U$ , existe  $r_a > 0$  tal que  $B_M(a; r_a) \subset U$ .

Ou ainda, dizemos que  $U$  é aberto em um espaço métrico  $M$  se, e somente se, todos os pontos de  $U$  são pontos interiores (com respeito a métrica de  $M$ ).

**Proposição 1.** Sejam  $M$  um espaço métrico e  $\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(M) : U \text{ é aberto em } M\}$ . As seguintes afirmações são válidas:

- a)  $\emptyset \in \mathcal{T}$  e  $M \in \mathcal{T}$ .
- b) Se  $n \in \mathbb{N}$  e  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$ , então  $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$ .
- c) Se  $I$  é um conjunto qualquer de índices e  $U_i \in \mathcal{T}$ , para todo  $i \in I$ , então  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .

**Demonstração.** a) Dado  $a \in M$ , como  $B_M(a; r) \subset M$  para todo  $r > 0$ , segue que  $a$  é ponto interior de  $M$ . Portanto,  $M$  é aberto em  $M$  e  $M \in \mathcal{T}$ . Agora,  $\emptyset$  é aberto em  $M$  por vacuidade, isto é,  $\emptyset$  é aberto em  $M$ , pois ele não contém pontos que não são pontos interiores de  $M$ . Portanto  $\emptyset \in \mathcal{T}$ .

b) Seja  $a \in \bigcap_{j=1}^n U_j$ , então  $a \in U_j$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ . Como cada  $U_j$  é aberto em  $M$ , existem  $r_j > 0$  tais que  $B_M(a; r_j) \subset U_j$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ . Tome  $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$ . Note que  $r > 0$ . Temos que  $B_M(a; r) \subset B_M(a; r_j) \subset U_j$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ , logo  $B_M(a; r) \subset \bigcap_{j=1}^n U_j$  e  $a$  é ponto interior de  $\bigcap_{j=1}^n U_j$ . Portanto,  $\bigcap_{j=1}^n U_j$  é aberto em  $M$  e  $\bigcap_{j=1}^n U_j \in \mathcal{T}$ .

c) Seja  $a \in \bigcup_{i \in I} U_i$ , então existe  $U_{i_0}$  tal que  $a \in U_{i_0}$ . Como  $U_{i_0}$  é aberto em  $M$ , existe  $r > 0$  tal que  $B_M(a; r) \subset U_{i_0}$ . Assim,  $B_M(a; r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$  e  $a$  é um ponto interior de  $\bigcup_{i \in I} U_i$ . Portanto,  $\bigcup_{i \in I} U_i$  é aberto em  $M$  e  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .  $\square$

Em resumo, a proposição anterior garante que num espaço métrico  $M$  tem-se que:

- a)  $\emptyset$  e  $M$  são abertos em  $M$ ;

- b) intersecções finitas de abertos de  $M$  são abertos de  $M$ ,
- c) uniões arbitrárias de abertos de  $M$  são abertos de  $M$ .

**Exemplo 1.** Seja  $X = \{a, b\}$  tal que  $a \neq b$ . A coleção  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$  é um topologia em  $X$  denominada topologia de Sierpinski. O conjunto  $X = \{a, b\}$  munido com a topologia de Sierpinski é denominado espaço de Sierpinski.

Verifiquemos que a coleção  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$  é uma topologia em  $X = \{a, b\}$ , com  $a \neq b$ .

- i) Nitidamente, temos que  $\emptyset \in \mathcal{T}$  e  $X \in \mathcal{T}$ .
- ii) Temos que  $\emptyset \cap \{a\} = \emptyset \in \mathcal{T}$ ,  $\emptyset \cap X = \emptyset \in \mathcal{T}$ ,  $\{a\} \cap X = \{a\} \in \mathcal{T}$  e  $\emptyset \cap \{a\} \cap X = \emptyset \in \mathcal{T}$ .
- iii) Temos que  $\emptyset \cup \{a\} = \{a\} \in \mathcal{T}$ ,  $\emptyset \cup X = X \in \mathcal{T}$ ,  $\{a\} \cup X = X \in \mathcal{T}$  e  $\emptyset \cup \{a\} \cup X = X \in \mathcal{T}$ .

Logo,  $\mathcal{T}$  satisfaz a três condições exigidas na definição de topologia. Portanto,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$  é uma topologia em  $X = \{a, b\}$ .

**Observação 1.** Seja  $X = \mathbb{R}^n$ . A topologia  $\mathcal{T}_{d_2}$  em  $\mathbb{R}^n$  induzida pela métrica euclidiana é chamada topologia usual.

**Definição 2.** Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico. Dizemos que  $U$  é um aberto em  $X$  com respeito a topologia  $\mathcal{T}$  se, e somente se,  $U \in \mathcal{T}$ .

Em outras palavras, os elementos de uma topologia  $\mathcal{T}$  num conjunto  $X$  são chamados de abertos.

O nome aberto para os elementos de uma topologia qualquer está relacionado com o fato de que nas topologias metrizáveis, os elementos destas são subconjuntos abertos do espaço métrico no sentido da Definição 1.

Uma consideração relevante a ser feita é que não é verdade que intersecção arbitrária de abertos de uma topologia resulta em um aberto da topologia. De fato, considere  $\mathbb{R}$  munido com a topologia  $\mathcal{T}$  induzida pela métrica usual. Temos que  $U_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$  são abertos em  $\mathbb{R}$  com respeito  $\mathcal{T}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entretanto,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1 + \frac{1}{n}) = (0, 1]$  não é um aberto em  $\mathbb{R}$  com respeito  $\mathcal{T}$ .

**Definição 3.** Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico. Dizemos que um subconjunto  $F$  de  $X$  é fechado em  $X$  com respeito a topologia  $\mathcal{T}$  se, e somente se,  $F^c \in \mathcal{T}$ , onde  $F^c$  denota  $X - F$ .

Dado um espaço topológico  $(X, \mathcal{T})$ , denotamos a coleção de todos subconjuntos fechados de  $X$  com respeito a topologia  $\mathcal{T}$  por  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ . Dito de outra forma,

$$\mathcal{F}^{\mathcal{T}} = \{F \in \mathcal{P}(X) : F^c \in \mathcal{T}\}. \quad (1)$$

**Proposição 2.** Sejam  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$  a coleção de fechados em  $X$  com respeito a  $\mathcal{T}$ . As seguintes afirmações são válidas.

- a)  $\emptyset \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$  e  $X \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ .
- b) Se  $I$  é um conjunto qualquer de índices e  $F_i \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ , para todo  $i \in I$ , então  $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ .
- c) Se  $n \in \mathbb{N}$  e  $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ , então  $F_1 \cup \dots \cup F_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ .

**Demonstração.** Basta usar o fato que  $\mathcal{T}$  é um topologia e usar as relações de De Morgan, a saber,  $\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c$  e  $\left(\bigcup_{j=1}^n F_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^n F_j^c$ .  $\square$

**Proposição 3.** Sejam  $X$  um conjunto e  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  uma coleção com as seguintes propriedades:

- i)  $\emptyset \in \mathcal{F}$  e  $X \in \mathcal{F}$ ;
- ii) dados  $I$  um conjunto qualquer de índices e  $F_i \in \mathcal{F}$ , para todo  $i \in I$ , tem-se  $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$ ;
- iii) dados  $n \in \mathbb{N}$  e  $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ , tem-se que  $F_1 \cup \dots \cup F_n \in \mathcal{F}$ .

Se  $\mathcal{T}$  é uma coleção de subconjuntos de  $X$  dada por

$$\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(X) : U^c \in \mathcal{F}\}, \quad (2)$$

então  $\mathcal{T}$  é uma topologia em  $X$  e  $\mathcal{F}^{\mathcal{T}} = \mathcal{F}$ .

**Demonstração.** Basta usar as propriedades de  $\mathcal{F}$  e usar as relações de De Morgan.  $\square$

**Definição 4.** Sejam  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Dizemos que  $\overline{A}$  é a aderência ou o fecho de  $A$  com respeito a topologia  $\mathcal{T}$  se, e somente se,

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}} F. \quad (3)$$

Dados  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $A \subset X$ , segue da Proposição 2, item b), que o fecho  $\overline{A}$  é um conjunto fechado em  $X$ .

Em outras palavras, a Definição 4 diz o fecho de um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  é a intersecção de todos fechados em  $X$  (com respeito a topologia de  $X$ ) que contém  $A$ .

Equivalentemente, o fecho de um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  é o menor fechado em  $X$  (com respeito a topologia de  $X$ ) que contém  $A$ .

**Proposição 4.** Sejam  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Tem-se que  $\overline{A} = ad(A)$ .

**Demonstração.** Seja  $x \in \overline{A}$  e suponha que  $x \notin ad(A)$ . Se  $x \notin ad(A)$ , então existe  $U_0 \in \mathcal{T}$  tal que  $x \in U_0$  e  $U_0 \cap A = \emptyset$ . Tomando  $F_0 = X - U_0$ , temos que  $F_0$  é fechado em  $X$  e  $A \subset F_0$ , ou seja,  $F_0 \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}$ . Assim,  $\overline{A} = (\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}} F) \subset F_0$  e como  $x \notin F_0$  resulta que  $x \notin \overline{A}$ , o que é um absurdo. Logo,  $x \in \overline{A}$  resulta em  $x \in ad(A)$ , isto é,  $\overline{A} \subset ad(A)$ .

Agora, considere  $x \in ad(A)$  e suponha que  $x \notin \overline{A}$ . Se  $x \notin \overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}} F$ , então  $x \notin F_0$ , para algum  $F_0 \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}$ . Tomando  $U_0 = X - F_0$ , temos que  $U_0 \in \mathcal{T}$ ,  $x \in U_0$  e  $U_0 \cap A = \emptyset$ . Isto implica que  $x \notin ad(A)$ , o que é um absurdo. Logo,  $x \in ad(A)$  resulta em  $x \in \overline{A}$ , isto é,  $ad(A) \subset \overline{A}$ .

Portanto,  $\overline{A} = ad(A)$  □

Dado um espaço topológico  $X$  e  $A \subset X$ , como o fecho  $\overline{A}$  é fechado em  $X$  e  $ad(A) = \overline{A}$ , segue que o conjunto de todos os pontos aderentes a  $A$  (com respeito a topologia de  $X$ ) é um conjunto fechado em  $X$ .

**Proposição 5.** *Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $A, B \subset X$ . Se  $B$  é fechado em  $X$  com respeito a topologia  $\mathcal{T}$  e  $A \subset B$ , então  $\overline{A} \subset B$ .*

**Demonstração.** Como  $B$  é fechado em  $X$  e  $A \subset B$  então  $B \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}$ . Logo, pela Definição 4 tem-se que  $\overline{A} = (\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}} F) \subset B$ . Portanto,  $\overline{A} \subset B$  □

**Proposição 6.** *Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $A, B \subset X$ . Se  $A \subset B$ , então  $\overline{A} \subset \overline{B}$ .*

**Demonstração.** Segue imediatamente da definição de fecho de um conjunto que  $B \subset \overline{B}$ . Assim,  $A \subset B \subset \overline{B}$ . Como  $\overline{B}$  é fechado em  $X$  e  $A \subset \overline{B}$ , segue da Proposição 5 que  $\overline{A} \subset \overline{B}$ . □

**Proposição 7.** *Sejam  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $A, B \subset X$ . As seguintes afirmações são válidas:*

- a)  $A \subset \overline{A}$ .
- b)  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ .
- c)  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .
- d)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

**Demonstração.** a) Segue imediatamente da definição de fecho de um conjunto.

b) Segue do item a) que  $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$ . Por outro lado, tomando  $U = \overline{A}$  e  $V = \overline{\overline{A}}$ , temos que  $V$  é fechado em  $X$  e  $U \subset V$ . Assim, segue da Proposição 5 que  $\overline{U} \subset V$ , ou seja,  $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ . Portanto,  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ .

c) Segue do item a) que  $\emptyset \subset \overline{\emptyset}$ . Por outro lado, tomando  $U = \emptyset$  e  $V = \overline{\emptyset}$ , temos que  $V$  é fechado em  $X$  e  $U \subset V$ . Assim, segue da Proposição 5 que  $\overline{U} \subset V$ , ou seja,  $\overline{\emptyset} \subset \emptyset$ . Portanto,  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .

**d)** Como  $A \subset A \cup B$  e  $B \subset A \cup B$ , resulta da Proposição 6 que  $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$  e  $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ . Consequentemente, temos que  $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ . Por outro lado, temos que  $\overline{A} \cup \overline{B}$  é fechado em  $X$  e  $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ . Logo, segue da Proposição 5 que  $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ . Portanto,  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .  $\square$

**Proposição 8.** *Sejam  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Tem-se que  $A$  é fechado em  $X$  com respeito a topologia  $\mathcal{T}$  se, e somente se,  $A = \overline{A}$ .*

**Demonstração.** Temos que  $A \subset \overline{A}$ , conforme item a) da Proposição 7. Por outro lado, tomando  $U = A$  e  $V = A$ , temos que  $V$  é fechado em  $X$  por hipótese e  $U \subset V$ . Assim, segue da Proposição 5 que  $\overline{U} \subset V$ , ou seja,  $\overline{A} \subset A$ . Portanto,  $A = \overline{A}$ .  $\square$

**Proposição 9.** *Se  $(X, \mathcal{T})$  é um espaço topológico e  $A \subset X$ , então o conjunto  $\text{int}(A)$  é aberto em  $X$  com respeito a topologia  $\mathcal{T}$ , isto é,  $\text{int}(A) \in \mathcal{T}$ .*

**Demonstração.** Decorre da definição de ponto interior de  $A$ , com respeito a topologia  $\mathcal{T}$ , que para cada  $x \in \text{int}(A)$ , existe  $U_x \in \mathcal{T}$  tal que  $x \in U_x \subset A$ . Considere a união destes abertos  $U_x$  citados, isto é,  $\bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x$ .

Seja  $y \in \bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x$ . Segue que  $y \in U_{x_0}$ , para algum  $x_0 \in \text{int}(A)$ . Visto que  $U_{x_0} \in \mathcal{T}$  e  $U_{x_0} \subset A$ , segue por definição que  $y$  é um ponto interior de  $A$  com respeito a  $\mathcal{T}$ , isto é,  $y \in \text{int}(A)$ . Logo,  $\bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x \subset \text{int}(A)$ . A inclusão  $\text{int}(A) \subset \bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x$  é óbvia.

Portanto,

$$\text{int}(A) = \bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x. \quad (4)$$

e como  $\text{int}(A)$  é uma união de membros de  $\mathcal{T}$ , conclui-se que  $\text{int}(A) \in \mathcal{T}$ .  $\square$

**Definição 5.** *Sejam  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Dizemos que  $A^\circ$  é o interior de  $A$  com respeito a topologia  $\mathcal{T}$  se, e somente se,*

$$A^\circ = \bigcup_{U \in \mathcal{T}^A} U, \quad (5)$$

onde  $\mathcal{T}^A = \{U \in \mathcal{P}(X) : U \in \mathcal{T} \text{ e } U \subset A\}$ .

Em outras palavras, a Definição 5 diz o interior de um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  é a união de todos abertos em  $X$  (com respeito a topologia de  $X$ ) que estão contidos em  $A$ .

Equivalentemente, o interior de um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  é o maior aberto em  $X$  (com respeito a topologia de  $X$ ) que está contido em  $A$ .

**Proposição 10.** *Se  $(X, \mathcal{T})$  é um espaço topológico e  $A \subset X$ , então  $A^\circ = \text{int}(A)$ .*

**Demonstração.** Dado  $x \in A^\circ = \bigcup_{U \in \mathcal{T}^A} U$ , tem-se que  $x \in U_0$ , para algum  $U_0 \in \mathcal{T}^A$ . Desta forma, temos que  $U_0 \in \mathcal{T}$  e  $x \in U_0 \subset A$ , o que implica por definição que  $x$  é ponto interior de  $A$ , ou seja,  $x \in \text{int}(A)$ . Logo,  $A^\circ \subset \text{int}(A)$ .

Por outro lado, dado  $x \in \text{int}(A)$ , segue que existe  $U_0 \in \mathcal{T}$  tal que  $x \in U_0 \subset A$ . Assim,  $U_0 \in \mathcal{T}^A$  e  $x \in U_0 \subset (\bigcup_{U \in \mathcal{T}^A} U) = A^\circ$ . Logo,  $\text{int}(A) \subset A^\circ$ .

Portanto,  $A^\circ = \text{int}(A)$ . □

**Proposição 11.** *Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $A, B \subset X$ . Se  $B$  é aberto em  $X$  com respeito a topologia  $\mathcal{T}$  e  $B \subset A$ , então  $B \subset A^\circ$ .*

**Demonstração.** Como  $B$  é aberto em  $X$  e  $B \subset A$  então  $B \in \mathcal{T}_A$ . Logo, pela Definição 5 tem-se que  $B \subset (\bigcup_{U \in \mathcal{T}^A} U) = A^\circ$ . Portanto,  $B \subset A^\circ$ . □

**Proposição 12.** *Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $A, B \subset X$ . Se  $A \subset B$ , então  $A^\circ \subset B^\circ$ .*

**Demonstração.** Segue imediatamente da definição de interior de um conjunto que  $A^\circ \subset A$ . Assim,  $A^\circ \subset A \subset B$ . Como  $A^\circ$  é aberto em  $X$  e  $A^\circ \subset B$ , segue da Proposição 11 que  $A^\circ \subset B^\circ$ . □

**Proposição 13.** *Sejam  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $A, B \subset X$ . As seguintes afirmações são válidas:*

- a)  $A^\circ \subset A$ .
- b)  $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ .
- c)  $X^\circ = X$ .
- d)  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ .

**Demonstração. a)** Segue imediatamente da definição de interior de um conjunto.

**b)** Segue do item a) que  $(A^\circ)^\circ \subset A^\circ$ . Por outro lado, tomando  $U = A^\circ$  e  $V = A^\circ$ , temos que  $U$  é aberto em  $X$  e  $U \subset V$ . Assim, segue da Proposição 11 que  $U \subset V^\circ$ , ou seja,  $A^\circ \subset (A^\circ)^\circ$ . Portanto,  $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ .

**c)** Segue do item a) que  $X^\circ \subset X$ . Por outro lado, tomando  $U = X$  e  $V = X$ , temos que  $U$  é aberto em  $X$  e  $U \subset V$ . Assim, segue da Proposição 11 que  $U \subset V^\circ$ , ou seja,  $X \subset X^\circ$ . Portanto,  $X^\circ = X$ .

**d)** Como  $A \cap B \subset A$  e  $A \cap B \subset B$ , resulta da Proposição 12 que  $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$  e  $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$ . Consequentemente, temos que  $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ . Por outro lado, temos que  $A^\circ \cap B^\circ$  é aberto em  $X$  e  $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$ . Logo, segue da Proposição 11 que  $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$ . Portanto,  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ . □

**Proposição 14.** *Sejam  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Tem-se que  $A$  é aberto em  $X$  com respeito a topologia  $\mathcal{T}$  se, e somente se,  $A = A^\circ$ .*

**Demonstração.** Temos que  $A^\circ \subset A$ , conforme item a) da Proposição 13. Por outro lado, tomando  $U = A$  e  $V = A$ , temos que  $U$  é aberto em  $X$  por hipótese e  $U \subset V$ . Assim, segue da Proposição 11 que  $U \subset V^\circ$ , ou seja,  $A \subset A^\circ$ . Portanto,  $A = A^\circ$ .  $\square$

Assim como ocorre em espaços métricos, um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $(X, \mathcal{T})$  é aberto em  $X$  se, e somente se, todos os seus pontos são pontos interiores com respeito a topologia de  $\mathcal{T}$ . De fato, segue da Proposição 10 e da Proposição 14 que

$$A \in \mathcal{T} \iff A = A^\circ = \text{int}(A). \quad (6)$$

Deixaremos as demonstrações das duas proposições a seguir a cargo do leitor.

**Proposição 15.** *Sejam  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Tem-se que*

$$X - \overline{A} = (X - A)^\circ \quad (7)$$

e

$$X - A^\circ = \overline{(X - A)}. \quad (8)$$

**Proposição 16.** *Sejam  $X$  um conjunto e  $g: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  uma aplicação com as seguintes propriedades:*

- i)  $g(A) \subset A$ , para todo  $A \in \mathcal{P}(X)$ ;
- ii)  $g(g(A)) = g(A)$ , para todo  $A \in \mathcal{P}(X)$ ;
- iii)  $g(X) = X$ ;
- iv)  $g(A \cap B) = g(A) \cap g(B)$ , para todos  $A, B \in \mathcal{P}(X)$ .

*Se  $\mathcal{T}$  é uma coleção de subconjuntos de  $X$  dada por*

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X) : A = g(A)\}, \quad (9)$$

*então  $\mathcal{T}$  é uma topologia em  $X$ .*

## 2 Topologia Generalizada

Nesta seção, abordaremos o conceito de Topologia Generalizada e conceitos relacionados a este, bem como noções de continuidade quando se adota Topologias Generalizadas para os domínios e contradomínios das funções.

**Definição 6.** Seja  $X$  um conjunto. A função  $\gamma: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  é dita monotônica se, e somente se, para todos  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  com  $A \subseteq B$ , tem-se que  $\gamma(A) \subseteq \gamma(B)$ .

Denotamos por  $\Gamma(X)$  a coleção de todas as funções monotônicas  $\gamma: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ .

**Exemplo 2.** Seja  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  uma topologia em  $X$ . Segue da Proposição 12 que a função que associa a cada subconjunto  $A$  de  $X$  ao seu interior com respeito à topologia  $\mathcal{T}$ , é monotônica. Em outras palavras, a função  $i_{\mathcal{T}}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  dada por

$$i_{\mathcal{T}}(A) = A^{\circ}, \quad (10)$$

é monotônica.

**Exemplo 3.** Seja  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  uma topologia em  $X$ . Segue da Proposição 6 que a função que associa a cada subconjunto  $A$  de  $X$  ao seu fecho com respeito à topologia  $\mathcal{T}$ , é monotônica. Em outras palavras, a função  $c_{\mathcal{T}}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  dada por

$$c_{\mathcal{T}}(A) = \overline{A} \quad (11)$$

é monotônica.

**Proposição 17.** Seja  $X$  um conjunto. Se  $\gamma, \sigma \in \Gamma(X)$  então  $\sigma \circ \gamma \in \Gamma(X)$ .

**Demonstração.** Sejam  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  tais que  $A \subseteq B$ . Como  $\gamma$  é função monotônica, tem-se que  $A \subseteq B$  implica que  $\gamma(A) \subseteq \gamma(B)$ . Da mesma forma, como  $\sigma$  é função monotônica, tem-se que  $\gamma(A) \subseteq \gamma(B)$  implica que  $\sigma(\gamma(A)) \subseteq \sigma(\gamma(B))$ . Assim, tem-se que  $A \subseteq B$  implica que  $(\sigma \circ \gamma)(A) \subseteq (\sigma \circ \gamma)(B)$ . Portanto,  $\sigma \circ \gamma$  é função monotônica, isto é,  $\sigma \circ \gamma \in \Gamma(X)$ .  $\square$

Segue da Proposição 17 que  $i_{\mathcal{T}} \circ c_{\mathcal{T}}$  é monotônica.

**Definição 7.** Sejam  $X$  um conjunto e  $\gamma: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  uma função. Um subconjunto  $A$  de  $X$  é dito  $\gamma$ -aberto se, e somente se,  $A \subset \gamma(A)$ .

Visto que vazio é subconjunto de qualquer conjunto, é claro que  $\emptyset$  é  $\gamma$ -aberto, ou seja,  $\emptyset \subset \gamma(\emptyset)$ .

**Proposição 18.** Sejam  $X$  um conjunto,  $I$  um conjunto não-vazio de índices e  $\gamma: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  uma função. Se  $\gamma$  é monotônica e  $A_i$  é  $\gamma$ -aberto, para todo  $i \in I$ , então  $\bigcup_{i \in I} A_i$  é  $\gamma$ -aberto.

**Demonstração.** Por hipótese, como cada  $A_i$  é  $\gamma$ -aberto, segue por definição que  $A_i \subset \gamma(A_i)$ , donde resulta que

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} \gamma(A_i). \quad (12)$$

Como  $\gamma$  é monotônica, para cada  $j \in I$  segue por definição que

$$A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \gamma(A_j) \subset \gamma\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$$

e, consequentemente,

$$\bigcup_{i \in I} \gamma(A_i) \subset \gamma\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right). \quad (13)$$

Segue de (12) e (13) que

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subset \gamma\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right).$$

Portanto,  $\bigcup_{i \in I} A_i$  é  $\gamma$ -aberto. □

**Definição 8.** Sejam  $X$  um conjunto,  $I$  um conjunto não-vazio de índices e  $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$  uma coleção de subconjuntos de  $X$ . A coleção  $\mathcal{G}$  é uma topologia generalizada de  $X$  se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

$$(i) \ \emptyset \in \mathcal{G}.$$

$$(ii) \ Se A_i \in \mathcal{G}, \text{ para todo } i \in I, \text{ então } \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{G}.$$

É claro que toda topologia em  $X$  é uma topologia generalizada em  $X$ .

**Proposição 19.** Seja  $X$  um conjunto e  $\gamma \in \Gamma(X)$  uma função monotônica. A coleção de subconjuntos de  $X$  dada por

$$\mathcal{G}_\gamma = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ é } \gamma\text{-aberto}\} \quad (14)$$

é uma topologia generalizada de  $X$ .

**Demonstração.** De fato, isto decorre imediatamente do fato que vazio é sempre  $\gamma$ -aberto e da Proposição 18. □

Como corolário da proposição anterior segue que as seguintes proposições são casos particulares de topologias generalizadas.

**Corolário 1.** Sejam  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $i$  a função interior associada à  $\mathcal{T}$ . A coleção de subconjuntos de  $X$  dada por

$$\mathcal{T}_i = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ é } i\text{-aberto}\} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \subset A^\circ\} \quad (15)$$

é uma topologia generalizada em  $X$  e, além disso,  $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}$ .

**Demonstração.** Como  $i$  é uma função monotônica, segue da Proposição 19 que  $\mathcal{T}_i$  é uma topologia generalizada em  $X$ . Além disso,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_i &= \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ é } i\text{-aberto}\} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \subset A^\circ\} \\ &= \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A = A^\circ\} = \mathcal{T}.\end{aligned}$$

□

**Corolário 2.** Sejam  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e  $c$  a função fecho associada à  $\mathcal{T}$ . A coleção de subconjuntos de  $X$  dada por

$$\mathcal{T}_c = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ é } c\text{-aberto}\} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \subset \overline{A}\} \quad (16)$$

é uma topologia generalizada em  $X$  e, além disso,  $\mathcal{T}_c = \mathcal{P}(X)$ .

**Demonstração.** Como  $c$  é uma função monotônica, segue da Proposição 19 que  $\mathcal{T}_c$  é uma topologia generalizada em  $X$ . Além disso,

$$\mathcal{T}_c = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ é } c\text{-aberto}\} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \subset \overline{A}\} = \mathcal{P}(X).$$

□

**Corolário 3.** Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico. As seguintes coleções de subconjuntos de  $X$  são topologias generalizadas:

- (i)  $\mathcal{T}_{ci} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ é } (c \circ i)\text{-aberto}\} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \subset \overline{(A^\circ)}\}$ .
- (ii)  $\mathcal{T}_{ic} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ é } (i \circ c)\text{-aberto}\} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \subset (\overline{A})^\circ\}$ .
- (iii)  $\mathcal{T}_{cic} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ é } (c \circ i \circ c)\text{-aberto}\} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \subset \overline{(\overline{(A^\circ)})}\}$ .
- (iv)  $\mathcal{T}_{ici} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ é } (i \circ c \circ i)\text{-aberto}\} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \subset \overline{(\overline{(A^\circ)})}^\circ\}$ .

**Demonstração.** Visto  $i$  e  $c$  são funções monotônicas, segue diretamente da Proposição 19 que as composições relativas à tais funções geram topologias generalizadas em  $X$ . □

**Observação 2.** As topologias generalizadas geradas pelas composições entre as funções  $i$  e  $c$  também são chamadas de semi-abertos ( $\gamma = ci$ ), pré-abertos ( $\gamma = ic$ ),  $\beta$ -abertos ( $\gamma = cic$ ) e  $\alpha$ -abertos ( $\gamma = ici$ ).

### 3 Conclusão

Neste trabalho, exploramos a extensão dos conceitos clássicos de topologia através da introdução de topologias generalizadas. A partir das definições fundamentais de topologia, conjuntos abertos e fechados, fecho e interior, avançamos para a análise de funções monotônicas

e sua aplicação na geração de topologias generalizadas. As proposições e demonstrações apresentadas ao longo do estudo reforçam a robustez teórica dessas novas estruturas, evidenciando sua capacidade de ampliar o escopo das topologias tradicionais e oferecer novas ferramentas para o estudo de estruturas da área de Topologia.

Os resultados obtidos demonstram que as topologias generalizadas introduzem novas perspectivas e possibilidades de aplicação. A definição de conjuntos  $\gamma$ -abertos e a formalização de topologias generalizadas a partir de funções monotônicas abrem caminho para futuras pesquisas e aplicações na área da Topologia. Este estudo, portanto, contribui para o avanço do conhecimento em Topologia, oferecendo uma base sólida para investigações futuras e potencializando o desenvolvimento de novos estudos.

## Agradecimentos

Agradecemos ao PET Matemática Pontal, vinculado ao Programa de Educação Tutorial da SESu do Ministério da Educação, pelo apoio e suporte ao desenvolvimento deste trabalho.

## Referências

- CSÁSZÁR, A. Generalized topology, generalized continuity. **Acta Mathematica Hungarica**, v. 96, n. 4, p. 351–357, 2002.
- CSÁSZÁR, A. Closures of open sets in generalized topological spaces. **Ann. Univ. Sci. Bp. Eötvös, Sect. Math.**, v. 47, p. 123–126, 2004.
- KUHLKAMP, N. *Introdução à Topologia Geral*. 2<sup>a</sup> ed. Florianópolis: Ed. UFSC, 2002.



## Um comparativo de investimentos entre renda fixa e renda variável para carteira de investimentos a longo prazo.

Guilherme Martins Ferreira

Universidade Federal de Uberlândia

guilherme.ferreira4@ufu.br

Eduardo Rocha de Paula

Universidade Federal de Uberlândia

eduardo.paula1@ufu.br

Homero Ghioti da Silva

Universidade Federal de Uberlândia

homero@ufu.br

**Resumo.** Neste trabalho, foi realizada uma análise comparativa entre as empresas listadas na bolsa de valores brasileira (B3): Itaúsa e Weg em relação à renda fixa nos resultados nos últimos 9 anos a fim de observar qual seria mais rentável ao final deste período para um perfil de investidor conhecido como Buy & Holder. Os resultados indicaram favoravelmente manter Itaúsa como empresa de investimento a longo prazo para investidor no perfil Buy and Holder. Enquanto a Weg foi boa escolha para investidores de longo prazo mas com o objetivo de ganho de capital, ou seja, comprando as ações e vendendo depois de um tempo na carteira. Para ambos perfis, manter o dinheiro na renda fixa não apresentou vantagens.

**Palavras-chave:** investimentos; renda fixa; renda variável;

### Introdução

Escolhemos as ações das Itaúsa(ITSA4) e Weg(WEG3) com base no perfil de investimento: Buy & Holder (mantém as ações para receber proventos ao invés de simplesmente vendê-las por conta do preço de mercado). E para a renda fixa, usamos a taxa SELIC como referência. Levando em consideração as taxas e valores no primeiro dia (de mercado) de cada ano, desde 2015 a 2023. As comparações foram feitas com diferentes métricas, ora utilizando aportes únicos no inicio do período, ora com aportes adicionais ao decorrer do tempo.

## 1 Metodologia

A fim de diversificar os cenários de investimento, quatro critérios foram tomados: (1) Rendimento bruto por ano; (2) Rendimento bruto com aportes anuais para ambas (R\$1000,00); (3) Rendimento bruto com reinvestimento dos dividendos e bonificação em ITSA4; (4) Rendimento bruto com reinvestimento dos dividendos e bonificação em ITSA4 e, juntamente com aportes anuais em ambas.

Através dessa análise, podemos decidir qual o investimento que trouxe mais retorno no mesmo período de tempo.

## 2 Análise das ações

Através dos dados coletados e das páginas da relação do investidor, faremos a comparação do ganho de capital obtido ao se investir R\$1000 a cada ano, e reinvestindo todos os proventos pagos pelas empresas.

### 2.0.1 Análise da Itaúsa

A Itaúsa é uma holding que foi fundada em 1966 com o nome "Banco Itaú de Investimento S.A". Em 1991 mudou seu nome para "Itaúsa - Investimentos Itaú S.A". Tem valor de mercado de cerca de 115 bilhões de reais. É a principal controladora do banco Itaú, tendo 51% de suas ações, além disso, opera investindo em diversos setores da economia, por exemplo: **Elekeiroz**, era detentora dessa empresa que atua no setor químico até vender sua participação em 2018; **Dexco (anteriormente Duratex)**, controla 40% de suas ações, uma empresa que fabrica produtos de madeira, louça sanitária, etc, que são usados tanto na construção civil como na indústria de móveis; **Copagaz**, empresa que se especializa na venda de gás de cozinha. Ademais, tem um histórico de pagamento de dividendos e pouca volatilidade no faturamento e preço de suas ações, além de alta liquidez.

#### 1. Análise de aporte único no início do período

Reparamos pela figura **I** que entre os anos de 2017 e 2018 os rendimentos brutos (desconsiderando reinvestimentos) da Itaúsa começaram a superar a SELIC. Essa diferença continua se acentuando até o começo do ano de 2020, onde começa a sofrer uma queda devido a pandemia, chegando mesmo a ter um rendimento inferior à SELIC, porém logo retoma em ritmo de crescimento no final de 2022.

A tabela **I** apresenta os resultados da análise para itaúsa condizente ao provento por ação, preço da ação e a taxa selic ao final de cada ano em estudo.

Tabela 1: Dados Itaúsa

Ano	Proventos	Preço	Bonificação	Taxa Selic
2023	0.64	7.32	0.05	0.1375
2022	0.50	6.96	0.10	0.1075
2021	0.49	8.21	0.05	0.0200
2020	0.22	9.73	0.00	0.0425
2019	0.87	7.85	0.00	0.0650
2018	1.05	5.74	0.00	0.0675
2017	0.98	4.08	0.10	0.1300
2016	0.58	2.83	0.10	0.1425
2015	0.45	3.38	0.10	0.1225

Fonte: O autor

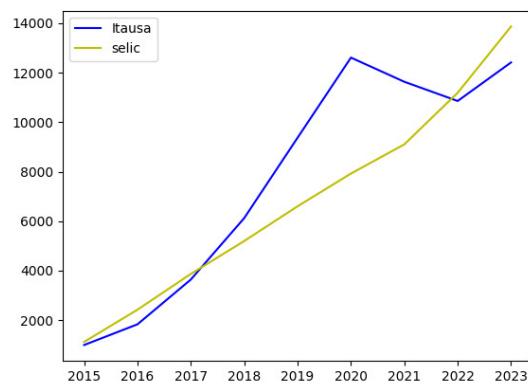


Figura 1: Rendimento bruto com R\$1000,00 anuais

Fonte: O autor.

## 2. Análise com aportes anuais sem proventos

Notamos pela figura 2 que caso além dos R\$1000,00 anuais investidos, reinvestíssemos os proventos, obteríamos um resultado bem mais expressivo. Depois da metade de 2016 os resultados superam significativamente os da SELIC e a queda em 2020 é atenuada dessa maneira. Em nenhum momento há um rendimento inferior ao da SELIC.

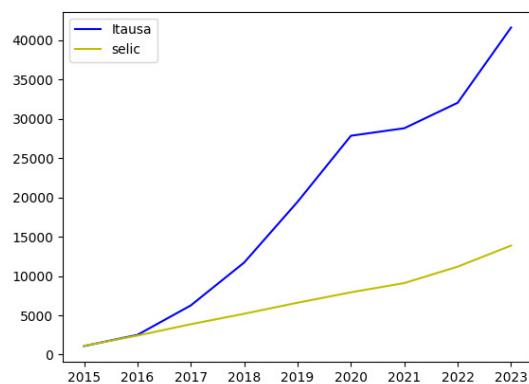


Figura 2: Investimentos anuais de R\$1000 e reinvestindo proventos  
Fonte: O autor.

### 3. Análise com aportes anuais e reinvestimento de proventos

De acordo com a figura 3, se o investidor fez um único aporte de R\$1000,00, somente após 2018 haverá um rendimento que venha a superar o da SELIC no mesmo período. No entanto, a partir desse momento o rendimento cresce a um ritmo mais acelerado em comparação com a SELIC. Porém, assim como no primeiro caso, houve uma forte queda em 2020, que só se reverteu após 2022.

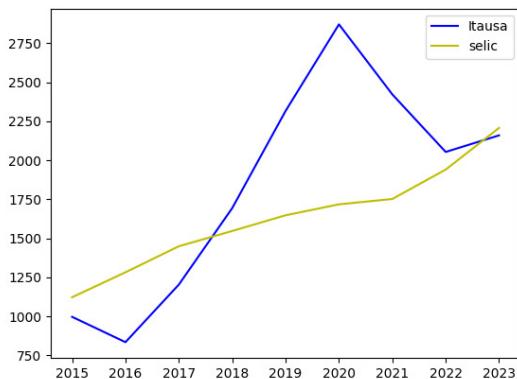


Figura 3: Aporte único de R\$1000,00 no início do período  
Fonte: O autor.

#### 2.0.2 Análise da WEG

A tabela 2 apresenta os resultados da analise para itausa condizente ao provento por ação, preço da ação e a taxa selic ao final de cada ano em estudo.

A WEG é uma empresa multinacional que foi fundada em Santa Catarina no ano de 1961. Sua especialidade é na fabricação de produtos para o setor elétrico e industrial. Atual-

Tabela 2: Dados WEG

Ano	Proventos	Preço	Bonificação	Taxa Selic
2023	0.58	38.50	0.00	0.1375
2022	0.49	32.72	0.00	0.1075
2021	0.60	37.92	0.00	0.0200
2020	0.41	17.45	0.00	0.0425
2019	0.32	8.81	0.00	0.0650
2018	0.32	9.37	0.30	0.0675
2017	0.32	5.92	0.00	0.1300
2016	0.34	5.72	0.00	0.1425
2015	0.50	5.92	0.00	0.1225

Fonte: O autor

mente é uma das maiores empresas do mundo nesse setor econômico. Tem fábricas em mais de 10 países, 14 apenas no Brasil, concentradas na região Sudeste e Sul, além de uma fábrica em Manaus no Amazonas. Suas instalações de distribuição e comercialização de produtos estão espalhadas em mais de 100 países. Com seu valor de mercado de cerca de 222 bilhões de reais, é uma das maiores empresas da B3. Apesar de não ter um Dividend Yield como o da Itaúsa, a WEG ainda é uma ótima opção para o investidor que deseja ter uma carteira centrada em estratégias de Buy & Hold.

### 1. Análise de aporte único no início do período

É importante ressaltar que, quando analisamos um único aporte no início do período, esse aporte será capaz de comprar um certo número de ações, e essas se mantém até o fim do período, seu patrimônio nessa análise é igual à quantidade de ações possuídas multiplicado pelo preço da ação naquele período. Enquanto isso, a SELIC fica rendendo e aumentando o capital sobre o qual ela rende continuamente. Analisando o período entre 2015 e 2018 com a figura 4, fica claro que o rendimento bruto de R\$1000,00 foi superior na SELIC, e a WEG perde, chegando um momento onde seu valor é menor do que o inicial por volta de 2017. Porém, com o elevado aumento do preço das ações sofridas pela WEG por volta de 2020, há um aumento de 500% em relação ao inicial de R\$1000,00

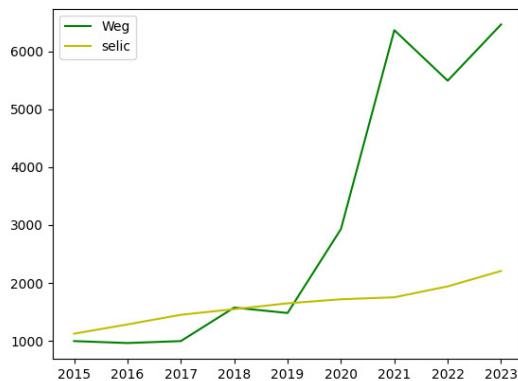


Figura 4: Aporte Único de R\$1000,00 no início do período

Fonte: O autor.

## 2. Análise com aportes anuais sem proventos

Pela figura 5, onde são feitos aportes iguais anualmente de R\$1000,00, ao final de 9 anos, seu patrimônio com a WEG será de cerca de R\$30000,00, enquanto apenas utilizando a SELIC ele chega a cerca de R\$15000,00. Ou seja, mesmo sem utilizarmos os proventos para "turbinar" os rendimentos obtidos reinvestindo na empresa, a WEG ainda se mostrou uma opção mais vantajosa em relação a SELIC no longo prazo. No curto prazo, entre 2015 e 2017 por exemplo, o não reinvestimento dos proventos acarretou numa rentabilidade inferior à da SELIC, porém, em quase todos os outros intervalos de tempo, seu resultado foi superior.

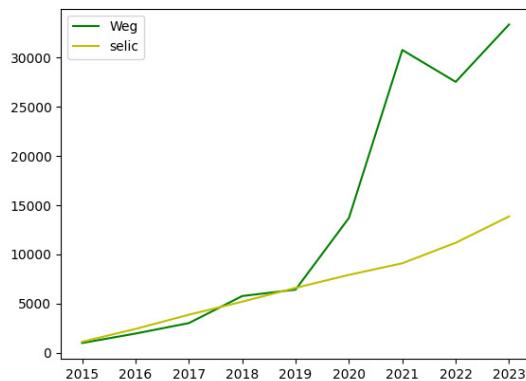


Figura 5: Aportes anuais de R\$1000,00 sem reinvestimento de proventos

Fonte: O autor.

### 3. Análise com aportes anuais e reinvestimento de proventos

Podemos ver pela figura 6, que entre os anos de 2015 e 2017, os rendimentos obtidos da WEG investindo R\$1000,00 por ano e reinvestindo os proventos foram semelhantes ao da SELIC. Porém, a partir de 2017, há um crescimento no preço da ação dessa empresa, chegando a apresentar um aumento de cerca de 50% entre 2017 e 2018, 98% entre 2019 e 2020 e 117% entre 2020 e 2021. Esses aumentos constantes foram responsáveis por esse rendimento tão elevado em relação à SELIC

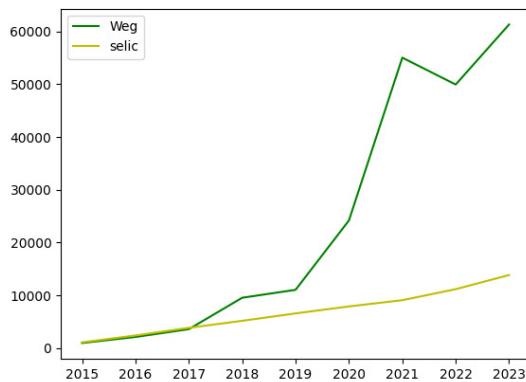


Figura 6: Aportes anuais de R\$1000,00 com reinvestimento de proventos

Fonte: O autor.

### 3 Conclusões

Um investidor com um perfil de longo prazo que utiliza de estratégias como Buy & Hold (mantém as ações para receber proventos ao invés de simplesmente vendê-las por conta do preço de mercado) pode auferir lucros maiores investindo seu dinheiro em boas empresas (renda variável) do que investindo no tesouro SELIC (renda fixa). As empresas escolhidas por tal investidor devem ser aquelas que não apresentem muita volatilidade de rendimentos A Itausa foi escolhida para análise por ter um histórico de pagamento de dividendos, ter um alto Dividend Yield (7,25%) e um rendimento cerca de 166% maior em relação à SELIC nesses 9 anos. Todas essas características fazem dessa empresa uma ótima opção para o investidor com o perfil anteriormente mencionado. Já a Weg, apesar de ter um Dividend Yield menor que o da Itausa (1,38%), teve um aumento no preço de sua ação comparando o preço entre 2023 e 2015, é possível notar um aumento de cerca de 550%, o que resultou num grande ganho de capital, para o investidor que teve oportunidade de investir na empresa quando seu preço era menor. Hoje, seu elevado preço traz empecilhos a quem deseja comprar suas ações. Como pudemos ver pelos gráficos anteriores, usando estratégias de reinvestimento de proventos, ambas as empresas tiveram rendimentos significativamente maiores comparado com a SELIC no mesmo período.

## Referências

TAXAS DE JUROS BÁSICAS – HISTÓRICO. *In:* BANCO DO BRASIL. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/historicotaxasjuros>. Acesso em: 06 set. 2024.

CENTRAL DE RESULTADOS. *In:* ITAÚSA. Disponível em: <https://www.itausa.com.br/Central-de-Resultados>. Acesso em: 06 set. 2024.

CENTRAL DE RESULTADOS. *In:* WEG. Disponível em: <https://ri.weg.net/informacoes-financeiras/central-de-resultados/>. Acesso em: 06 set. 2024.

BOLSA DE VALORES BRASILEIRA (B3). *In:* WEG. Disponível em: <https://www.b3.com.br/>. Acesso em: 08 set. 2024.



## Uma aplicação do cálculo diferencial para determinar o volume máximo de uma caixa

Gabriel Henrique Féo de Castro Malvino

Escola Estadual Doutor Fernando Alexandre

gfeo26@gmail.com

Nicholas Augusto Gomes Da Silva Machado

Escola Estadual Doutor Fernando Alexandre

nicholassilvamachado4@gmail.com

Natanael Alves Rocha

Escola Estadual Doutor Fernando Alexandre

natanaelalves116@gmail.com

Wallisom Rosa

Universidade Federal de Uberlândia

wallisom@ufu.br

**Resumo.** O presente trabalho utiliza ferramentas do Cálculo Diferencial, como a derivada, para determinar o volume máximo de uma caixa, dada sua forma de construção específica e respeitando sua geometria. Nele apresentamos os conceitos relativos ao estudo de valores extremos locais e absolutos para funções reais de uma variável real, enunciamos o Teorema de Weierstrass, que fornece condições para a existência dos valores extremos de uma função contínua em um intervalo fechado e exibimos um método para obtenção destes valores. A última parte do trabalho é dedicada à resolução do problema proposto utilizando as técnicas matemáticas anteriormente apresentadas.

**Palavras-chave:** cálculo diferencial; otimização; caixa.

### Introdução

Um dos ramos mais explorados nas aplicações do Cálculo Diferencial é a Otimização, que consiste basicamente em modelar um problema do cotidiano através de alguma função e buscar resultados “ótimos”, do ponto de vista prático. Por exemplo, realizar um trabalho em menor tempo possível, fabricar determinado produto com o mínimo de desperdício de material, obter recipientes com áreas mínimas e/ou volumes máximos, etc.

Note que em todos os exemplos citados utilizamos os termos “máximo” ou “mínimo”. Em geral, as soluções que buscaremos para os problemas em Otimização requerem a busca por valores máximos e/ou mínimos para determinadas funções que os modelam.

Neste trabalho introduziremos os conceitos matemáticos de extremos absolutos de uma função (valores máximo e mínimo absolutos) e daremos condições mínimas para a existência de

extremos absolutos para determinadas funções. Por fim, utilizando um método para determinar tais extremos, baseado na aplicação do conceito de derivada, resolveremos um problema prático.

O problema prático resolvido consiste na obtenção da melhor forma geométrica possível para que uma determinada caixa tenha um volume máximo, partindo do princípio que sua construção requer um determinado padrão.

Toda a ideia do trabalho é baseada nos conceitos presentes nas referências [IEZZI \(2013\)](#) e [STEWART \(2006\)](#).

### Máximos e Mínimos e o Teorema do Valor Extremo

Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real definida num domínio  $X \subset \mathbb{R}$ .

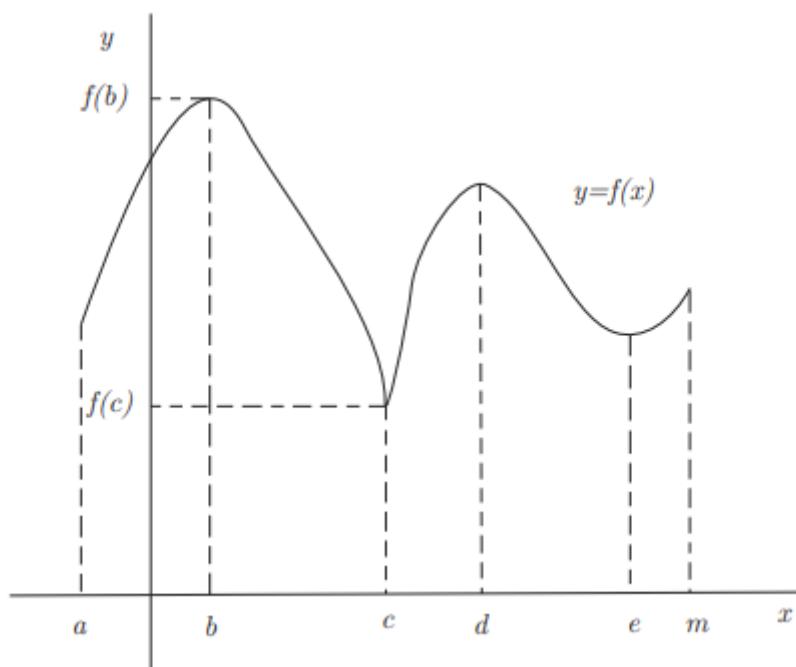
**Definição 1.** *Dizemos que  $f$  tem um **valor máximo absoluto** (respectivamente **valor mínimo absoluto**) em um ponto  $c \in X$  se*

$$f(x) \leq f(c),$$

*para todo  $x \in X$  (respectivamente,  $f(x) \geq f(c)$  para todo  $x \in X$ ). Tais valores (no caso, a imagem  $f(c)$ ), quando existem, são denominados **valores extremos** de  $f$ .*

A figura 1 mostra o gráfico de uma função  $f$  com valor máximo absoluto em  $b$  e valor mínimo absoluto em  $c$ .

Figura 1:  $(b, f(b))$  é o ponto mais alto no gráfico, e  $(c, f(c))$  o mais baixo.



Fonte: Os autores

**Observação 1.** *Uma função pode assumir apenas um de seus valores extremos, como é o caso, por exemplo, da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  da da por  $f(x) = x^2$ . Tal função assume seu valor mínimo absoluto em  $x = 0$ , porém não assume um valor máximo absoluto.*

**Observação 2.** *Uma função também pode não assumir seus valores extremos, como ocorre com a função identidade  $f(x) = x$ , nos números reais.*

**Observação 3.** *Existem outras funções (descontínuas, por exemplo) que, mesmo tendo imagem limitada, não possuem extremos absolutos. (Ver **STEWART** (2006), página 281)*

O teorema a seguir fornece condições suficientes para que uma determinada função real assuma seus valores extremos em seu domínio de definição.

**Teorema 1 (Teorema do Valor Extremo, Weierstrass).** *Toda função contínua definida em um intervalo fechado assume seus valores extremos nesse intervalo. Ou seja, se  $f$  é uma função contínua definida num intervalo fechado  $[a, b]$ , existem  $c$  e  $d$  em  $[a, b]$  tais que*

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \quad (1)$$

*para todo  $x \in [a, b]$ .*

**Demonstração.** Ver **PAPA NETO** (2011), páginas 110 e 111. □

**Observação 4.** “Assumir”, no texto, é no sentido de “tomar para si.” Isto significa que a função toma para si seus valores extremos.

**Definição 2.** *Dizemos que  $f$  tem um valor máximo local (respectivamente valor mínimo local) em um ponto  $c \in X$  se*

$$f(x) \leq f(c),$$

*para todo  $x \in X$  numa vizinhança de  $c$ . (respectivamente,  $f(x) \geq f(c)$  para todo  $x \in X$  numa vizinhança de  $c$ ). Tais valores, quando existem, são denominados **valores extremos locais** de  $f$ .*

**Observação 5.** *Não entraremos em detalhes aqui sobre o conceito topológico de “vizinhança” de um ponto. Aqui, considere que vizinhança de um ponto é simplesmente um intervalo aberto contendo o ponto em questão.*

Note que na Figura 1 os pontos  $b, d$  e  $m$  são pontos onde a função apresenta valores máximos locais, enquanto os pontos  $a, c$  e  $e$  são pontos onde a função apresenta valores mínimos locais.

Uma análise gráfica nos permite avaliar que no exemplo da Figura 1 a decisão sobre os extremos absolutos da função se deu considerando o menor e o maior dos valores extremos locais para, respectivamente, valor mínimo absoluto ( $f(c)$ ) e valor máximo absoluto de  $f$  ( $f(b)$ ).

Outras observações pertinentes dizem respeito às características da função  $f$ :

- $f$  é contínua em  $[a, b]$ ;
- $f$  é derivável em  $(a, b)$ , exceto em  $c$  (onde o gráfico apresenta uma “cúspide”);
- nos pontos do intervalo  $(a, b)$  onde  $f$  possui um extremo local, ou  $f'(x) = 0$  (caso de  $b, d$  e  $e$ ) ou  $f'(x)$  não existe (no caso de  $c$ ). Chamamos de **ponto crítico** um ponto do domínio de  $f$  onde a derivada se anula ou não existe. Assim, os pontos  $b, c, d$  e  $e$  são pontos críticos de  $f$ .

**Observação 6.** Convém observar aqui que estamos analisando a derivada segundo sua interpretação geométrica: inclinação de retas tangentes ao gráfico da curva  $y = f(x)$ , conforme Seção 2.7, página 151, da referência [STEWART \(2006\)](#).

### Método do Intervalo Fechado

Para encontrar os valores extremos absolutos de uma função contínua  $f$  em um intervalo fechado  $[a, b]$  (garantidos pelo Teorema do Valor Extremo) devemos encontrar todos os valores extremos locais e compará-los. O maior deles será o **valor máximo absoluto** e o menor deles será o **valor mínimo absoluto** de  $f$  em  $[a, b]$ . Basta então proceder da seguinte forma:

- 1) Encontre os pontos críticos de  $f$  em  $(a, b)$  e os valores de  $f$  nestes.
- 2) Encontre  $f(a)$  e  $f(b)$ .
- 3) O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, e o menor dentre esses valores é o valor mínimo absoluto.

### Problema da Caixa

Usando um pedaço quadrado de papelão com 30 cm de lado construiremos uma caixa sem tampa no formato de prisma retangular. Para fabricar esta caixa serão cortados quadrados iguais dos quatro cantos e os lados que sobram serão dobrados para cima (Veja figuras 2 e 3).

O objetivo aqui é encontrar o valor do comprimento  $x$  a ser cortado de forma a obter uma caixa com o maior volume possível. Em termos matemáticos então, estudaremos a função volume  $V = V(x)$ , em função do valor  $x$ , comprimento do lado do quadrado a ser cortado.

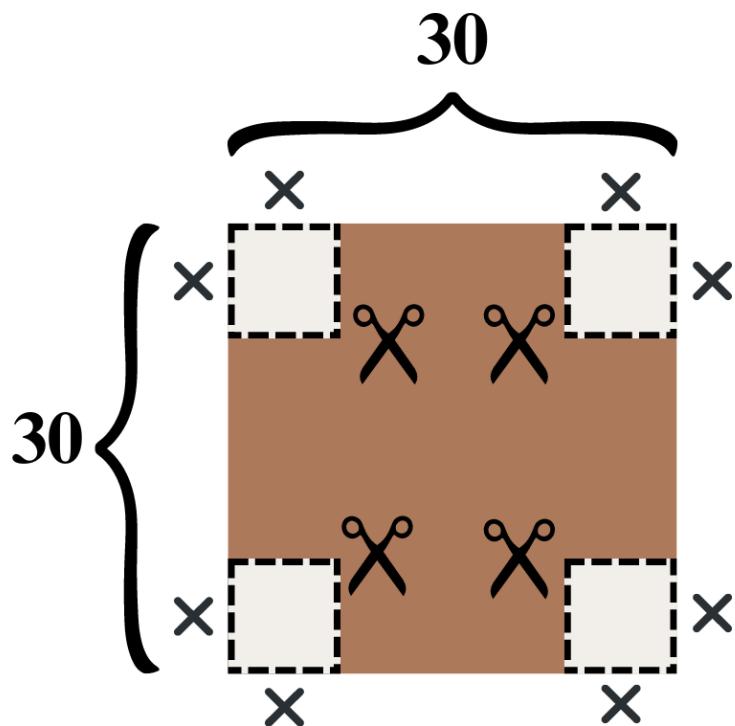
Observando as figuras 2 e 3 podemos concluir que:

- A caixa tem altura  $x$  cm;
- A base da caixa é quadrada de lado  $30 - 2x$ .

Logo, a função que descreve o volume da caixa em função de  $x$  é dada por:

$$V = V(x) = (30 - 2x)^2 \cdot x. \quad (2)$$

Figura 2: Caixa Planificada.



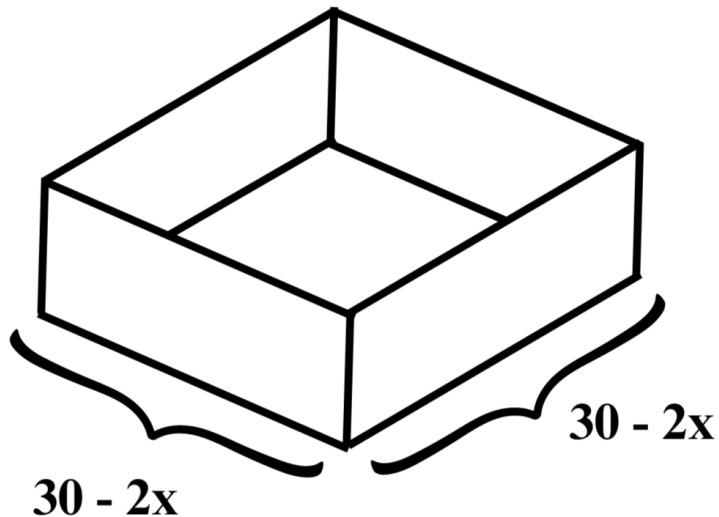
Fonte: Os autores

Note que a função  $V$ , dada em (2), é um polinômio de grau 3, portanto, derivável (logo, contínua) em  $\mathbb{R}$ . Porém, como trata-se de um problema prático, o domínio real a ser considerado deve ser menor, visto que não faz sentido  $x \leq 0$  já que  $x$  é o comprimento do lado do quadrado a ser cortado, e também não faz sentido  $x \geq 15$  já que o comprimento do lado do pedaço de papelão é 30 cm.

Assim, chegamos ao domínio inicial  $(0, 15)$ , que é um intervalo aberto. Entretanto, a fim de utilizar o Teorema do Valor Extremo e o Método do Intervalo Fechado, não há prejuízo em considerar o domínio de  $V$  como o intervalo fechado  $[0, 15]$ , uma vez que  $V(0) = V(15) = 0$ . Ou seja, tanto em  $x = 0$  quanto em  $x = 15$  teremos um valor mínimo absoluto para a função  $V$  e não o máximo, como queremos.

O problema tem solução garantida pelo Teorema do Valor Extremo, já que  $V$  é contínua no intervalo fechado  $[0, 15]$ . Assim, existe o valor de  $c$  em  $[0, 15]$  tal que  $V(c)$  é máximo absoluto. Como volumes são sempre positivos e  $V(0) = V(15) = 0$ , temos, pelo Método do Intervalo Fechado, que  $c$  deve estar no intervalo aberto  $(0, 15)$ .

Figura 3: Caixa em perspectiva.



Fonte: O autores

Vamos aos cálculos para encontrar os pontos críticos de  $V$  no intervalo  $(0, 15)$ :

$$\begin{aligned} V(x) &= (30 - 2x)^2 \cdot x \\ &= 900x - 120x^2 + 4x^3. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} V'(x) &= 900 - 240x + 12x^2 \\ &= 12(x^2 - 20x + 75), \end{aligned}$$

ou seja,

$$V'(x) = 12(x^2 - 20x + 75).$$

Daí  $V'(x) = 0$  se  $x = 5$  ou  $x = 15$ .

Desde que em  $x = 15$  já vimos que  $V$  tem um mínimo absoluto, a solução procurada é  $x = 5$ . O volume máximo da caixa é então:

$$V(5) = (30 - 2 \cdot 5)^2 \cdot 5 = 2000.$$

Isto é, a caixa terá o volume máximo de 2000 centímetros cúbicos (ou 2 litros), bastando para isso cortar pedaços quadrados de 5 cm de lado nos quatro cantos do pedaço maior de papelão de 30 cm de lado.

## Conclusão

Neste trabalho abordamos as derivadas, bem como o Método do Intervalo Fechado e o Teorema do Valor Extremo e concluímos o volume máximo de uma caixa. Ao aprofundar nesta área, este trabalho contribuiu e foi muito importante para o nosso aprendizado, visto que nos permitiu conhecer e compreender melhor certas áreas da Matemática. Além de ter nos permitido desenvolver habilidades em outras áreas, como por exemplo o sistema LaTeX, abrangendo assim nosso conhecimento e nos preparando para o Ensino Superior.

## Referências

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar.** 9 ed., São Paulo: Atual, 2013. v. 1.

PAPA NETO, A.; GUIMARÃES, Z.G. **Análise real.** Fortaleza: UAB/IFCE, 2011.

STEWART, J. **Cálculo.** São Paulo: Thomson Pioneira, 2006. v. 1.



## **Uma introdução à teoria de semigrupos lineares com aplicação à equação de onda**

Ially Alves Batista Pereira

ICENP/UFU

ially.pereira@ufu.br

Alisson Rafael Aguiar Barbosa

ICENP/UFU

aliaguia@ufu.br

**Resumo.** O presente trabalho utiliza a teoria de semigrupos lineares aplicada a soluções de equações diferenciais parciais (EDP) lineares e semilineares, mais especificamente, estudamos a existência e unicidade de soluções da equação de onda através da teoria de semigrupos lineares.

**Palavras-chave:** Semigrupos lineares; Equação da onda; Equações semilineares.

### **Introdução**

Neste trabalho estudamos dois problemas de valor inicial, o primeiro, do tipo linear:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad \text{e} \quad u_t(0) = u_1, \quad u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}, \quad (1)$$

e o segundo problema semilinear, dado pelas equações:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^p & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \quad (2)$$

Sendo  $p \in \mathbb{R}$  satisfazendo,  $1 < p < \frac{n}{n-2}$  se,  $n \geq 3$ ,  $1 < p < \infty$  se  $n = 1, 2$ . Nossa estratégia é reescrever o problema linear, fazendo uma mudança de variável, na forma

$$\begin{cases} U_t + AU = 0, \quad \text{sendo } A : D(A) \subset H \rightarrow H, \text{ um operador linear ilimitado, e} \\ U(0) = U_0 \quad H \text{ um espaço de Banach.} \end{cases} \quad (3)$$

Podemos observar que a equação dos problema (1) se trata de uma EDP, já (3) é uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem.

## 1 Definições e resultados preliminares

**Definição 1.** Seja  $X$  um espaço de Banach. Uma família  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , a um parâmetro  $\{S(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ , de operadores lineares limitados é um semigrupo de operadores lineares e limitados de  $X$  se:

- (i)  $S(0) = I$ , onde  $I$  é o operador identidade em  $X$ ;
- (ii)  $S(t+s) = S(t)S(s)$ ,  $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$ . Se, além disso, tivermos
- (iii)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|[S(t) - I]x\| = 0$ ,  $\forall x \in X$ , diremos que o semigrupo é de classe  $C_0$  ou fortemente contínuo.

Como veremos a solução do problema (3) será dada por  $U(t) = S(t)U_0$ , onde  $S(t)$  é um semigrupo de classe  $C_0$  gerado por  $A$ .

**Definição 2.** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C_0$ . Seu gerador infinitesimal é o operador linear definido por  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ , onde

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{S(h) - I}{h} \right) x \text{ existe} \right\},$$

e definimos

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{S(h) - I}{h} \right) x, \quad \forall x \in D(A).$$

**Observação 1.** Para um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  de Classe  $C_0$ :

- (a) Se existe uma constante  $M \geq 1$  tal que  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \forall t \geq 0$ , então  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é dito uniformemente limitado.
- (b) Se  $M = 1$ , isto é,  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \forall t \geq 0$ , então diz-se que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é de contração.
- (c) Faremos uso da notação  $A \in G(M, w)$ , para indicar que o operador  $A$  é gerador infinitesimal de  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , em que o semigrupo satisfaz a condição

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

- (d) Quando  $w = 0$ ,  $A \in G(M, 0)$  em que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  satisfaz (a).

- (e) Quando  $M = 1$  e  $w = 0$ ,  $A \in G(1, 0)$  em que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  satisfaz (b).

**Proposição 1.** Seja  $A$  o gerador de um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  de classe  $C_0$ . Temos que:

1. Se  $x \in D(A)$  e  $t \geq 0$ , então  $S(t)x \in D(A)$  e a função  $\mathbb{R}^+ \rightarrow X$  dada por  $t \mapsto S(t)$  é diferenciável e,  $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$ .

2. Para  $u \in D(A)$ ,  $S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AS(\tau)x d\tau$ .
3. Para  $x \in X$  e  $t \in \mathbb{R}$  com  $t \geq 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau = S(t)x$ .
4. Para  $x \in X$ , tem-se  $\int_0^t S(s)x ds \in D(A)$  e além disso,  $A = \left( \int_0^t S(s)x ds \right) = S(t)x - x$ .

**Demonstração.** A demonstração pode ser verificada em [RIVERA \(2007\)](#). □

**Teorema 1** (Lumer-Phillips). *Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador linear com domínio denso em um espaço de Banach  $X$ .*

- (i) Se  $A$  é dissipativo e existe  $\lambda_0 > 0$  tal que  $\mathcal{R}(\lambda_0 I - A) = X$ , então  $A \in G(1, 0)$ .
- (ii) Se  $A \in G(1, 0)$  sobre  $X$ , então  $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$  para todo  $\lambda > 0$  e  $A$  é dissipativo.

**Demonstração.** Para demonstração veja a referência [GOMES \(1985\)](#). □

## 1.1 O problema de Cauchy abstrato (PCA)

Para estudar a existência e unicidade de solução da equação da onda não homogênea consideraremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(u(t)), & t > 0 \\ u(0) = u_0, & u_0 \in D(A) \end{cases}, \quad (4)$$

onde  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  é um operador linear num espaço de Banach  $X$  que gera um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  de classe  $C_0$  e  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$  uma função contínua. Também dizemos que (4) é um PCA não homogêneo para  $A$  com valor inicial em  $u_0$ .

**Definição 3.** Uma função  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$  é uma solução forte de (4), se  $u$  é contínua, continuamente diferenciável em  $(0, \infty)$ , com  $u(t) \in D(A) \forall t > 0$ , e  $u$  satisfaz (4).

**Definição 4.** Um PCA para o qual valem existência, unidade e dependência contínua nos dados iniciais e/ou de contorno é um *problema bem posto* no sentido de Hadamard.

Seja  $u = u(t)$  com  $t > 0$  uma solução forte de (4) e  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  o semigrupo de classe  $C_0$  gerado por  $A$ , considerando a função  $w(s) = S(t-s)u(s)$  diferenciável para  $0 \leq s \leq t$  e por (4), encontramos

$$\frac{dw}{ds}(s) = S(t-s)f(s), \quad (5)$$

como  $f$  é contínua, podemos integrar (5) de 0 a  $t$ , assim  $\int_0^t \frac{dw}{ds}(s)ds = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$ , e, usando a definição de  $w(s)$ , concluímos que

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds. \quad (6)$$

Essa é uma condição necessária para que  $u$  seja solução forte do problema de valor inicial (4). Deste modo uma solução clássica do problema (4), com  $f$  contínua, tem a forma dada em (6) e consequentemente é única.

## 2 Aplicação da Teoria de Semigrupos

Como vimos no início, estudamos a boa colocação do problema linear abaixo:

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \quad (7)$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1 \quad (8)$$

sendo

$$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (9)$$

**Formulação abstrata do problema** - Defina  $v = u_t$ . Assim, temos  $u_t - v = 0$  e  $v_t = u_{tt}$  e substituindo em (7)-(9) obtemos

$$\begin{cases} v_t - \Delta u + v = 0 \text{ em } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ u_t - v = 0 \text{ em } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \end{cases}, \quad (10)$$

denotando  $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ ,  $U_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}$  e  $A = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & I \end{bmatrix}$ , podemos reescrever o problema (7)-(9), no seguinte PCA,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U + AU = 0, t \geq 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}, \quad \text{definindo os espaços fases como } H = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n). \quad (11)$$

O operador diferencial  $A$  em (11) é definido por  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ , com domínio  $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Existência** - O próximo passo para provarmos a existência da solução é mostrar que o operador  $A$  gera um semigrupo de classe  $C_0$ . Para isso é necessária a proposição abaixo:

**Proposição 2.** *Sejam  $A \in G(1, 0)$  e  $B \in \mathcal{B}(X)$ . Então  $A + B \in G(1, \|B\|)$ .*

**Demonstração.** Para demonstração veja a referência [RIVERA \(2007\)](#). □

Agora mostremos que  $A$  é gerador de um semigrupo de classe  $C_0$ , observamos que,  $A = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta + I & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ , então podemos escrever  $A = A' + B$  com  $A' = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta + I & I \end{bmatrix}$ , e  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ .

Como  $D(A) = D(A')$ , resta provar que  $A' \in G(1, 0)$  e  $B \in \mathcal{B}$ , e usar a Proposição 2 para concluir que  $A \in G(1, \|B\|)$ . A prova de que  $A' \in G(1, 0)$ , segue dos Teorema de Lax-Milgram (Ver BREZIS (1985)) e o Teorema da regularidade elíptica (Ver BREZIS (1985)). Para isso, deve-se mostrar que:

1.  $A'$  é dissipativo, isto é  $\langle A'U, V \rangle \geq 0 \quad \forall U \in D(A')$ ;
2.  $A'$  é maximal, ou seja, dado  $F = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \in H$ , existe  $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(A')$ , tal que  $(A' + I)U = F$ ,

$$(A' + I)U = F, \quad (12)$$

e concluímos pelo Teorema de Lumer- Phillips que  $A' \in G(1, 0)$ .

E para mostrar que  $B \in \mathcal{B}(H)$ , isto é, o operador  $B$  é uniformemente limitado. verificamos que

$$\begin{aligned} \|B(U)\|_H &= \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_H = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ -u \end{bmatrix} \right\|_H = \|u\|_{\mathbb{L}^2} \\ &\leq \|u\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1} + \|v\|_{\mathbb{L}^2} = \|U\|_H \end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 2,  $A = A' + B \in G(1, \|B\|)$ . Logo o problema (11) com dado inicial  $U_0 \in D(A)$  tem como solução  $U(t) = S(t)U_0$ , sendo  $S(t)$  o semigrupo de classe  $C_0$  gerado por  $A$ .

Afirmamos que para  $U_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \in D(A)$ ,  $U(t) = S(t)U_0$ , é solução do problema de valor inicial (11). De fato, aplicando a proposição 1 concluímos que

- (a)  $U(t) = S(t)U_0 \in D(-A) = D(A)$ ;
- (b)  $\frac{dU}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(S(t)U_0) = -AS(t)U_0 = -AU(t), t \geq 0$ ;
- (c)  $U(0) = S(0)U_0 = U_0$ , pois  $S(0) = I$ .

De b) e c) resulta que a função  $U$  é diferenciável em  $t \geq 0$  e satisfaz o problema de valor inicial (11). Uma vez que para  $U_0 \in D(A)$ , temos que

$$U(t) = S(t)U_0 \in D(A),$$

e do fato que  $S(t)$  é contínua resulta que  $U \in C([0, \infty); D(A))$ . Além disso,

$$U'(t) = -AU(t) = -AS(t)U_0 = -S(t)AU_0 \in H.$$

Como  $U'(t) = S(t)AU_0$  é função contínua, concluímos que  $U \in C^1([0, \infty); H)$ , logo

$$U \in C^1([0, \infty); H) \cap C([0, \infty); D(A)). \quad (13)$$

Analizando (13): Do fato que  $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  é solução de (11) se obtém em particular que  $v = u_t$ .

Assim

$$U = \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} \in C^1\left([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)\right) \cap C\left([0, \infty); H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)\right).$$

Isso mostra que,

1. Como  $u \in C^1([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^n))$  e  $u_t \in C^1([0, \infty); \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n))$ , obtemos,  $u \in C^2([0, \infty); \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n))$ ;
2. Como  $u \in C([0, \infty); H^2(\mathbb{R}^n))$  e  $u_t \in C([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^n))$ , obtemos,  $u \in C^1([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^n))$ .

Se os dados iniciais  $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ , a solução  $u = u(x, t)$  do Problema (7)-(9), segue da Proposição I tem a seguinte regularidade:

$$u \in C([0, \infty); H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^2([0, \infty); \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)).$$

Além disso, da Proposição I segue que, se os dados iniciais  $(u_0, u_1) \in H^1 \times \mathbb{L}^2$ , o problema (7)-(9) possui uma solução fraca na classe

$$u \in C([0, \infty); \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)) \cap ([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^n)).$$

**Unicidade** - Provaremos a unicidade da solução utilizando a proposição dada abaixo:

**Proposição 3.** *Sejam  $\{S_1(t)\}_{t \geq 0}$  e  $\{S_2(t)\}_{t \geq 0}$  semigrupos de classe  $C_0$  que possuem o mesmo gerador infinitesimal  $A$ . Então*

$$\{S_1(t)\}_{t \geq 0} = \{S_2(t)\}_{t \geq 0}.$$

**Demonstração.** Para demonstração veja a referência PAZY (1983). □

Suponhamos agora que  $V = V(t)$  seja outra solução do problema de valor inicial (11).

Então devemos ter

$$\frac{d}{dt}V(t) = AV(t) \text{ e } V(0) = U(0),$$

logo nossa solução é da forma

$$V(t) = T(t)U_0,$$

sendo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo gerado por  $A$ . Portanto segue da proposição 3 acima, que  $\{S(t)\}_{t \geq 0} = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ , ou seja,  $U = V$ .

Concluímos que existe uma única solução  $u = u(x, t)$  que satisfaz o problema de valor inicial (7)-(9). Além disso, para dados iniciais  $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  a solução do problema linear, está na classe

$$u \in C([0, \infty); H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^2([0, \infty); \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)).$$

## 2.1 Existência e unicidade de solução local para o problema semilinear

Consideremos o seguinte problema semilinear abstrato:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U + AU = F(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad . \quad (14)$$

em que  $F$  é uma aplicação de  $X$  em  $X$ ,  $X$  é um espaço normado,  $U_0 \in X$  é o valor inicial dado e  $A$  é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações.

Os dois resultados a seguir são usados para mostrar existência e unicidade de soluções para o problema (14).

**Teorema 2.** *Seja um  $X$  espaço de Banach,  $A$  gerador de um semigrupo de contrações,  $F$  globalmente Lipschitz contínua sobre  $X$  e  $u_0 \in X$ . Então, existe uma única solução global fraca  $u = u(t)$  de (14) no sentido que  $u \in C([0, \infty), X)$  e*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \quad (15)$$

para todo  $t \geq 0$ , sendo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  o semigrupo de contrações gerado pelo operador  $A$ . Além disso, existe a dependência contínua de  $u$  em relação a  $u_0$ , isto é,

$$\|v(t) - u(t)\| \leq e^{Lt} \|v_0 - u_0\|$$

para todo  $t \geq 0$ , com  $v$  a solução da equação (15) com valor inicial  $v_0$ .

**Demonstração.** para demonstração veja a referência PAZY (1983). □

**Definição 5.** Seja  $X$  espaço normado. Uma aplicação  $F : X \rightarrow X$  é dita Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados se, para cada constante positiva  $M$ , existir uma constante positiva  $L_M$  de modo que  $\|F(v) - F(u)\| \leq L_M \|v - u\|$ ,  $\forall u, v \in X$  tal que

$$\|u\| \leq M \text{ e } \|v\| \leq M.$$

Para um aplicação  $F$  Lipschitz como definida acima, é válido o seguinte resultado:

**Teorema 3.** *Para cada  $u_0 \in X$ , existe  $0 < T < \infty$  e uma única solução fraca  $u$  de (14) definida em  $[0, T]$ . Isto é,  $u \in C([0, T], X)$  e (15) é válida para todo  $t \in [0, T]$ .*

**Demonstração.** para demonstração veja a referência [PAZY \(1983\)](#) □

Recordemos que o problema semilinear associado com (7)-(9) estudado é:

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^p, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \quad (16)$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1 \quad (17)$$

com  $u_0, u_1 \in H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$  e  $p \in \mathbb{R}$ ,  $1 < p < \frac{n}{n-2}$  se,  $n \geq 3$ ;  $1 < p < \infty$  se  $n = 1, 2$ .

Do mesmo modo feito para o caso linear, reescrevemos o problema semilinear (16)-(17) em um problema abstrato do tipo (14).

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) + A'U = F(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases}, \quad (18)$$

em que  $U \in D(A') = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \subset H = H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ , sendo

$$\begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in H, \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta + I & I \end{bmatrix}, \quad F : H \rightarrow H, \\ U &\mapsto F(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ |u|^p + u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$F$  está bem definida para o expoente  $p$  com  $1 < p \leq \frac{n}{n-2}$ . De fato, seja

$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in H$ , devemos mostrar que  $|u|^p + u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ . Tomando  $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ , provamos que  $|u|^p \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ . Dividimos em dois casos:  $n > 2$  e  $n = 1, 2$ , utilizando os teorema das imersões de Sobolev temos que,

$$u \in H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow |u|^p \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n).$$

Assim, concluímos que,  $F$  aplica  $H$  em  $H$ , com  $H = H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Observação 2.** Seja  $F(s) = |s|^p + s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Então  $F(s) - F(r) = |s|^p - |r|^p + s - r$ .

Agora, se  $g(s) = |s|^p$ , então  $g'(s) = p|s|^{p-2}s$ . Portanto, pelo teorema do valor médio  $g(s) - g(r) = p|\xi|^{p-2}\xi(|s| - |r|)$ , para algum  $\xi$  entre  $r$  e  $s$ . Assim,

$$\begin{aligned} |g(s) - g(r)| &\leq p|\xi|^{p-1}(|s| - |r|) \leq p(|s| + |r|)^{p-1}|s - r| \\ &\leq C_p(|s|^{p-1} + |r|^{p-1})|r - s|, \end{aligned}$$

com  $C_p$  uma constante positiva que depende de  $p$ . Logo,

$$|F(s) - F(r)| \leq [C_p(|s|^{p-1} + |r|^{p-1}) + 1]|r - s|.$$

Agora sejam  $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$  e  $V = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \in H$ , então, pela observação 2 temos

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(V)\|_H &= \||u_1|^p + u_1 - |u_2|^p - u_2\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left[ C(|u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1}) + 1 \right] (u_1 - u_2) \|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

sendo  $C > 0$  uma constante. Assim, para  $U, V \in B(0, R)$ , temos que

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(V)\|_H &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1})^2 |u_1 - u_2|^2 dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^{2(p-1)} + |u_2|^{2(p-1)}) |u_1 - u_2|^2 dx \\ &\leq \left[ \int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^{2(p-1)} + |u_2|^{2(p-1)})^{\frac{p-1}{p}} dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |u_1 - u_2|^{2p} dx \right]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

com a ultima desigualdade devido a desigualdade de Holder e o fato que  $p > 1$ . Logo,

$$\|F(U) - F(V)\|_H^2 \leq C \left[ \int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^{2p} + |u_2|^{2p}) dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{L}^{2p}(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (19)$$

Usando (19) do teorema das imersões de Sobolev resulta

$$\|F(U) - F(V)\|_H^2 \leq C \left[ \|u_1\|_{H^1}^{2p} + \|u_2\|_{H^1}^{2p} \right]^{\frac{p-1}{p}} \|u_1 - u_2\|_{H^1}^2. \quad (20)$$

Assim, se  $\|U\|_H, \|V\|_H \leq R$  tem-se de (20)

$$\|F(U) - F(V)\|_H^2 \leq C \left[ 2R^{2p} \right]^{\frac{p-1}{p}} \|U - V\|_H^2, \quad (21)$$

e concluímos que  $\|F(U) - F(V)\|_H \leq L_R \|U - V\|_H$ , com  $L_R = C^{\frac{1}{2}} [2R^{2p}]^{\frac{p-1}{2p}}$ . Portanto,  $F$  é localmente Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados com  $M = R$ . Como  $H$  é um espaço de Hilbert, e já foi provado que  $A \in G(1, 0)$ , estamos nas hipóteses do Teorema 3. Assim, para algum  $T > 0$  apropriado, existe uma única função

$$U = U(t) \in C([0, T), H = H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)), \quad (22)$$

solução local fraca de (16)-(17) com dado inicial  $U_0 \in H$ .

Lembrando que  $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  e que  $v = u_t$ , sendo  $U$  solução de (18), temos a partir de (22) que  $U = \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} \in C([0, T); H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n))$ . Isto mostra que

1.  $u \in C([0, T); H^1(\mathbb{R}^n))$ ;
2.  $u_t \in C([0, T); \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n))$ , ou seja,  $u_1 \in C^1([0, T); \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n))$ .

Logo, concluímos que

$$u \in C([0, T); H^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1[0, T); \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)), \quad (23)$$

é solução local fraca de (16)-(17) com dados iniciais  $(u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ .

Constatamos, pois, que o problema de valor inicial (16)-(17) possui uma única solução local fraca  $u = u(x, t)$  com  $u$  satisfazendo (23), ou seja, existe única função  $u$  solução do problema de valor inicial

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^p, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \quad (24)$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1 \quad (25)$$

com dados iniciais em  $H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$  e  $p$  um número real que satisfaz  $1 < p < \frac{n}{n-2}$  se  $n \geq 3$ , e  $1 < p < \infty$  se  $n = 1, 2$ .

Isto é, existe uma única função  $u = u(x, t)$  definida, para algum  $T > 0$ , em  $[0, T)$  e que satisfaz (23) e é solução do problema acima.

### 3 Análise

Nesse trabalho estudamos problemas envolvendo equação da onda e uma de suas variantes, é sabido da literatura de equações diferenciais parciais que esses problemas podem ser estudados através do método Galerkin. A teoria de semigrupos possibilitou ferramentar, nos casos dos problemas autônomos, a otimização das operações envolvidas na obtenção das estimativas do método de Galerkin. Isso pode ser observado no processo de transformação do problema de EDP em um PAC, aqui observamos que a variável temporal é associada ao semigrupo e a variável espacial com o operador  $A$ . E finalmente os Teoremas de Hille-Yosida (Ver PAZY (1983)) e Lumer-Phillips caracterizam os operadores lineares  $A$  ilimitados para que sejam geradores de Semigrupo de classe  $C_0$ .

### Referências

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Universitext, Springer, New York, 2011.

GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1985

PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.

RIVERA, J. E. M. **Estabilização de Semigrupos & Aplicações**. Notas de aula em mini-curso, UFPA, Belém, Pará, 2007.