

Caderno de resumos do I Workshop de *Matemática* da UFU

05 A 07 DE AGOSTO, 2025



Comitê Científico

Abílio Lemos Cardoso Junior (UFV)

Everaldo de Mello Bonotto (ICMC-USP)

Geraldo Márcio de Azevedo Botelho (UFU)

Sandra Mara Cardoso Malta (LNCC)

Comitê Organizador

Alonso Sepúlveda Castellanos (UFU)

Elisa Regina dos Santos (UFU)

Josimar Joao Ramirez Aguirre (UFU)

Rodolfo Collegari (UFU)

Rosana Sueli da Motta Jafelice (UFU)

Vinícius Vieira Fávaro (UFU)

Conteúdo

Álgebra	1
Traços, normas e bases sobre corpos finitos	2
<i>Caio Alvarenga Marcondes, Victor Gonzalo Lopez Neumann</i>	
Código cartesianos afins	3
<i>Carlos Daniel Pereira de Oliveira, Cícero Carvalho</i>	
Euler e os números de Fermat	4
<i>Hélder Augusto Osvaldo Moreira, Victor Gonzalo Lopez Neumann</i>	
Códigos Corretores de Erros	5
<i>Israel Mendonça Gonçalves, Alonso Sepúlveda Castellanos</i>	
Números p-ádicos e o Lema de Hensel	6
<i>José Armando Oliveira Mendes, Victor Gonzalo Lopez Neumann</i>	
A sequência de cocaracteres centrais de supervarietades minimais	7
<i>Juan Antonio Pacheco Cruz, Ana Cristina Vieira</i>	
O corpo de funções algébricas	8
<i>Marleni Moreno Villanueva, Alonso Sepúlveda Castellanos</i>	
Sobre identidades e multiplicidades limitadas por constante	9
<i>Reyssila Franciane Dutra do Nascimento Vieira, Ana Cristina Vieira</i>	
Uma Base Clássica Para o Problema de Waring	10
<i>Robert Vieira de Araujo, Victor Gonzalo Lopez Neumann</i>	
Semigrupos Numéricos e Diofanto: Uma ligação entre o número de Frobenius e equações diofantinas	11
<i>Rodrigo Carneiro, Victor Gonzalo Lopez Neumann</i>	
Introdução a Semigrupos Numéricos	12
<i>Silas Silveira Campos, Guilherme Chaud Tizzotti</i>	
Envoltória de uma Família de Curvas Suaves	13
<i>Thiago de Lima Teixeira, Jairo Menezes e Souza</i>	
Capturando o crescimento exponencial dos polinômios centrais em álgebras graduadas e com involução	14
<i>Wesley Quaresma Cota, Ana Cristina Vieira e Rafael dos Santos</i>	
Análise	15
Equações Diferenciais Generalizadas Aleatórias: Uma Abordagem Unificada para Sistemas Dinâmicos Sob Incerteza	16
<i>Antonio Veloso, Márcia Federson</i>	
Adjuntos de operadores multilinearares entre espaços de Riesz	17
<i>Ariel Monção, Geraldo Botelho</i>	
O Teorema da Aplicação Aberta para Funções Holomorfas e Aplicações	18

<i>Emilly Justiniano Gomes, Fernanda Mendonça de Vasconcellos</i>	
<i>Espaços de Potências Fracionárias</i>	19
<i>Ially Alves Batista Pereira, Rodolfo Collegari</i>	
<i>Operadores Regulares em Reticulados de Banach</i>	20
<i>Lorena Bezerra de Almeida, Elisa Regina dos Santos</i>	
<i>Lineabilidade de conjuntos de zeros de operadores multilineares</i>	21
<i>Mikaela Aires, Geraldo Botelho</i>	
Geometria e Topologia	22
<i>Equações Diferenciais e Superfícies Pseudoesféricas</i>	23
<i>Gabriel de Azevedo Garrido, Igor Leite Freire</i>	
<i>A Construção Progressiva de Geometrias sob a Perspectiva Axiomática</i>	24
<i>Gabriel Saifert Martins, Márcio Roberto Rocha Ribeiro</i>	
<i>Geometria p-ádica das Raízes de Polinômios em Corpos Locais: Uma Abordagem Via Valoração Não Arquimediana</i>	25
<i>Katherine Angie Molina Luciano, Slobodan Tanushevski</i>	
<i>Introdução à Teoria de Complexos Simpliciais</i>	26
<i>Mateus Fernando Araújo Silva, Taciana Oliveira Souza e Francielle Rodrigues de Castro Coelho</i>	
<i>Características robustas em superfícies em \mathbb{R}^3</i>	27
<i>Matheus Felipe Calu Rocha, Jorge Luiz Deolindo Silva</i>	
Matemática Aplicada	28
<i>Modelagem da Pressão Acústica de Transdutores para o Processo de Levitação Acústica</i>	29
<i>Andreina de Souza Dourado, Celso Vieira Abud</i>	
<i>Avaliação do Risco de Lesões em Atletas de Futebol Feminino Profissional via HyFIS</i>	30
<i>Fernanda de Andrade Flor, Rosana Sueli da Motta Jafelice e José Waldemar da Silva</i>	
<i>Modelagem Matemática e uma Estratégia Heurística para o Problema do Cai- xeiro Viajante</i>	31
<i>Hugo da Costa Pezzano, Michelli Maldonado</i>	
<i>Multiplicadores de Lagrange: Teoria e Aplicações</i>	32
<i>João Paulo Nascimento Prudente, Luis F. E. Sánchez e Santos Alberto Enriquez- Remigio</i>	
<i>Identificação de Nós Influentes em Redes Complexas</i>	33
<i>Lara Cristina de Oliveira Vieira, Celso Vieira Abud</i>	
<i>Aplicação do Algoritmo splmm na Seleção de Genes Associados à Biossíntese de Riboflavina</i>	34
<i>Larissa Castro Silva, Lucas Emauel Pereira de Melo e Daniela Carine Ramires de Oliveira</i>	
<i>Infraestrutura de Tecnologia Assistiva e Desempenho Escolar: Levantamento Quantitativo com Dados Públicos de Uberaba</i>	35
<i>Marcelo Mangini Dias, Michelli Maldonado</i>	
<i>Escoamento de Fluido Newtoniano com Obstáculo via Formulação Vorticidade- Velocidade e o Método da Fronteira Imersa</i>	36

<i>Matheus Deodato Arruda, Josuel Kruppa Rogenski</i>	
Condições para a Existência de Circuitos Eulerianos no Contexto do Problema do Carteiro Chinês	37
<i>Pedro Henrique de Oliveira Camargo, Michelli Maldonado</i>	
Estudo de Ferramentas Matemáticas Aplicadas ao Processamento Digital de Imagens Médicas	38
<i>Samuel de Lima Pereira, Taciana Oliveira Souza</i>	
Estudo Comparativo entre Gradiente Descendente, Estocástico e com Momentum	39
<i>Thamires Sartori Pereira, Santos Alberto Enriquez-Remigio</i>	
O Reconhecimento de Dígitos Manuscritos via Redes Neurais	40
<i>Victor Patrick Sena Barbosa Lima, Rosana Sueli da Motta Jafelice e Caio Au- gusto Rodrigues dos Santos</i>	
Compensação do Efeito da Temperatura em Assinaturas de Impedância Eletro- mecânica via Algoritmos de Machine Learning	41
<i>Willian da Silva Lino, José Waldemar da Silva e Simone Rodrigues Campos Ruas</i>	

Álgebra

Traços, normas e bases sobre corpos finitos

Caio Alvarenga Marcondes ¹
Victor Gonzalo Lopez Neumann ²

Resumo

No estudo de corpos finitos, o desenvolvimento da teoria de traços, normas e bases tem papel fundamental na compreensão de extensões de corpos, que é a peça chave para estudar polinômios. Essa parte envolve conceitos de Álgebra Linear um pouco mais avançada, fornecendo uma base fundamental para o estudo de raízes de polinômios em extensões finitas.

A ideia central geradora dos traços e normas são os automorfismos de Frobenius. Tome um corpo \mathbb{F}_q e uma extensão \mathbb{F}_{q^n} . Um automorfismo de Frobenius é uma aplicação $\sigma(\alpha) = \alpha^q$, que fixa todos os elementos de \mathbb{F}_q . A partir das iterações desse automorfismo, podemos definir o traço de um elemento $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$ como a soma de seus conjugados e a norma pelo produto desses conjugados. Essas operações se comportam como aplicações polinomiais sobre \mathbb{F}_q , com grande utilidade na resolução de equações e construção de polinômios com propriedades específicas. Essa ideia é melhor explorada no Capítulo 2.3 em [1].

Esses conceitos possuem aplicações na construção de elementos primitivos, polinômios irredutíveis sobre corpos finitos e em áreas mais aplicadas como criptografia, teoria dos códigos e geração de estruturas pseudoaleatórias. O estudo de traços, normas e bases constitui uma base essencial na análise mais profunda de teoria de polinômios sobre corpos finitos, reforçando a importância de abordagens algébricas na compreensão dessas estruturas.

Referências

- [1] R. Lidl, H. Niederreiter. Finite Fields. 2^a edição. Cambridge: University Press, 1983.

¹Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, caioalvarenga@ufu.br. Agradeço ao CNPq pelo fomento.

²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, victor.neumann@ufu.br. Agradeço à FAPEMIG e CNPq pelo fomento.

Código cartesianos afins

Carlos Daniel Pereira de Oliveira ¹
 Cícero Carvalho ²

Resumo

O estudo dos códigos corretores de erros é fundamental para garantir a confiabilidade da transmissão ou armazenamento de dados. Além disso, o tema é bastante interessante, pois envolve álgebra comutativa, bem como aplicações no cotidiano e têm sido uma área muito ativa principalmente nas últimas décadas, tendo sua utilidade direta em diversos campos, tais como: matemática, computação, e engenharia aeroespacial.

Um código corretor de erro é um subespaço vetorial de \mathbb{F}_q^n , onde \mathbb{F}_q é um corpo finito com q elementos (veja e.g. [2]). O nosso objetivo é estudar um código da classe de “códigos de avaliação”. Dentre as ferramentas algébricas usadas para estudar códigos de avaliação, uma das mais importantes é a teoria de base de Gröbner. Essa teoria foi desenvolvida por Bruno Buchberger com o objetivo de resolver o problema de sua tese de doutorado, que consistia em encontrar uma base para $k[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ como k -espaço vetorial, onde $k[x_1, \dots, x_n]$ é um anel de polinômios em n variáveis. .

Neste trabalho, vamos apresentar resultados sobre os conceitos acima, falando também sobre os principais parâmetros de um código. Em seguida, vamos estudar os assim chamados código cartesianos afins. Eses códigos foram definidos por López, Rentería-Márquez e Villareal (veja [3]) compõem uma classe particular de códigos de avaliação, construídos a partir do produto cartesiano de subconjuntos finitos de um corpo finito \mathbb{F}_q . Um exemplo importante são os códigos de Reed-Muller generalizados, onde os subconjuntos usados são todos iguais a \mathbb{F}_q . Vamos mostar como calcular os parâmetros dos códigos cartesianos afins usando ferramentas da teoria de bases de Gröbner, seguindo [1].

Referências

- [1] CARVALHO, C. . Applications of results from commutative algebra to the study of certain evaluation codes. 2017. CIMPA School on Algebraic Methods in Coding Theory. Notas de aula.
- [2] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. Códigos Corretores de Erros. 2nd. ed. [S.I.]: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2017. (Coleção Matemática e Aplicações).
- [3] LÓPEZ, H. H.; RENTERÍA-MÁRQUEZ, C.; VILLARREAL, R. H. Affine Cartesian codes. Des. Codes Cryptogr. 71 (2014), no. 1, 5–19.

¹Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, carlos.daniel@ufu.br

²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, cicero@ufu.br

Euler e os números de Fermat

Hélder Augusto Osvaldo Moreira¹

Prof. Dr. Victor Gonzalo Lopez Neumann²

Resumo

No ano 1640 Pierre de Fermat, em uma carta para Marin Mersenne, apresentou o conceito dos números de Fermat, sendo eles inteiros positivos da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$, numa tentativa de encontrar uma fórmula para números primos. Na carta, Fermat conjecturou que todos os números dessa forma eram primos, o que seria provado como falso por Leonhard Euler em 1732.

Este trabalho tem como objetivo elaborar o conceito dos números de Fermat e explicar tal prova de Euler. No processo serão explicados conceitos como ordem de elementos [1] e outras ideias importantes dentro da teoria dos números [2], com ênfase na aritmética modular. Serão, por fim, apresentados alguns problemas não resolvidos relacionados aos números de Fermat para reflexão por parte dos ouvintes.

Referências

- [1] J. S. Kraft; L. C. Washington; An Introduction to Number Theory with Cryptography, CRC Press, 2014.
- [2] F. Martinez; C. Moreira; N. Saldanha; E. Tengan; Teoria dos números - um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, IMPA 2010.

¹Universidade Federal De Uberlândia, IME, helder.augusto@ufu.br.

²Universidade Federal De Uberlândia, IME, victor.neumann@ufu.br. Agradeço à FAPEMIG e CNPq pelo fomento.

Códigos Corretores de Erros

Israel Mendonça Gonçalves¹
Alonso Sepúlveda Castellanos²

Resumo

A teoria de códigos corretores de erros, como descrita em [1], surgiu da necessidade de garantir a integridade das informações transmitidas por canais sujeitos a ruídos. Em sistemas de comunicação digital e armazenamento de dados, é essencial dispor de mecanismos capazes de detectar e, quando possível, corrigir erros que possam ocorrer durante a transmissão ou leitura de informações .

Neste trabalho, apresentamos algumas propriedades dos códigos lineares, que são subespaços vetoriais de F_q^n , onde F_q é um corpo finito com q elementos. Entre suas principais vantagens estão a estrutura algébrica, que permite uma análise sistemática, e a implementação eficiente em hardware e software. Também apresentamos alguns exemplos.

Referências

- [1] A. Hefez, M. L. T. Villela. *Códigos Corretores de Erros*. 2^a ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2008.

¹Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, israel.goncalves@ufu.br.

²Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, alonso.castellanos@ufu.br

Números p-ádicos e o Lema de Hensel

José Armando Oliveira Mendes ¹
Victor Gonzalo Lopez Neumann ²

Resumo

Os números p-ádicos foram introduzidos pelo matemático alemão Kurt Hensel e têm ocupado um espaço importante na teoria dos números. Essa relevância se deve, entre outros fatores, ao fato de que os números p-ádicos oferecem uma linguagem natural e poderosa para estudar congruências entre números inteiros. Além disso, o estudo dos números p-ádicos possibilita o uso de métodos advindos do cálculo e da análise para estudar problemas em teoria dos números [1]. A construção do corpo dos números p-ádicos, \mathbb{Q}_p , pode ser feita utilizando sequências de Cauchy, de forma análoga à construção de \mathbb{R} , mas com um valor absoluto diferente do usual: a valoração p-ádica. A utilização desse valor absoluto garante propriedades distintas entre esses dois corpos [1,2]. O objetivo dessa apresentação é explorar algumas das propriedades de \mathbb{Q}_p e mostrar duas formas do Lema de Hensel, que é uma das ferramentas mais importantes no estudo dos números p-ádicos [1].

Baseando-nos em [1, 2], iniciaremos com uma introdução aos números p-ádicos, a sua construção e algumas propriedades básicas. Na sequência, apresentaremos o Lema de Hensel, bem como algumas aplicações. Sob certas condições, esse resultado garante a existência de raízes de um polinômio com coeficientes em \mathbb{Z}_p , em que \mathbb{Z}_p é o anel de valoração de \mathbb{Q}_p . Por último, falaremos sobre a segunda forma do Lema de Hensel, a qual estabelece um vínculo entre a fatoração de polinômios com coeficientes em \mathbb{Z}_p e a fatoração de certos polinômios em um corpo finito, sendo esta última fundamentada por [3].

Referências

- [1] F. Q. Gouvêa. *p-adic Numbers: An Introduction*. Segunda Edição. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [2] N. Koblitz. *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta function*. Segunda Edição. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [3] R. Lidl, H. Niederreiter. *Finite Fields*. Segunda Edição. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

¹Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, jose.armando@ufu.br. Agradeço à CAPES pelo fomento.

²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, victor.neumann@ufu.br. Agradeço à FAPEMIG e CNPq pelo fomento.

A sequência de cocaracteres centrais de supervariiedades minimais

Juan Antonio Pacheco Cruz^{1, 2}
 Ana Cristina Vieira³

Resumo

Uma supervariiedade \mathcal{V} é chamada minimal de crescimento polinomial n^k se sua codimensão $c_n^{gr}(\mathcal{V})$ cresce como n^k , e qualquer subvariiedade própria de \mathcal{V} tem crescimento polinomial n^t , com $t < k$. A classificação de subvariiedades minimais das supervariiedades $\text{var}^{gr}(G)$ e $\text{var}^{gr}(UT_2)$ de crescimento quase polinomial foi dado em [3], onde G e UT_2 a álgebra de Grassmann de dimensão infinita com graduação trivial e a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 com graduação trivial.

No caso de graduação não trivial, Giambruno, Mishchenko e Zaicev [1] consideraram G^{gr} e UT_2^{gr} a álgebra de Grassmann e a álgebra UT_2 , respectivamente, ambas com graduação canônica e D^{gr} a álgebra $D = F + F$ munida com a graduação $(F(1, 1), F(1, -1))$. Os autores provaram que uma supervariiedade \mathcal{V} tem crescimento polinomial se, e somente se, \mathcal{V} não contém G , G^{gr} , UT_2 , UT_2^{gr} e D^{gr} . Isto implica que $\text{var}^{gr}(G)$, $\text{var}^{gr}(G^{gr})$, $\text{var}^{gr}(UT_2)$, $\text{var}^{gr}(UT_2^{gr})$ e $\text{var}^{gr}(D^{gr})$ são as únicas supervariiedades de crescimento quase polinomial. Em [4], La Mattina classificou todas subvariiedades minimais destas supervariiedades.

Em 2009 Koshlukov, Krasilnikov, da Silva em [2] apresentaram a descrição do T_2 -espaço central de subvariiedades minimais de $\text{var}^{gr}(G)$. Neste trabalho, em elaboração com Costa, do Nascimento e Vieira, enunciaremos explicitamente os geradores do T_2 -espaço central das subvariiedades minimais de $\text{var}^{gr}(G^{gr})$, $\text{var}^{gr}(UT_2)$, $\text{var}^{gr}(UT_2^{gr})$ e $\text{var}^{gr}(D^{gr})$. Além disso, determinamos a codimensão central graduada $c_n^{z, gr}(\mathcal{U})$ e o cocaracter central graduado $\chi_n^{z, gr}(\mathcal{U})$, onde \mathcal{U} é qualquer variedade minimal citada acima.

Referências

- [1] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev. *Polynomial identities on superalgebras and almost polynomial growth*. Communications in Algebra **29** (9) (2001) 3787-3800.
- [2] P. Koshlukov, A. Krasilnikov, É. A. da Silva. *The central polynomials for the finite dimensional Grassmann algebras*. Algebra Discrete Math. **3** (2009) 69-76.
- [3] D. La Mattina. *Varieties of almost polynomial growth: classifying their subvarieties*. J. Algebra **123** (2007) 185-203.
- [4] D. La Mattina. *Varieties of superalgebras of almost polynomial growth*. J. Algebra **336** (2011), 209-226.

¹Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, juan.mat10@gmail.com. Financiamento parcial da FAPEMIG.

²Em colaboração com W .Costa (UFES) e T. do Nascimento (UFMT).

³Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, acvufmg2011@gmail.com.

O corpo de funções algébricas

Marlennhi Moreno Villanueva ¹
Alonso Sepúlveda Castellanos ²

Resumo

A teoria de corpo de funções algébricas tem aplicações relevantes em áreas como corpos finitos, teoria de códigos, criptografia e geometria finita. O principal objeto de estudo são os corpos de funções algébricas em uma variável sobre K , o qual denota um corpo arbitrário.

Neste trabalho, apresentamos definições fundamentais e alguns resultados importantes sobre corpo de funções algébricas envolvendo anel de valorização, lugares e valorização discreta. Como exemplo central, analisamos o corpo de funções algébricas racional $K(x)$, onde x é um elemento transcidente sobre K , destacando suas propriedades e a estrutura dos anéis de valorização associados. Este estudo fornece a base conceitual para aplicações posteriores em teoria de códigos. As principais referências deste trabalho foram [1], [2].

Referências

- [1] H. Stichtenoth. Algebraic Function Fields and Codes. Segunda Edição. Berlin: Springer - Verlag, 2009.
- [2] C. Tognon. *Cotas para a distância mínima de códigos de Goppa envolvendo o piso e o teto de um divisor*. Universidade Federal de Uberlândia. 2011.

¹Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, marlennhi.villanueva@ufu.br

²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, alonso.castellanos@ufu.br

Sobre identidades e multiplicidades limitadas por constante

Reyssila Franciane Dutra do Nascimento Vieira ¹
Supervisora: Ana Cristina Vieira ²

Resumo

Dada uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero e um grupo de ordem finita, consideramos a álgebra graduada por tal grupo. Nesse contexto, determinamos uma condição necessária e suficiente para que as multiplicidades na decomposição do cocaracter de uma álgebra sejam limitadas por constante através de particulares identidades que a álgebra satisfaz. Já no contexto das álgebras graduadas por um grupo finito e munida de uma involução graduada, apresentamos uma caracterização para que esta tenha multiplicidades limitadas por 1 a partir de específicas identidades que são satisfeitas por ela. Este é um trabalho em colaboração com A. Vieira e R. dos Santos, ambos da UFMG.

Referências

- [1] R. B. dos Santos, A. C. Vieira e R. F. D. N. Vieira, *Algebras with graded involution with multiplicities bounded by one*. Submitted, 2025.
- [2] R. B. dos Santos, A. C. Vieira e R. F. D. N. Vieira, *Identities satisfied by algebras with additional structures and multiplicities bounded by constant*. Preprint.

¹Instituto de Ciências Exatas UFMG, reyssilafdn@ufmg.br. Agradeço à FAPEMIG pelo fomento.

²Instituto de Ciências Exatas UFMG, anacris@ufmg.br. Agradeço à FAPEMIG pelo fomento.

Uma Base Clássica Para o Problema de Waring

Robert Vieira de Araujo ¹
Victor Gonzalo Lopez Neumann ²

Resumo

De acordo com [1], em uma troca de cartas entre os matemáticos Euler e Goldbach no ano de 1742, Goldbach conjecturou que todo número inteiro positivo par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos. Euler concordou com as suspeitas do matemático, mas nenhum dos dois a conseguiu demonstrá-la. Ainda hoje, quase 300 anos se passaram e a Conjectura de Goldbach permanece como um dos problemas mais intrigantes e não resolvidos da Teoria dos Números, embora já tenha sido verificada computacionalmente para inteiros pares até $4 \cdot 10^{11}$.

Em 1770, Edward Waring propõe outro problema: Dado $k \geq 2$, qual o menor número $g(k)$ tal que todo número natural pode ser expresso como a soma de $g(k)$ potências k -ésimas? No início do século XX, David Hilbert provou que $g(k)$ sempre existe, apesar de ainda ser um mistério seus valores exatos e variações.

Para compreender estes problemas, é essencial introduzir alguns conceitos da Teoria Aditiva dos Números:

- Um conjunto de inteiros é chamado de **base de ordem h** , se todo inteiro não negativo pode ser escrito como a soma de h elementos do conjunto, não necessariamente distintos.
- Um conjunto de inteiros é chamado de **base de ordem finita** se o mesmo for uma base de ordem h para algum h .
- **Números poligonais** são inteiros não negativos construídos geometricamente por polígonos regulares.

O importante Teorema de Lagrange, apresentado em [2, página 147], estabelece que o conjunto dos números quadrados constitui uma base de ordem 4. A partir deste resultado, é possível generalizar o Teorema de Lagrange para mostrar que outros conjuntos numéricos — como os números poligonais, cubos e, em particular, o conjunto dos números primos — formam uma base de ordem finita. Estas são as bases clássicas na Teoria Aditiva dos Números.

Dessa forma, o estudo do problema de Waring representa um ponto de partida valioso na Teoria Aditiva dos Números na busca de ferramentas que podem contribuir para avanços na demonstração da Conjectura de Goldbach.

Referências

- [1] Nathanson, Melvyn B. **Additive Number Theory: The Classical Bases**. New York: Springer, 1996.
- [2] Martinez, F. E. B. et al. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**, Rio da Janeiro: Editora SBM, 2010.

¹IME, UFU, robert.araujo@ufu.br. Agradeço à SESu/MEC pelo fomento.

²IME, UFU, victor.neumann@ufu.br. Agradeço à FAPEMIG e CNPq pelo fomento.

Semigrupos Numéricos e Diofanto: Uma ligação entre o número de Frobenius e equações diofantinas

Rodrigo Carneiro ¹
Victor Gonzalo Lopez Neumann ²

Resumo

Através de problemas clássicos de Teoria de Números, em particular, Teoria das Partições Inteiras e o Problema de Frobenius desenvolveu-se uma sutil e complexa teoria, a qual foi denominada, posteriormente, Teoria dos Semigrupos Numéricos.

Um semigrupo numérico é um subconjunto não vazio de \mathbb{N} que é fechado sob adição, contém o elemento neutro da adição e possui complemento finito em \mathbb{N} . A partir do próprio Problema de Frobenius, que busca determinar o maior valor que não pode ser escrito como combinação linear de dois ou mais elementos em \mathbb{N} , dois a dois primos entre si, surgem noções mais sofisticadas como sistema de geradores mínimos, multiplicidade a dimensão de imersão desse subconjunto.

Neste trabalho, baseado em [1], apresentaremos a caracterização de semigrupos numéricos com dimensão de imersão máxima, semigrupos numéricos de Arf, semigrupos numéricos saturados, um princípio inicial de contagem para a quantidade de soluções de uma equação diofantina linear $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b, n \geq 2$, a qual consiste na análise das propriedades de um semigrupo numéricos gerados por dois ou mais elementos e, por fim, vislumbrar uma ligação entre a quantidade de soluções de uma equação diofantina linear e o número de Frobenius de um semigrupo numérico com dimensão de imersão maior que dois.

Referências

- [1] J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez. Numerical Semigroups. 1. ed. New York: Springer, 2009.

¹Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, r-carneiro@ufu.br.

²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, victor.neumann@ufu.br.

Introdução a Semigrupos Numéricos

Silas Silveira Campos¹
Guilherme Chaud Tizziotti²

Resumo

Ao considerar a trajetória histórica dos semigrupos numéricos, destaca-se a figura do matemático alemão Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917). Ele formulou um problema que consiste em determinar uma fórmula para encontrar o maior número inteiro que não pode ser expresso como uma combinação linear, com coeficientes inteiros não negativos, de um dado conjunto de inteiros positivos cujo máximo divisor comum seja igual a um. Frobenius também buscou determinar a quantidade de inteiros positivos que não admitem esse tipo de representação.

O primeiro problema equivale a encontrar uma fórmula, em termos dos elementos de um sistema minimal de geradores de um semigrupo numérico S , para o maior inteiro que não pertence a S . Esse elemento é geralmente conhecido como o *número de Frobenius* de S , embora na literatura ele às vezes seja substituído pelo *condutor* de S , que é o menor inteiro x tal que $x + n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O número de Frobenius de S é denotado por $F(S)$ e é igual ao condutor de S menos um.

Quanto ao segundo problema, o conjunto de elementos $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$ é conhecido como o conjunto das lacunas de S . A cardinalidade desse conjunto é o chamado *gênero* de S , denotado por $g(S)$, o qual às vezes é referido como o grau de singularidade de S .

Diante do contexto apresentado, este trabalho, que é um recorte de uma pesquisa de mestrado em Matemática, tem por objetivo apresentar uma visão introdutória dos semigrupos numéricos, destacando sua estrutura algébrica fundamental com exemplos. Um semigrupo numérico S é um subconjunto dos números naturais \mathbb{N} que satisfaz três condições: $0 \in S$; $x + y \in S$, para todo $x, y \in S$; e $\mathbb{N} \setminus S$ é finito, isto é seu complementar do conjunto S é finito. Será utilizado como referência [1] para o desenvolvimento do trabalho.

Referências

- [1] ROSALES, J. C.; GARCÍA-SÁNCHEZ, P. A. Numerical Semigroups. Developments in Mathematics. Volume 20. Florida: Springer, 2009.

¹Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, silas.campos@ufu.br. Agradeço à CAPES pelo fomento.
²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, guilhermect@ufu.br.

Envoltória de uma Família de Curvas Suaves

Thiago de Lima Teixeira ¹
 Jairo Menezes e Souza ²

Resumo

No estudo de curvas algébricas, a formulação clássica trabalha predominantemente sobre corpos algébricamente fechados, como os números complexos (\mathbb{C}). Embora essa abordagem seja fundamental para resultados teóricos, como o Teorema dos Zeros de Hilbert, ela frequentemente resulta na perda da intuição geométrica tangível, que é mais acessível e prazerosa nos espaços euclidianos bidimensional (\mathbb{R}^2) ou tridimensional (\mathbb{R}^3).

A proposta deste trabalho é explorar o conceito de envoltórias, semelhante ao realizado em [1], de uma família a um parâmetro de curvas suaves. Assim, dado um polinômio $F(x, y, t) \in \mathbb{R}[x, y, t]$, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo, temos a curva $V(F_t)$ em \mathbb{R}^2 . Quando variamos o parâmetro t , obtemos uma família de curvas determinada por F .

Um exemplo clássico é o de um círculo parametrizado sobre uma parábola, representado por:

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 + (y - t^2)^2 - 4$$

Esta equação descreve um círculo de raio 2 cujo centro se move ao longo da parábola $y = x^2$. Esse movimento gera uma família de circunferências que, ao se acumularem, formam uma borda bem definida: a envoltória da família. Esta envoltória pode ser determinada matematicamente por meio de manipulações algébricas, eliminando o parâmetro t do sistema de equações:

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= 0. \end{aligned}$$

Neste pôster, almejamos demonstrar visualmente como a variação de um parâmetro em uma família de curvas pode gerar novas formas geométricas fascinantes, assim como exemplos mostrado em [2].

Utilizaremos o exemplo da família de circunferências cujo centro se move sobre uma parábola para ilustrar o processo de formação da envoltória, apresentando tanto a intuição geométrica quanto os passos algébricos para sua determinação.

Referências

- [1] D. A. Cox, J. B. Little e D. O’Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, 4^a ed. Springer-Verlag, New York, 2015.
- [2] J. W. Bruce e P. J. Giblin. *Curves and Singularities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

¹Orientando do PIVIC/PROPESQ - Universidade Federal de Catalão (UFCAT), thiagoteixeira@discente.ufcat.edu.br
²Prof. Orientador - IMTec - Universidade Federal de Catalão (UFCAT), jairoms@ufcat.edu.br

Capturando o crescimento exponencial dos polinômios centrais em álgebras graduadas e com involução

Wesley Quaresma Cota¹

Orientadores: Ana Vieira e Rafael dos Santos

Resumo

Dizemos que uma álgebra associativa A é uma *PI-álgebra* se satisfaz uma identidade polinomial não trivial, isto é, um polinômio f não nulo que se anula sob todas as avaliações em elementos de A . Em 1970, Regev introduziu a *sequência de codimensões* $c_n(A)$, $n \geq 1$, a qual descreve o comportamento assintótico das identidades satisfeitas por uma dada álgebra A . Associado a essa sequência, o *PI-expoente* de A , definido por

$$\exp(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)},$$

mede a taxa de crescimento exponencial dessas identidades. Em 1999, Giambruno e Zaicev provaram que esse limite existe e é um número inteiro não negativo, fornecendo assim uma resposta afirmativa à conjectura de Amitsur sobre o PI-expoente. Posteriormente, em 2018, os autores estenderam sua investigação aos polinômios centrais, demonstrando a existência e a integralidade dos *expoentes central* e *central próprio*, associados às identidades polinomiais centrais e centrais próprias, respectivamente.

Nesta apresentação, discutiremos os resultados recentes obtidos em [1] e [2], os quais estabelecem a existência e a integralidade do expoente central e do expoente central próprio nos contextos de álgebras G -graduadas e de álgebras munidas de uma involução graduada. Em particular, são fornecidas estimativas exatas para os valores desses expoentes.

Referências

- [1] W. Q. Cota and D. La Mattina. *Asymptotic behavior of central codimensions in G -graded algebras*. Preprint.
- [2] W. Q. Cota, D. La Mattina, A. A. P. dos Santos and A. C. Vieira. *Exponential growth of central codimensions of graded algebras with involution*. Submitted.

¹ICEEx, UFMG, quaresmawesley@gmail.com. Agradeço à FAPEMIG pelo fomento.

Análise

Equações Diferenciais Generalizadas Aleatórias: Uma Abordagem Unificada para Sistemas Dinâmicos Sob Incerteza

Antonio Veloso ¹
Marcia Federson ²

Resumo

A teoria de sistemas dinâmicos aleatórios (SDA) constitui um alicerce na matemática aplicada, com aplicações que abrangem biologia, engenharia e a modelagem de equações diferenciais ordinárias aleatórias. Com base nesse arcabouço consolidado, introduzimos as *equações diferenciais generalizadas aleatórias* [1], estendendo a teoria clássica de equações diferenciais generalizadas para englobar dinâmicas influenciadas por incertezas. Esse novo formalismo oferece um método unificado para o estudo de diversos sistemas aleatórios sujeitos a ruído, atrasos temporais e efeitos impulsivos.

Estabelecemos condições de existência e unicidade de soluções para as equações diferenciais generalizadas aleatórias, adaptadas às complexidades intrínsecas à aleatoriedade, as quais se diferenciam dos análogos determinísticos. Além disso, apresentamos a prova de que famílias de equações diferenciais generalizadas aleatórias geram um cociclo multivalorado, fornecendo um resultado fundamental com implicações de amplo alcance.

O arcabouço de cociclo multivalorado faz a ponte entre diferentes tipos de equações diferenciais aleatórias não-autônomas, incluindo equações de Volterra–Stieltjes aleatórias, equações diferenciais impulsivas aleatórias e equações diferenciais com atraso aleatórias.

Referências

- [1] M. Federson, X. Han & **Veloso, A.** *Bridging Random Dynamics: Random Generalized Differential Equations and Their Applications*, preprint.

¹Instituto de Ciências matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, antoniomavs@usp.br. Agradeço à FAPESP, projeto 2023/16185-1.

²Instituto de Ciências matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, federson@icmc.usp.br.

Adjuntos de operadores multilineares entre espaços de Riesz

Ariel Monção¹
 Geraldo Botelho²

Resumo

A teoria de operadores multilineares entre espaços de Riesz foi inicialmente desenvolvida por Fremlin na década de 1970. Entretanto, muitas definições e resultados conhecidos do caso linear ainda não têm suas versões multilineares. Neste trabalho estudamos adjuntos de operadores multilineares entre espaços de Riesz e generalizamos alguns resultados conhecidos para operadores lineares ordem limitados encontrados em [1].

Sejam X_1, \dots, X_n, Y espaços vetoriais reais. Por $L(X_1, \dots, X_n; Y)$ denotamos o espaço vetorial dos operadores n -lineares de $X_1 \times \dots \times X_n$ em Y . Denotamos o dual algébrico de Y por Y^* . Dado um operador $A \in L(X_1, \dots, X_n; Y)$, seguindo a abordagem clássica de Aron e Schottenloher [2], definimos seu adjunto como sendo o operador linear

$$A^*: Y^* \rightarrow L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{R}), \quad A^*(y^*)(x_1, \dots, x_n) = y^*(A(x_1, \dots, x_n)).$$

Aqui, todos os espaços de Riesz são Arquimedianos. Para espaços de Riesz E_1, \dots, E_n, F , nem sempre $L(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço de Riesz com a ordem usual, mesmo com F Dedekind completo. Por isso, operadores multilineares de ordem variação limitada são estudados. Relembre que um operador $A \in L(E_1, \dots, E_n; F)$:

- Tem *ordem variação limitada*, em símbolos $A \in L_{bv}(E_1, \dots, E_n; F)$, se para todos $0 \leq x_1 \in E_1, \dots, 0 \leq x_n \in E_n$, o seguinte conjunto é ordem limitado em F :

$$\left\{ \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{N_1, \dots, N_n} |A(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})| : x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \geq 0, \sum_{i_1=1}^{N_1} x_{i_1} = x_1, \dots, \sum_{i_n=1}^{N_n} x_{i_n} = x_n \right\}.$$

- É *positivo* se $A(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ para todos $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.
- É *regular*, em símbolos $A \in L_r(E_1, \dots, E_n; F)$, se $A = A_1 - A_2$ com A_1 e A_2 positivos.
- Um operador linear de ordem variação limitada é chamado de *operador ordem limitado*. Por F^\sim denotamos o *ordem dual* de F , isto é, o espaço dos funcionais lineares ordem limitados (ou, equivalentemente, regulares).

Proposição 1. Sejam E_1, \dots, E_n, F espaços de Riesz e $A \in L_{bv}(E_1, \dots, E_n; F)$. Então:

- (a) $A^*(y^*)$ é uma forma n -linear regular para todo funcional $y^* \in F^\sim$. Em particular, o adjunto $A^*: F^\sim \rightarrow L_r(E_1, \dots, E_n; \mathbb{R})$ é um operador linear bem definido.
- (b) A^* é um operador linear ordem limitado e ordem contínuo.

Para F Dedekind completo, todo operador $A \in L_{bv}(E_1, \dots, E_n; F)$ tem módulo $|A| \in L_{bv}(E_1, \dots, E_n; F)$ [3]. É fácil ver que $|A^*| \leq |A|^*$, mas $|A^*| = |A|^*$ não vale em geral. Vejamos que a igualdade se dá em funcionais regulares σ -ordem contínuos.

Proposição 2. Sejam E_1, \dots, E_n, F espaços de Riesz com F Dedekind completo e $A \in L_{bv}(E_1, \dots, E_n; F)$. Então $|A^*|(y^*) = |A|^*(y^*)$ para todo funcional regular σ -ordem contínuo y^* .

Referências

- [1] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw. *Positive Operators*. Springer, 2006.
- [2] R. M. Aron, M. Schottenloher. *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*. J. Functional Analysis 21 (1976), no. 1, 7-30.
- [3] Q. Bu, G. Buskes, A. G. Kusraev. *Bilinear maps on products of vector lattices: a survey*. Positivity, 97-126, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2007.

¹Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, arieldeom@hotmail.com. Agradeço à CAPES pelo fomento.

²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, botelho@ufu.br. Agradeço à Fapemig pelo fomento.

O Teorema da Aplicação Aberta para Funções Holomorfas e Aplicações

Emilly Justiniano Gomes ¹
 Fernanda Mendonça de Vasconcellos ²

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos uma versão do Teorema da Aplicação Aberta [5] no contexto da Análise Complexa [1, 4, 6], mais especificamente para funções holomorfas definidas sobre uma região D , destacando sua articulação com outros resultados fundamentais da área e a riqueza estrutural das funções holomorfas. Como aplicações não triviais, demonstraremos o Teorema da Função Inversa para funções holomorfas injetivas [5] e apresentaremos o Princípio do Módulo Máximo [6, 8], evidenciando o papel do Teorema da Aplicação Aberta na fundamentação de resultados relevantes não apenas da Análise Complexa, mas também em contextos mais amplos da Matemática Pura e da Aplicada [2, 3, 7]. O desenvolvimento deste trabalho pretende investigar propriedades das funções complexas de uma variável complexa, com ênfase nas funções holomorfas e no comportamento de aplicações abertas — conceito central presente no Teorema da Aplicação Aberta, essencial à preservação da estrutura topológica. A abordagem utilizada buscará construir uma demonstração rigorosa, porém acessível a estudantes de graduação em Matemática que procuram compreender plenamente os fundamentos teóricos desse campo de estudo. Concluiremos destacando o valor didático dessa abordagem, que contribui significativamente para a formação teórica de estudantes iniciantes na Matemática, ao mesmo tempo em que reforça a interconexão entre alguns dos principais teoremas da Análise Complexa.

Referências

- [1] AHLFORS, Lars. *Complex Analysis*. 3th ed. New York: McGraw-Hill, Inc, 1979. 336 p.
- [2] APOSTOL, Tom. M. *Calculus, Vol. I*. 2th ed. USA: Wiley, 1991. 666 p.
- [3] BARTLE, Robert G; SHERBERT, Donald R. *Introduction to Real Analysis*. 4th ed. New Jersey: Wiley, 2011. 416 p.
- [4] CONWAY, John B. *Functions of One Complex Variable I*. 2th ed. New York: Springer, 1978. 330 p.
- [5] FERNANDEZ, Cecília. S; BERNARDES, Jr. Nilson. C. *Introdução às funções de uma variável complexa*. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008. 242 p.
- [6] LANG, Serge. *Complex Analysis*. 3th ed. New York: Springer, 1993. 458 p.
- [7] RUDIN, Walter. *Real And Complex Analysis*. 3th ed. New York: McGraw Hill, 1986. 483 p.
- [8] SHAKARCHI, Rami; STEIN, Elias M. *Complex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 2003. 400 p.

¹Instituto do Noroeste Fluminense de Educação Superior, Universidade Federal Fluminense, ejgomes@id.uff.br

²Instituto do Noroeste Fluminense de Educação Superior, Universidade Federal Fluminense, fernandamv@id.uff.br

Espaços de Potências Fracionárias

Ially Alves Batista Pereira¹

Rodolfo Collegari²

Resumo

Neste trabalho, iremos abordar a teoria de potências fracionárias para um operador, aplicada a teoria de equações diferenciais. Considere o seguinte problema de equações diferenciais parciais:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \gamma(t)\Delta u_t + \beta\varepsilon(t)u_t = f(u), & \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{ um domínio limitado.} \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \text{ de classe } C^\infty. \end{cases} \quad (\text{EDP})$$

A equação acima descreve um modelo de equação de onda, para mais detalhes veja [1]. Podemos reescrevê-lo na forma de um problema abstrato de Cauchy(PAC):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U + \mathcal{A}(t)U = F(U), \\ U(t_0) = U_0, \quad U_0 \in D(\mathcal{A}(t)), \end{cases} \quad (\text{PAC})$$

sendo $\mathcal{A}(t): D(\mathcal{A}(t)) \subset X \rightarrow X$ um operador autoadjunto positivo, dado por

$$\mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & -\gamma(t)\Delta + \beta\varepsilon(t) \end{bmatrix},$$

e F uma aplicação Lipschitz contínua sob subconjuntos limitados de X .

A teoria de potências fracionárias será utilizada para encontrar um espaço adequado de modo que o problema (PAC) seja bem proposto (no sentido de Hadamard). Inicialmente, o espaço de Banach $L^2(\Omega)$ parece uma boa escolha, já que o problema original envolve funções duas vezes diferenciáveis. No entanto, tal espaço contém muitas funções, tornado mais difícil encontrar solução com boa regularidade e, além disso, a presença do operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet, cudo domínio é dado pelo espaço $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, sugere a procura de um espaço “mais regular” que $L^2(\Omega)$.

Nesse contexto, somos introduzidos a teoria de potências fracionárias para operadores setoriais. Em particular, vamos desenvolver espaços de potências fracionárias associados ao operador $-\Delta$, o qual é setorial, fechado e do tipo positivo. Além disso, para $0 < \alpha < 1$, o operador linear limitado $(-\Delta)^\alpha: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ dado por

$$(-\Delta)^{-\alpha} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty s^{-\alpha} (s + -\Delta)^{-1} ds$$

é injetor. Assim, podemos definir o operador $(-\Delta)^\alpha: D((-\Delta)^\alpha) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ por

$$D((-\Delta)^\alpha) = \text{Im}((- \Delta)^{-\alpha}) \quad \text{e} \quad (-\Delta)^\alpha = [(-\Delta)^{-\alpha}]^{-1}.$$

Finalmente, definimos os espaços $[L^2(\Omega)]^\alpha = (D((-\Delta)^\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$, os quais são chamados de espaços de potências fracionárias associados ao operador $-\Delta$, para o qual as seguintes caracterizações são válidas:

$$D((-\Delta)^0) = L^2(\Omega), \quad D((-\Delta)^{1/2}) = H_0^1(\Omega), \quad D((-\Delta)^1) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Assim, adotamos $\alpha = \frac{1}{2}$. A escolha do espaço $[L^2(\Omega)]^{\frac{1}{2}} = (D((-\Delta)^{\frac{1}{2}}), \|\cdot\|_{\frac{1}{2}})$ fornece um espaço intermediário entre $L^2(\Omega)$ e $D((-\Delta)^\alpha)$, garante a boa colocação do problema (PAC) e melhor regularidade de soluções, que pertençam a um espaço funcional adequado em relação a (EDP).

Referências

- [1] T. CARABALLO, A. N. CARVALHO, J. A. LANGA, F. RIVERO. *A non-autonomous strongly damped wave equation: Existence and continuity of the pullback attractor*. Nonlinear Analysis. **74** (2011), 2272-2283.

¹IME - UFU, ially.pereira@ufu.br. Agradeço à CAPES pelo fomento.

²IME - UFU, collegari@ufu.br.

Operadores Regulares em Reticulados de Banach

Lorena Bezerra de Almeida¹

Elisa Regina dos Santos²

Resumo

De acordo com [1], o desenvolvimento da Análise Funcional ao longo do século XX está intimamente ligado à formalização e generalização de estruturas algébricas e topológicas que modelam o comportamento de funções, operadores e sequências. Nesse contexto, os espaços de Riesz surgiram como uma poderosa ferramenta para incorporar noções de ordem à estrutura linear de espaços vetoriais. A introdução da ordem parcial compatível com as operações lineares permite a unificação de diversos conceitos da Análise real, da Teoria da Medida e da Teoria dos Operadores Positivos.

O estudo de operadores em espaços vetoriais ordenados, especialmente em reticulados de Banach, fundamenta-se nas propriedades de positividade. Um operador linear $T : E \rightarrow F$ é dito **positivo** se preserva a ordem, ou seja, $T(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. A partir disso, define-se a classe central deste trabalho: um operador é **regular** se puder ser expresso como a diferença de dois operadores positivos. O conjunto de todos os operadores regulares, denotado por $L_r(E, F)$, forma um espaço vetorial que contém o cone dos operadores positivos.

Todo operador regular é também **ordem-limitado**, o que significa que leva conjuntos ordem-limitados de E em conjuntos ordem-limitados de F . Isso estabelece a inclusão fundamental $L_r(E, F) \subseteq L_b(E, F)$, onde $L_b(E, F)$ é o espaço dos operadores ordem-limitados. Embora essa inclusão possa ser própria, segundo o Exemplo 1.16 de [2], uma condição importante para a igualdade emerge quando o contradomínio possui uma estrutura mais rica.

O Teorema de Riesz-Kantorovich ([2], Teorema 1.18) estabelece que, se F for um espaço de Riesz Dedekind completo, então o espaço $L_b(E, F)$ também é. Uma consequência direta e poderosa desse teorema é que todo operador ordem-limitado admite uma decomposição $T = T^+ - T^-$, o que implica que ele é regular. Portanto, sob a condição de F ser Dedekind completo, os conceitos de operador regular e ordem-limitado coincidem: $L_r(E, F) = L_b(E, F)$.

A análise desses operadores se aprofunda ao introduzir uma estrutura topológica. Em [3], vemos que nos espaços de Riesz normados, a interação entre a ordem e a norma se torna crucial. Uma proposição fundamental afirma que, se E for um reticulado de Banach e F um espaço de Riesz normado, todo operador linear positivo de E em F é contínuo. Como operadores regulares são diferenças de operadores positivos, conclui-se que, neste cenário, todo operador regular é contínuo, resultando na igualdade $L_r(E, F) = \mathcal{L}_r(E, F)$, onde $\mathcal{L}_r(E, F)$ denota o espaço dos operadores regulares contínuos em E .

Finalmente, a estrutura de ordem e a norma são unificadas com a introdução da **r-norma** para operadores em reticulados de Banach. Conforme [3], para um operador regular $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$, a r-norma é definida por:

$$\|T\|_r = \inf\{\|S\| : S \in \mathcal{L}(E, F)_+, |Tx| \leq S|x|, \forall x \in E_+\}.$$

Com essa norma, o espaço $(\mathcal{L}_r(E, F), \|\cdot\|_r)$ torna-se um espaço de Banach. Se, adicionalmente, F for Dedekind completo, a estrutura se completa: $(\mathcal{L}_r(E, F), \|\cdot\|_r)$ torna-se um reticulado de Banach, onde a r-norma de um operador coincide com a norma de seu módulo, isto é, $\|T\|_r = \|T\|$. Esse resultado representa o ponto culminante da teoria, integrando as propriedades de ordem e topológicas dos operadores regulares.

Referências

- [1] PIETSCH, A. *History of Banach spaces and linear operators*. 1^a ed. Boston: Springer, 2007.
- [2] ALIPRANTIS, C. D.; BURKINSHAW, O. *Positive Operators*. Netherlands: Springer, 2006.
- [3] MEYER-NIEBERG, P. *Banach Lattices*. Berlim: Springer-Verlag, 1991.

¹IME, UFU, lore.lo2310@ufu.br. Agradeço à SESu/MEC pelo fomento.

²IME, UFU, elisars@ufu.br.

Lineabilidade de conjuntos de zeros de operadores multilineares

Mikaela Aires¹
 Geraldo Botelho²

Resumo

Neste trabalho, investigamos a existência de estruturas lineares no conjunto de zeros de operadores multilineares, com ênfase na noção de finitamente lineável (definida a seguir). Embora resultados clássicos sobre a lineabilidade de conjuntos de zeros de polinômios homogêneos – como o teorema de Plichko e Zagorodnyuk [2] (1998) – tenham motivado avanços importantes na área, mostramos que o caso dos operadores multilineares é, sob vários aspectos, de provas mais diretas. Diferentemente do cenário polinomial, que frequentemente exige hipóteses adicionais, demonstramos que o conjunto de zeros de um operador multilinear definido em um produto cartesiano de espaços vetoriais (reais ou complexos), com valores escalares, é sempre finitamente lineável, desde que ao menos um dos espaços envolvidos tenha dimensão infinita. Para isso, adotamos uma abordagem baseada em noções modernas de lineabilidade e propomos definições adequadas ao contexto. A estrutura do caso multilinear, consideravelmente mais direta do que no caso polinomial, permite conclusões imediatas sobre a presença de subespaços de dimensão infinita contidos no conjunto de zeros da aplicação. Os resultados deste trabalho, tanto no caso polinomial quanto no caso multilinear, podem ser consultados em [1].

Para formalizar nossas ideias, introduzimos as seguintes definições.

Definição 1 Um subconjunto não vazio A de um espaço vetorial de dimensão infinita X é *finitamente lineável* se, para todo subespaço de dimensão finita $W \subseteq X$ com $W \subseteq A \cup \{0\}$, existe um subespaço de dimensão infinita de X que contém W e está contido em $A \cup \{0\}$.

Definição 2 Sejam X um espaço vetorial e $P: X \rightarrow \mathbb{K}$ um polinômio m -homogêneo. Para um polinômio t -homogêneo $Q: X \rightarrow \mathbb{K}$, $1 \leq t \leq m - 1$, escrevemos $Q \prec P$ se existem $x_1, \dots, x_n \in X$ tais que $P(x_1) = \dots = P(x_n) = 0$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ satisfazendo $\alpha_1 + \dots + \alpha_n + t = m$, de modo que

$$Q(x) = \check{P}(x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}, x^t) \text{ para cada } x \in X.$$

Como contraste, citamos o caso polinomial antes do resultado multilinear.

Teorema 3 Sejam X um espaço vetorial de dimensão infinita e $P: X \rightarrow \mathbb{K}$ um polinômio m -homogêneo. Suponha que, para cada subespaço de dimensão infinita Y de X , existe um vetor não nulo $y \in Y$ tal que $P(y) = 0$ e cada polinômio homogêneo $Q \prec P$ se anula em um subespaço de dimensão infinita de Y . Então o conjunto de zeros de P é finitamente lineável.

Nossa principal resultado estabelece que, para operadores multilineares, não é necessário impor hipóteses adicionais:

Teorema 4 Sejam X_1, \dots, X_m espaços vetoriais reais ou complexos e $A: X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow \mathbb{K}$ um operador multilinear. Se para algum $j \in \{1, \dots, m\}$, o espaço X_j tem dimensão infinita, então o conjunto de zeros de A é finitamente lineável.

Referências

- [1] M. Aires, G. Botelho. *Zero sets of homogeneous polynomials containing infinite dimensional spaces*. Rev. Mat. Complut. articles in press, (2025).
- [2] A. Plichko, A. Zagorodnyuk. *On automatic continuity and three problems of The Scottish Book concerning the boundedness of polynomial functionals*. J. Math. Anal. Appl., **220**, (1998), 477-494.

¹Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, mikaela_aires@ime.usp.br. Agradeço à CNPq pelo fomento.

²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, botelho@ufu.br. Agradeço à FAPEMIG pelo fomento.

Geometria e Topologia

Equações Diferenciais e Superfícies Pseudoesféricas

Gabriel de Azevedo Garrido ¹
 Igor Leite Freire ²

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo apresentar relações entre certas equações diferenciais parciais que tenham soluções que descrevam superfícies pseudoesféricas. Para tal, usaremos a linguagem moderna da geometria diferencial, presente nas referências [1] e [2], as quais darão base para os cálculos que serão feitos.

Uma superfície pseudoesférica possui curvatura Gaussiana K constante e negativa que, sem perda de generalidade, podemos supor $K = -1$. Usaremos, então, a teoria desenvolvida por S. S. Chern e K. Tenenblat, vide [3], conectando soluções de certas equações diferenciais parciais, chamadas *equações diferenciais que descrevem superfícies pseudoesféricas* e o correferencial e a forma de conexão de Levi - Civita.

Aplicaremos nossos resultados na equação de *sine - Gordon*.

References

- [1] J. N. Clelland. From Frenet to Cartan: The Method of Moving Frames. 1. ed. Washington D. C.: Editora American Mathematical Society, 2017.
- [2] A. McInerney First Steps in Differential Geometry: Riemannian, Contact, Symplectic. 1. ed. Nova York: Editora Springer, 2013.
- [3] S. S. Chern, K. Tenenblat. *Pseudospherical Surfaces and Evolution Equations* Studies in Applied Mathematics. **74** (1986), 55-86.

¹Departamento de Matemática - Universidade Federal de São Carlos, gabrielgarrido@estudante.ufscar.br.

²Departamento de Matemática - Universidade Federal de São Carlos, igor.freire@ufscar.br.

A Construção Progressiva de Geometrias sob a Perspectiva Axiomática

Gabriel Saifert Martins ¹
Márcio Roberto Rocha Ribeiro ²

Resumo

Este trabalho tem como objetivo geral analisar como, formalmente, se dá a construção da matemática a partir do método axiomático, destacando sua aplicação na formulação e construção de diferentes geometrias. A pesquisa, de caráter teórico, qualitativo e exploratório, foi desenvolvida no âmbito da disciplina de Fundamentos de Geometria do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Catalão - UFCAT. Partindo da análise dos conceitos primitivos de ponto e reta, e da relação de incidência, busca-se compreender como a adição controlada de axiomas dá origem a distintas estruturas geométricas. São inicialmente introduzidos os axiomas de incidência, que possibilitam a construção da geometria de incidência, com modelos exemplificados por conjuntos finitos. A inclusão do axioma da régua estabelece correspondência entre pontos de uma reta e números reais, originando a geometria métrica, com modelos como o cartesiano e o do taxista. Em seguida, a análise de modelos não usuais, como o modelo bizarro, leva à formulação do axioma de separação do plano e à construção da geometria de Pasch. O modelo de Moulton, por sua vez, motiva a adição do axioma de congruência de triângulos, conduzindo à geometria neutra, que admite também o modelo de Klein. A distinção entre o axioma das paralelas de Euclides que assegura a existência de uma única paralela por um ponto fora de uma reta e o de Lobachevsky que admite múltiplas paralelas permite diferenciar a geometria euclidiana da hiperbólica. Conclui-se que a construção progressiva de sistemas axiomáticos não apenas demonstra a lógica interna de cada geometria, mas também evidencia o papel dos modelos como ferramentas para validar, refutar ou ampliar teorias matemáticas de modo rigoroso e coerente.

Referências

- [1] Barbosa, J. L. M., Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, SBM, 2001.
- [2] Bergamashi, P. R., Ribeiro, M. R. R., Fundamentos de Geometria. Notas de Aula.
- [3] Reis, G. L., Fundamentos de Geometria. Notas de Aula.

¹Instituto de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Catalão, gabriel.martins@discente.ufcat.edu.br.

²Instituto de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Catalão, marcio.ribeiro@ufcat.edu.br

Geometria p-ádica das Raízes de Polinômios em Corpos Locais:

Uma Abordagem Via Valoração Não Arquimediana

Katherine Angie Molina Luciano ¹

Slobodan Tanushevski ²

Resumo

Seja A um anel de valoração discreta não arquimediana completo em relação à topologia induzida pela valoração, e $f(X) = \sum a_i X^i \in A[X]$ um polinômio. Neste trabalho, exploraremos a geometria e a topologia p-ádica das raízes de f em corpos locais, utilizando o Polígono de Newton para visualizar as ordens p-ádicas dos coeficientes e caracterizar as propriedades das raízes. Aplicaremos o Lema de Newton para construir aproximações sucessivas dessas raízes e o Lema de Hensel para garantir sua existência e unicidade, “levantando” soluções modulares para o contexto p-ádico. Destacaremos como essas ferramentas evidenciam a interação entre álgebra, geometria e topologia não arquimediana, ressaltando aspectos fundamentais da teoria dos corpos locais.

Palavras-chave: Polígono de Newton, Lema de Hensel, Valoração não arquimediana, Geometria p-ádica, Topologia p-ádica, Corpos locais, Espaço ultramétrico, Anéis de valoração, Raízes de polinômios.

Referências

- [1] J. S. Milne. *Algebraic Number Theory*. Versão 3.08, 2020. Disponível em: <http://www.jmilne.org/math/>. Acessado em: julho de 2025.
- [2] J. Neukirch. *Algebraic Number Theory*. Traduzido do alemão por N. Schappacher. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

¹Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, kangie@id.uff.br. Agradeço ao Prof. Slobodan Tanushevski pela orientação.

²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, stanushevski@id.uff.br.

Introdução à Teoria de Complexos Simpliciais

Mateus Fernando Araújo Silva ¹

Taciana Oliveira Souza ²

Francielle Rodrigues de Castro Coelho ³

Resumo

O conceito de complexo simplicial, surgiu no início da topologia algébrica, no começo do século XX. A estrutura de complexo simplicial permite representar espaços topológicos complicados por objetos combinatórios, facilitando o uso de álgebra (homologia, cohomologia).

Intuitivamente, um complexo simplicial é um objeto combinatório que descreve como construir um espaço a partir de blocos básicos, chamados simplexos, de forma geral, são polígonos n –dimensionais formados por simplexos (por exemplo, conjuntos de pontos, curvas poligonais, polígonos, poliedros e uniões destes). Esses blocos, devem ser colados de forma adequada, ao longo de suas faces. Os simplexos, são generalizações de triângulos, ou seja, pontos, segmentos, triângulos, tetraedros, etc. Exemplos de espaços topológicos que podem ser vistos como um complexo simplicial são a esfera, o toro, o plano projetivo e a garrafa de Klein.

Neste trabalho, o principal objetivo é apresentar resultados e conceitos sobre a teoria de complexos simpliciais. As principais referências para o desenvolvimento deste trabalho foram [1] e [2].

Referências

- [1] D. Lima, D. Miranda. Introdução à Topologia Algébrica. Apostila didática, Universidade Federal do ABC (UFABC), 2023.
- [2] A. Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

¹IME, Universidade Federal de Uberlândia, mateus.fernando@ufu.br. Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo fomento.

²IME, Universidade Federal de Uberlândia, tacioli@ufu.br.

³IME, Universidade Federal de Uberlândia, francielle@ufu.br.

Características robustas em superfícies em \mathbb{R}^3

Matheus Felipe Calu Rocha¹

Orientador: Jorge Luiz Deolindo Silva²

Resumo

Este trabalho tem como objetivo descrever as *características robustas* de superfícies suaves imersas em \mathbb{R}^3 , sob a perspectiva da teoria das singularidades. Nomenclatura introduzida por Ian Porteous, tais características referem-se a propriedades geométricas que permanecem inalteradas sob deformações suaves da superfície, no sentido da \mathcal{A} ou \mathcal{K} -equivalência das aplicações envolvidas. Essas propriedades são obtidas a partir do estudo do contato da superfície com subvariedades de curvatura constante, como planos, retas e esferas. Especificamente, as singularidades de funções associadas a esse contato, como funções altura, projeções ortogonais e funções distância ao quadrado, definem subconjuntos especiais na superfície, denominados *curvas robustas* [1]. Um exemplo clássico é o conjunto parabólico, que pode ser descrito pelas singularidades das funções altura e das projeções ortogonais. Neste contexto, o projeto propõe a caracterização e a descrição da *curva parabólica*, da *curva flecnodal*, da *curva ridge* e da *curva sub-parabólica*, por meio de ferramentas da geometria diferencial clássica e da classificação de singularidades estáveis de aplicações suaves.

Referências

- [1] S. IZUMIYA, M.C. ROMERO-FUSTER, M.A.S RUAS, F. TARI. Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint. [s.l.] World Scientific, 2016.

¹IME-PPGMAT, UFU, matheus.calu@ufu.br. Agradeço à CAPES pelo fomento.

²IME-PPGMAT, UFU, jorge.deolindo@ufu.br.

Matemática Aplicada

Modelagem da Pressão Acústica de Transdutores para o Processo de Levitação Acústica

Andreina de Souza Dourado¹

Celso Vieira Abud²

Resumo

A técnica de levitação acústica baseia-se na utilização de ondas sonoras para gerar uma força de radiação acústica capaz de contrabalancear a gravidade e manter objetos suspensos no ar [1]. Um sistema simples de levitação acústica utiliza um conjunto de pequenos transdutores posicionados de forma a gerar ondas pseudoestacionárias unidimensionais [4]. Nesse caso, as ondas emitidas pelos transdutores devem ser ajustadas em fase, de forma a se concentrar em um ponto específico do espaço, aumentando o campo de pressão local [3].

Para um conjunto de transdutores acústicos dispostos em um plano e emitindo ondas sonoras com frequência e amplitude constantes, o modelo da pressão acústica, P_n em campo distante para uma fonte circular do tipo pistão é dado por [2]:

$$P_n(r) = P_0 V \frac{D_f(\theta_n)}{d_n} e^{i(\phi + kd_n)}, \quad (0.1)$$

em que P_0 é a amplitude da pressão, V é a tensão aplicada, d_n é a distância entre o transdutor n e o ponto focal de interesse r , $D_f(\theta_n)$ é a função de direitividade, com θ_n sendo o ângulo entre o eixo normal do transdutor e o vetor que aponta para r , k é o número de onda, e ϕ é a fase eletrônica.

A modulação da fase eletrônica, que permite o foco das ondas em um ponto r no espaço (x_f, y_f, z_f) , é dada por:

$$\phi_n = -k \left(\sqrt{(x_f - x_t)^2 + (y_f - y_t)^2 + (z_f - z_t)^2} + \sqrt{x_f^2 + y_f^2 + z_f^2} \right), \quad (0.2)$$

em que x_t , y_t e z_t representam as posições dos transdutores. Dessa forma, cada um dos n transdutores pode ser modulado de maneira que o campo acústico total $P = \sum_{n=1}^n P_n(r)$ gere um nó de pressão intensificado no centro do equipamento.

A Equação (0.1) indica que transdutores equidistantes ao eixo de levitação contribuirão igualmente para a intensidade do campo. Portanto, tais transdutores devem ser ajustados com a mesma fase ϕ Equação (0.2).

Neste trabalho, investigou-se o campo de pressão acústica resultante para diferentes configurações com o mesmo número de transdutores ultrassônicos de 40 kHz. As simulações demonstram que a simples reconfiguração dos transdutores pode alterar significativamente a intensidade do campo de pressão. Tal resultado implica na possibilidade de levitar objetos mais densos, mesmo mantendo a mesma quantidade de transdutores.

Referências

- [1] E. Brandt. “Acoustic physics - Suspended by sound”. Em: Nature 413 (nov. de 2001), pp. 5 - 474.
- [2] L.E. Kinsler, A.R. Frey, A.B. Coppens e J.V. Sanders. Fundamentals of Acoustics. 4º Ed. Nova York: John Wiley & sons, 2000.
- [3] T. Laurell, F. Petersson e A. Nilsson. Chip integrated strategies for acoustic separation and manipulation of cells and particles. Em: Chem. Soc. Rev. 36 (2007), pp. 492–506.
- [4] A. Marzo, S. A. Seah, B. W. Drinkwater, D. R. Sahoo, B. Long, S. Subramanian. Holographic acoustic elements for manipulation of levitated objects. Em: Nature Communications, 6 (2015), pp. 1723-2041.

¹Universidade Federal de Catalão, andreinadourado@discente.ufcat.edu.br

²Universidade Federal de Catalão, cabud@ufcat.edu.br

Avaliação do Risco de Lesões em Atletas de Futebol Feminino Profissional via HyFIS

Fernanda de Andrade Flor¹

Rosana Sueli da Motta Jafelice²

José Waldemar da Silva³

Resumo

O objetivo deste trabalho é realizar a predição do risco de lesões em atletas de futebol feminino profissional. Segundo Ye et al. [4], o risco de lesão está diretamente ligado ao volume de treino dos atletas. Os Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) permitem determinar o risco de lesão a partir de variáveis relacionadas ao treinamento físico. Neste trabalho é determinado um SBRF que possui como variável de saída o risco de lesão e quatro variáveis de entrada, sendo três de carga de treinamento percebida e uma de bem-estar. As variáveis relacionadas à carga de treino são: Carga Aguda de Treinamento, Carga Semanal e Relação de Carga Aguda-Crônica, e a de bem-estar é a Fadiga relatada pela atleta. Este SBRF é obtido através do *Hybrid neural Fuzzy Inference System* (HyFIS) [1], que foi proposto por Kim e Kasabov em 1999. O HyFis combina redes neurais com a teoria dos conjuntos fuzzy, para determinar um SBRF a partir de um conjunto de dados de entrada e de saída, utilizando o método de inferência de Mamdani. O HyFIS conta com uma rede neural de 5 camadas, sendo o treinamento efetuado para funções de pertinência do tipo gaussiana. Neste estudo foram utilizados 11.612 registros diários de atletas de dois clubes profissionais de futebol feminino da Noruega, coletados através do aplicativo Player Monitoring System (pmSys) durante as temporadas de 2020 e 2021 [2]. O sistema foi desenvolvido utilizando o software R [3], sendo que o SBRF construído possui quatro funções de pertinência para cada variável. O treinamento foi realizado com 75% dos dados e o teste com os 25% restantes. Como resultado, foi obtida uma acurácia de 99,86%. Para obter tal resultado, os valores dos riscos preditos foram arredondados para 0 ou 1. O sistema desenvolvido permite determinar o risco de lesão para atletas a partir de novos dados que estejam nas mesmas condições. Esse resultado é de grande relevância, pois possibilita a avaliação individualizada do risco das atletas de futebol feminino profissional. Para ilustrar a aplicação, considere três atletas diferentes com os seguintes valores para as variáveis “Carga Aguda de Treinamento”, “Carga Semanal”, “Relação de Carga Aguda-Crônica” e “Fadiga”: Atleta 1 - 600, 200, 30 e 2; Atleta 2 - 10.000, 500, 55 e 2; Atleta 3 - 50.000, 5.700, 184 e 5, respectivamente. Através do SBRF obtido pela HyFIS, os riscos estimados de lesão são, respectivamente, 0,004, 0,588 e 0,916. Assim, a Atleta 1 possui um baixo risco de lesão, a Atleta 2 um risco médio, enquanto a Atleta 3 possui um alto risco de se lesionar. A partir dos resultados obtidos, é possível destacar a importância da matemática aplicada na fisioterapia esportiva. Modelos como esses possibilitam oferecer suporte para decisões preventivas de fisioterapeutas e treinadores, contribuindo para a promoção da saúde e a melhoria do desempenho das atletas.

Referências

- [1] J. Kim, N. Kasabov. *HyFIS: Adaptive Neuro-Fuzzy Inference Systems and Their Application to Nonlinear Dynamical Systems*. Neural Networks. **12** (1999), 1301–1319.
- [2] C. Midoglu et al. *A large-scale multivariate soccer athlete health, performance, and position monitoring dataset*. Scientific Data. **11**:553 (2024).
- [3] R Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2024.
- [4] X. Ye, Y. Huang, Z. Bai, Y. Wang. *A novel approach for sports injury risk prediction: based on time-series image encoding and deep learning*. Frontiers in Physiology. **14** (2023), 1174525.

¹Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, fernandaflor@ufu.br. Agradeço à FAPEMIG pelo fomento.

²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, rmotta@ufu.br.

³Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, zewaldemar@ufu.br.

Modelagem Matemática e uma Estratégia Heurística para o Problema do Caixeiro Viajante

Hugo da Costa Pezzano¹

Michelli Maldonado²

Resumo

O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) é um clássico da Otimização Combinatória, formulado como a tarefa de encontrar o menor caminho possível que percorra todas as cidades de um conjunto, visitando cada uma exatamente uma vez e retornando ao ponto de origem. Apesar de sua aparente simplicidade, o PCV é classificado como um problema NP-difícil (Non-deterministic Polynomial-time hard), o que significa que não existem algoritmos eficientes conhecidos para resolvê-lo de forma exata em larga escala [2, 4]. A formulação matemática tradicional do problema utiliza variáveis binárias para representar a presença ou ausência de arestas em um grafo completo, minimizando o custo total das conexões entre os vértices e impondo restrições para garantir um percurso contínuo sem subciclos [1]. No entanto, essa modelagem torna-se rapidamente inviável para resolução manual, mesmo em instâncias pequenas, devido à explosão combinatória envolvida [3, 6]. Diante dessa complexidade, heurísticas surgem como ferramentas valiosas para obter soluções viáveis de forma prática e eficiente. Este trabalho aborda a heurística do Vizinho Mais Próximo, uma estratégia construtiva baseada em grafos, que consiste em iniciar o percurso a partir de um vértice arbitrário e, a cada passo, seguir pela aresta de menor peso até uma cidade ainda não visitada [5]. A simplicidade do método permite sua aplicação em ambientes educacionais, sem a necessidade de ferramentas computacionais, sendo útil na construção de raciocínio algorítmico e na visualização de estruturas gráficas [1]. Considerando um exemplo com sete cidades e uma matriz de distâncias, será apresentada a construção detalhada de uma solução heurística, com destaque para as limitações do método, como a sensibilidade à escolha do vértice inicial e a possibilidade de obtenção de soluções subótimas.

Referências

- [1] M. M. Carretero. *Relatório de Estágio Básico: Introdução ao Problema do Caixeiro Viajante*. Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2006.
- [2] M. C. Goldbarg e H. P. L. Luna. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 2000.
- [3] M. Gondran e M. Minoux. *Graphs and Algorithms*. Wiley-Interscience Publication, 1992.
- [4] E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. K. G. Rinnooy Kan e D. B. Shmoys. *The Traveling Salesman Problem*, 1985.
- [5] C. M. de Oliveira. *Uma ferramenta baseada em Excel/VBA para apoio no ensino de Pesquisa Operacional*. In: ENEGEP 2014 - XXXIV Encontro Nacional de Engenharia de Produção, Curitiba, PR, 2014.
- [6] R. J. Wilson e J. J. Watkins. *Graphs: An Introductory Approach*, 1991.

¹PET - Matemática | Universidade Federal do Triângulo Mineiro | d202320040@uftm.edu.br

²Departamento de Matemática | Universidade Federal do Triângulo Mineiro | Michelli.oliveria@uftm.edu.br

Multiplicadores de Lagrange: Teoria e Aplicações

João Paulo Nascimento Prudente ¹

Luis F. E. Sánchez ²

Santos Alberto Enriquez-Remigio ³

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo dos multiplicadores de Lagrange, abordando desde a fundamentação teórica até sua aplicação prática na resolução de problemas de otimização com restrições de igualdade. Nossa ênfase está na interpretação dos multiplicadores como fatores de sensibilidade da função objetivo em relação às restrições, o que é fundamental para entender como as restrições afetam o resultado ótimo.

Inicialmente, discutimos a motivação geométrica do método dos multiplicadores de Lagrange e mostramos que ele pode ser utilizado para encontrar pontos críticos sujeitos a restrições, satisfazendo condições de otimalidade, ver [1, 3]. Essas condições incluem hipóteses de regularidade (ver [2]) que garantem a validade das soluções obtidas. Em seguida, analisamos as limitações do uso analítico da metodologia, destacando, por exemplo, a dificuldade na resolução de sistemas não lineares e na caracterização do tipo de extremo identificado. Para superar essas dificuldades, exploramos o uso de métodos numéricos (ver [4]) com o auxílio da linguagem de programação Python. Exemplos ilustrativos demonstram a aplicabilidade prática da teoria e evidenciam como ferramentas computacionais tornam o método viável em problemas reais.

Referências

- [1] F. Hillier, G. Lieberman. Introdução à Pesquisa Operacional. 8.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.
- [2] A. Izmailov, M. Solodov. Otimização Volume 1: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [3] E. L. Lima. Curso de Análise: Vol. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [4] J. Nocedal, S. J. Wright. Numerical Optimization. 2.ed. New York: Springer, 2006.

¹Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia (UFU),joao.prudente@ufu.br .

²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia (UFU), luis.sanchez@ufu.br.

³Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia (UFU), santos.er@ufu.br.

Agradecemos ao Laboratório de Cálculo Numérico e Simbólico do IME-UFU pelo apoio com a infraestrutura.

Identificação de Nós Influentes em Redes Complexas

Lara Cristina de Oliveira Vieira ¹

Celso Vieira Abud ²

Resumo

Redes complexas são sistemas formados por elementos interconectados que exibem interações não triviais. Tradicionalmente, a teoria dos grafos provê o formalismo matemático para o estudo das relações entre objetos de um determinado conjunto, que são representados através de vértices (nós) e arestas [1].

No mundo real, convivemos com sistemas que podem ser representados e estudados por redes complexas, como: sistemas de cooperação social, infraestruturas de comunicação e sistemas de transporte. Esses dois exemplos mostram direções opostas onde o processo de disseminação pode ser afetado: remover nós estruturais (vital) pode impedir a disseminação de epidemias, enquanto identificar e acionar nós influentes pode maximizar o alcance da informação.

Existem diversos trabalhos na literatura voltados à identificação de nós influentes em redes complexas [2, 4]. As chamadas centralidades estruturais atribuem um valor real a cada nó da rede, de acordo com sua importância estrutural. Dentre essas, destacam-se: grau (CG), intermediação (CI), proximidade (CP) e autovetor (CA). Algumas abordagens consideram também a influência dos vizinhos dos nós, como os algoritmos PageRank e HITS (*Hyperlink-Induced Topic Search*). Este último classifica nós com base nos conceitos de *hubs* e *autoridades*, onde *hubs* são nós que apontam para *autoridades* relevantes, e estas são aquelas que recebem muitas conexões de bons *hubs* [3].

Neste trabalho, investigou-se a identificação de nós influentes em redes direcionadas. Uma rede direcionada não ponderada é representada por $G = (V, E)$, com $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, onde $|V|$ é o número de vértices e $|E|$ o número de arestas. A matriz de adjacência $A = (a_{ij})$ tem dimensão $|V| \times |V|$, onde $a_{ij} = 1$ se $(i, j) \in E$, e 0 caso contrário. Em redes direcionadas, pode ocorrer $a_{ij} \neq a_{ji}$.

O objetivo do trabalho foi comparar centralidades clássicas (grau, intermediação, proximidade e autovetor) com o algoritmo HITS, analisando como cada métrica identifica os nós influentes e avaliando o impacto disso em diferentes tipos de rede: sociais, biológicas e de infraestrutura. Foram conduzidos experimentos computacionais com a biblioteca NetworkX em redes direcionadas geradas a partir de modelos como Watts-Strogatz, Erdős-Rényi e Barabási-Albert.

A análise até o momento mostra que a definição de nós influentes varia significativamente com a abordagem topológica adotada. Conclui-se que a integração de diferentes métricas é essencial, pois a influência de um nó depende não apenas da topologia, mas também da dinâmica associada à rede. Esse entendimento é crucial para otimizar o controle e a gestão de sistemas interconectados.

Referências

- [1] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, D.-U. Hwang. *Complex networks: Structure and dynamics*. Em: Physics Reports, **424**(4), (2006), pp. 175–308.
- [2] Z. Dong, Y. Chen, T. S. Tricco, C. Li, T. Hu. *Hunting for vital nodes in complex networks using local information*. Em: Scientific Reports, **11**, (2021), pp. 9190.
- [3] M. Kitsak et al. *Identification of influential spreaders in complex networks*. Em: Nature Physics, **6**(11),(2010), pp. 888–893.
- [4] L. Lü, D. Chen, X. Ren, Q. Zhang, Y. Zhang, T. Zhou. *Vital nodes identification in complex networks*. Em: Physics Reports, **650**, (2016).

¹Universidade Federal de Catalão, laravieira@discente.ufcat.edu.br

²Universidade Federal de Catalão, cabud@ufcat.edu.br

Aplicação do Algoritmo *splmm* na Seleção de Genes Associados à Biossíntese de Riboflavina

Larissa Castro Silva¹
 Lucas Emanuel Pereira de Melo²
 Daniela Carine Ramires de Oliveira³

Resumo

A riboflavina (vitamina B2) é um micronutriente essencial do complexo B, obtido principalmente por meio do consumo de carnes e laticínios. Atua como componente fundamental das coenzimas FAD (flavina-adenina-dinucleotídeo) e FMN (flavina-mononucleotídeo), que participam de processos cruciais no metabolismo energético, no reparo do DNA e na regulação do ciclo circadiano [1]. A deficiência dessa vitamina pode causar lesões cutâneas, queda de cabelo, alterações reprodutivas e comprometimento do fígado e do sistema nervoso [4]. Dada sua relevância para a saúde e o bem-estar humano, a identificação de genes associados à síntese de riboflavina representa uma estratégia promissora para fomentar sua produção em sistemas biológicos. Neste estudo, utilizou-se o conjunto de dados *riboflavinV100*, disponibilizado por [2], o qual contém medidas de expressão gênica relacionadas à produção de riboflavina pela bactéria *Bacillus subtilis*, um organismo presente no trato digestivo humano. Com o objetivo de identificar os genes mais relevantes, foi ajustado um modelo linear de efeitos mistos [5] com penalização do tipo Lasso [3], utilizando o algoritmo *splmm* [6], conhecido por sua robustez em contextos de alta dimensionalidade e pela capacidade de lidar com efeitos aleatórios. O estudo permitiu avaliar o desempenho do *splmm* tanto por meio de estudos de simulação quanto por sua aplicação à seleção de genes reguladores da riboflavina, demonstrando sua eficácia na identificação de variáveis relevantes mesmo em cenários com grande número de covariáveis.

Referências

- [1] C. A. Abbas, A. A. Sibirny. *Genetic Control of Biosynthesis and Transport of Riboflavin and Flavin Nucleotides and Construction of Robust Biotechnological Producers*. Microbiology and Molecular Biology Reviews. **Vol. 75(2)** (2011), 321-60.
- [2] P. Bühlmann, M. Kalisch, L. Meier. *High-dimensional statistics with a view toward applications in biology*. Annual Review of Statistics and Its Application **Vol. 1(1)** (2014), 255–278.
- [3] T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman. *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*. 2 ed. Springer, 2009.
- [4] National Institute of Health. Riboflavin. Online. <https://ods.od.nih.gov/factsheets/Riboflavin-HealthProfessional/> Última atualização em 11 de maio de 2022.
- [5] J. C. Pinheiro, D. M. Bates. *Mixed-Effects Models in S and S-Plus*. 2 ed. Springer, 2000.
- [6] L. Yang, E. Sun, T. T. Wu. *splmm: Simultaneous Penalized Linear Mixed Effects Models*. Versão: 1.2.0. Última atualização: 13/06/2024. Online. <https://cran.r-project.org/web/packages/splmm/index.html>.

¹Universidade Federal de São João del Rei, lacasi.682@aluno.ufsj.edu.br

²Universidade Federal de São João del Rei, lucasepm1@aluno.ufsj.edu.br

³Universidade Federal de São João del Rei, daniela@ufsj.edu.br

Infraestrutura de Tecnologia Assistiva e Desempenho Escolar: Levantamento Quantitativo com Dados Públicos de Uberaba

Marcelo Mangini Dias ¹
Michelli Maldonado ²

Resumo

O presente trabalho apresenta a etapa inicial de uma pesquisa quantitativa que investiga a relação entre a presença de infraestrutura de tecnologia assistiva em escolas públicas e privadas de educação básica de Uberaba/MG e o desempenho escolar de alunos com necessidades específicas [4]. A metodologia envolve a utilização de dados secundários do Censo Escolar e da Prova Brasil (SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica) [5], ambos disponibilizados pelo INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), cruzados com informações do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) [1]. As análises são realizadas por meio da linguagem de programação R [7], com extração de variáveis socioeconômicas, de desempenho acadêmico, como por exemplo, notas e permanência escolar, e características institucionais, como por exemplo, acessibilidade, recursos pedagógicos e atendimento especializado. O objetivo é apresentar a organização e análise descritiva dos dados, com apoio de tabelas e gráficos, a fim de caracterizar a distribuição dos recursos escolares e o rendimento dos estudantes ao longo do tempo [3]. Os resultados preliminares permitirão a formulação de hipóteses sobre padrões de desigualdade [6] no acesso à tecnologia assistiva e seu impacto no desempenho escolar [2]. Espera-se consolidar um banco de dados e scripts reproduzíveis que possam subsidiar futuras pesquisas em educação e saúde.

Referências

- [1] Brasil. *Lei n. 12.527, de 18 de novembro de 2011.*, Regula o acesso a informações previsto no inciso XXXIII do art. 5º, no inciso II do §3º do art. 37 e no §2º do art. 216 da Constituição Federal. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 18 nov. 2011. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2011/lei/112527.htm. Acesso em: 4 jul. 2025.
- [2] Brasil. *Lei n. 13.146, de 6 de julho de 2015.* Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 7 jul. 2015. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/113146.htm. Acesso em: 4 jul. 2025.
- [3] Bussab, W. d. O., Morettin., P. A. Estatística Básica. 10. ed. São Paulo: Saraiva, 2023.
- [4] Fernández-Batanero, J. M. et al. *Assistive technology for the inclusion of students with disabilities: a systematic review*. Educational Technology Research and Development. **70** (2022), 1129–1150.
- [5] Fonseca, S. O. D. , Namen, A. A. . *Mineração em bases de dados do INEP: uma análise exploratória para nortear melhorias no sistema educacional brasileiro*. Educação em Revista. **32** (2016).
- [6] Pasquali, L. Psicometria: teoria dos testes na psicologia e na educação. Petrópolis - RJ: Vozes, 2017.
- [7] R Core Team. *R: A language and environment for statistical computing*. Viena: R Foundation for Statistical Computing, 2010.

¹Universidade Federal do Triângulo Mineiro, marcelo.mangini@gmail.com

²Departamento de Matemática | Universidade Federal do Triângulo Mineiro, michelli.oliveira@uftm.edu.br

Escoamento de Fluido Newtoniano com Obstáculo via Formulação Vorticidade-Velocidade e o Método da Fronteira Imersa

Matheus Deodato Arruda¹
 Josuel Kruppa Rogenski²

Resumo

O estudo do escoamento ao redor de corpos imersos, como cilindros, é essencial para a compreensão de fenômenos como a separação da camada limite e a formação da esteira de Von Kármán — uma instabilidade periódica que resulta em forças oscilatórias sobre estruturas expostas ao escoamento. Tais fenômenos possuem implicações diretas em diversas áreas da engenharia, como na aerodinâmica de veículos, no projeto de estruturas civis sujeitas ao vento, na geração de energia e até em aplicações biomiméticas.

As equações de Navier-Stokes, que descrevem escoamentos em diversos regimes, raramente admitem soluções analíticas devido à sua complexidade. Para contornar esse obstáculo, é comum empregar reformulações que explorem propriedades específicas do fluido e do escoamento, facilitando tanto a análise teórica quanto a implementação computacional. Em duas dimensões, uma dessas reformulações é a formulação vorticidade-velocidade, que elimina a pressão como variável explícita do sistema, simplificando o tratamento matemático. Quando discretizada, essa formulação oferece uma vantagem prática: permite o uso eficiente de malhas colocalizadas, evitando problemas numéricos associados ao acoplamento pressão-velocidade em formulações primais.

O obstáculo sólido é modelado por meio do Método da Fronteira Imersa (*Immersed Boundary Method*) [1], que permite representar a presença de obstáculos fixos sem a necessidade de gerar malhas adaptadas à sua geometria. As condições de contorno na interface fluido-sólido são impostas indiretamente através de uma força distribuída ao longo da fronteira imersa, e acoplada ao campo de velocidade via uma função delta de Dirac regularizada, que possibilita a interpolação entre a malha do fluido e os pontos de fronteira.

O método numérico adotado utiliza um esquema de diferenças finitas em malha uniforme com avanço temporal explícito para a equação de vorticidade. As derivadas espaciais são calculadas por meio de diferenças finitas compactas de alta ordem e a velocidade é obtida resolvendo uma equação de Poisson com um método iterativo *multigrid*. E para avaliar a precisão do código utilizado, estão sendo conduzidos testes de verificação comparando com resultados disponíveis na literatura [2], utilizando métricas como o coeficiente de arrasto, a frequência de desprendimento de vórtices, o comprimento da esteira e os gráficos das *streamlines*.

Assim, o objetivo deste estudo é investigar o escoamento ao redor de cilindros fixos utilizando a formulação vorticidade-velocidade associada ao Método da Fronteira Imersa, com foco na análise das potencialidades e limitações desse método para a modelagem de obstáculos em malhas cartesianas uniformes, assim como o de avaliar as vantagens e desvantagens da técnica no tratamento do acoplamento fluido-estrutura, bem como sua capacidade de representar adequadamente fenômenos como a separação da camada limite e a formação da esteira de Von Kármán.

Referências

- [1] E.R.C. Goís. Simulação numérica do escoamento em torno de um cilindro utilizando o método das fronteiras imersas. 2007. Dissertação (Mestrado em Ciências de Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.
- [2] S. Singha, K.P. Sinhamahapatra. *Flow past a circular cylinder between parallel walls at low Reynolds numbers*. Ocean Engineering. Volume 37, Issues 8–9 (2010), 757-769.

¹Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, matheus.deo@ufu.br

²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, jkrogenski@ufu.br

Condições para a Existência de Circuitos Eulerianos no Contexto do Problema do Carteiro Chinês

Pedro Henrique de Oliveira Camargo ¹
 Michelli Maldonado ²

Resumo

Este trabalho apresenta a etapa inicial de um estudo voltado à compreensão de conceitos fundamentais da Teoria dos Grafos, com foco na introdução ao Problema do Carteiro Chinês (PCC). O PCC é um problema clássico da Matemática Discreta que consiste em determinar um caminho de menor custo que percorra todas as arestas de um grafo ao menos uma vez e retorne ao ponto de partida. Sua formulação está diretamente relacionada à estrutura do grafo em questão e às propriedades de seus vértices e arestas. O Problema do Carteiro Chinês foi inicialmente formalizado no contexto da programação matemática, envolvendo técnicas de emparelhamento e circuitos eulerianos em grafos multiconexos [1]. Uma revisão abrangente sobre o tema e suas variantes, como os problemas de roteamento em arcos, é apresentada por [2], destacando a relevância do PCC na área de pesquisa operacional. A apresentação propõe uma abordagem introdutória, partindo do surgimento da Teoria dos Grafos com o problema das pontes de Königsberg, estudado por Leonhard Euler no século XVIII. A partir desse marco histórico, são exploradas as ideias iniciais que motivaram o desenvolvimento da área, suas primeiras aplicações e o papel da abstração matemática na modelagem de situações reais. Em seguida, são apresentados os principais conceitos da Teoria dos Grafos, como vértices, arestas, grau de vértices, grafos conexos, circuitos e caminhos. Uma introdução acessível a esses fundamentos pode ser encontrada em [5]. Um destaque especial é dado ao Teorema de Euler, que fornece uma condição necessária e suficiente para que um grafo conexo possua um circuito euleriano, ou seja, um caminho fechado que percorre cada aresta exatamente uma vez. No Brasil, estudos como o de [3] oferecem ambientes computacionais para a simulação e análise de instâncias do PCC, permitindo a aplicação prática de algoritmos exatos em contextos educacionais e operacionais [3]. Aplicações reais também foram desenvolvidas em municípios brasileiros, como no caso da cidade de Irati/PR, onde o PCC foi utilizado para otimização de rotas urbanas [4]. Com o suporte de exemplos simples, construções de grafos e representações visuais, a exposição visa esclarecer a lógica por trás do teorema e permitir a identificação de quando um grafo pode ser resolvido diretamente como um circuito euleriano. Esta etapa teórica é essencial para a resolução do PCC e estabelece a base para estudos posteriores sobre algoritmos e estratégias de otimização aplicadas ao problema.

Referências

- [1] J. Edmonds, E. L. Johnson. Matching, euler tours and the chinese postman. *Mathematical Programming*. 5 (1973), 88–124.
- [2] H. A. Eiselt, M. Gendreau, G. Laporte. Arc routing problems, part I: The chinese postman problem. *Operations Research*. 43 (1995), 231–242.
- [3] M. J. N. Gomes, et al. O problema do carteiro chinês, algoritmos exatos e um ambiente MVI para análise de suas instâncias: sistema Xnês. *Pesquisa Operacional*. 29 (2009), 323–363.
- [4] F. Konowalenko. *Problema do carteiro chinês não orientado e misto para a otimização de rotas na cidade de Irati/PR*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Centro-Oeste, 2012.
- [5] S. Jurkiewicz. *Grafos – uma introdução*. 1. ed. São Paulo: OBMEP, 2009.

¹Universidade Federal do Triângulo Mineiro | d202220830@uftm.edu.br

²Departamento de Matemática | Universidade Federal do Triângulo Mineiro | michelli.oliveira@uftm.edu.b

Estudo de Ferramentas Matemáticas Aplicadas ao Processamento Digital de Imagens Médicas

Samuel de Lima Pereira¹
Taciana Oliveira Souza²

Resumo

A matemática possui ferramentas que desempenham diversas funções na prática. Uma dessas funções, abordada neste trabalho, é o processamento digital de imagens médicas. As ferramentas matemáticas, especialmente da Álgebra Linear, são fundamentais para a análise, transformação e reconstrução de imagens provenientes de diferentes modalidades de exames radiológicos, como raios X, tomografia computadorizada, ressonância magnética e ultrassonografia.

Dentre as aplicações abordadas, destaca-se o uso de filtros de suavização no domínio espacial, que baseia-se no uso de máscaras de convolução para realizar, geralmente, o borramento da imagem (para eliminar detalhes que não são de interesse para as etapas subsequentes do processamento) ou a remoção de ruídos nela presentes [2]. Esses filtros, frequentemente representados por operações convolucionais envolvendo matrizes (ou *kernels*), aplicam transformações lineares locais sobre os *pixels* da imagem. A Álgebra Linear se mostra essencial na modelagem e análise desses processos, permitindo compreender como operações matriciais atuam diretamente sobre os dados da imagem. São explorados exemplos de *filtros passa-baixa*, demonstrando seus efeitos práticos na atenuação de variações abruptas de intensidade e na preservação de estruturas relevantes [1].

Os resultados obtidos evidenciam como a aplicação dessas ferramentas matemáticas melhora a qualidade visual das imagens, contribuindo diretamente para interpretações clínicas mais precisas. O estudo reforça, assim, a importância de conceitos matemáticos em técnicas computacionais para diagnósticos por meio de imagens.

Referências

- [1] R. C. Gonzalez, R.E. Woods, S.L. Eddins. Processamento Digital de Imagens. 3 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.
- [2] M.F. Ogê, V.N. Hugo. Processamento Digital de Imagens. Rio de Janeiro: Brasport, 1999.

¹Instituto de Física, Universidade Federal de Uberlândia, samuel.pereira@ufu.br. Agradeço ao PICME pelo fomento à iniciação científica, pois por meio da bolsa de estudos este trabalho tornou-se possível.

²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, tacioli@ufu.br.

Estudo Comparativo entre Gradiente Descendente, Estocástico e com *Momentum*

Thamires Sartori Pereira ¹
Santos Alberto Enriquez-Remigio ²

Resumo

O método do gradiente descendente é uma técnica clássica para encontrar mínimos de funções em problemas de ajuste não linear, frequentemente utilizando a minimização da soma dos quadrados dos erros. Entretanto, a necessidade de calcular o gradiente completo a cada iteração pode ser custosa em termos computacionais, especialmente quando se lida com grandes volumes de dados [1, 2]. Como alternativa, o método do gradiente descendente estocástico (SGD) atualiza os parâmetros utilizando apenas um ou poucos dados por vez. O método com *momentum*, por sua vez, incorpora informações de iterações anteriores para acelerar a convergência e suavizar o processo de otimização [2]. Este trabalho tem por objetivo apresentar essas três abordagens e comparar seu desempenho em problemas de ajuste de curvas, analisando aspectos como velocidade de convergência, estabilidade e precisão final.

Referências

- [1] E. V. Cestero, A. M. Caballero. Inteligencia Artificial. Amherst, NY: Books Unplugged, 2020.
- [2] R. T. Kneusel. How AI Works: From Sorcery to Science. San Francisco, CA: No Starch Press, 2023.

¹Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia (UFU), thamires.sartori@ufu.br

²Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia (UFU), santos.er@ufu.br.

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento. Agradecemos ao Laboratório de Cálculo Numérico e Simbólico do IME-UFU pelo apoio com a infraestrutura.

O Reconhecimento de Dígitos Manuscritos via Redes Neurais

Victor Patrick Sena Barbosa Lima¹
 Rosana Sueli da Motta Jafelice²
 Caio Augusto Rodrigues dos Santos³

Resumo

Os modelos de inteligência artificial assumem papel cada vez mais relevante na sociedade, impactando áreas como educação, saúde, indústria e comunicação. Esse avanço ganhou notoriedade com o lançamento do ChatGPT, que se destacou por sua capacidade de compreender linguagem natural e executar tarefas complexas. Com isso, conceitos de inteligência artificial tornaram-se mais acessíveis e despertaram interesse comercial e acadêmico por áreas como Redes Neurais (*Neural Networks*). O objetivo deste trabalho é apresentar o funcionamento teórico-matemático de uma rede neural e sua aplicação prática no problema de reconhecimento de dígitos manuscritos. Um dos pilares para a compreensão desse tema é o conceito de neurônio artificial, também conhecido como *Perceptron*. A inspiração para sua criação surgiu a partir da observação do funcionamento do cérebro humano, em especial da dinâmica dos neurônios biológicos. Os primeiros estudos sobre neurônios artificiais remontam a 1943 [4], quando o neurofisiologista Warren McCulloch e o matemático Walter Pitts publicaram o artigo intitulado “A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity” [1]. Nesse trabalho, os autores descreveram como os neurônios poderiam ser representados matematicamente. Posteriormente, em 1958, Frank Rosenblatt apresentou o primeiro modelo funcional do *Perceptron*, no artigo “The Perceptron: A Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain” [2]. O funcionamento do *Perceptron* é análogo ao de um neurônio biológico e pode ser dividido em três partes principais [3]: a entrada de informações (*Input*), realizada pelos *dendritos*, que captam os sinais externos associados a pesos (interpretados como uma forma de “memória”); o corpo celular (*Soma*), onde ocorre o processamento das informações; e a saída de informações (*Output*), conduzida pelo *Axônio*, que transmite o sinal a outros neurônios, podendo ser ativado ou inibido conforme atinja ou não um limiar (*threshold*). Da mesma forma, o neurônio artificial recebe um conjunto de entradas (x_1, x_2, \dots, x_n) associadas a pesos (w_1, w_2, \dots, w_n) e calcula uma soma ponderada com um termo adicional b , conhecido como viés (*bias*): $x = \sum_{i=1}^n x_i w_i + b$. O valor resultante dessa soma ponderada é então passado por uma função de ativação, responsável por normalizar a saída. Um exemplo simples é a função degrau: $\phi(x) = 0$, se $x \leq 0$ ou $\phi(x) = 1$ se $x > 0$. Essa saída pode ser interpretada como uma decisão binária (por exemplo, 1 para “sim” e 0 para “não”) ou transmitida para outros neurônios artificiais. Quando múltiplos *Perceptrons* são conectados, forma-se uma Rede Neural. Esse encadeamento permite que a rede aprenda representações mais complexas. Uma aplicação prática de redes neurais é o reconhecimento de dígitos manuscritos. Neste trabalho, imagens de dígitos manuscritos (de 0 a 9) são usadas para treinar a rede neural. Ao final do treinamento, o sistema é capaz de receber uma nova imagem e identificar qual dígito está sendo representado, sendo essa uma das bases utilizadas, por exemplo, na leitura automática de cheques e digitalização de documentos históricos.

Referências

- [1] W. S. McCulloch, W. Pitts, *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, **Volume 5** (1943), 115–133.
- [2] F. Rosenblatt. *The PERCEPTRON: A Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain*. *Psychological Review*, **Volume 65 No. 6** (1958).
- [3] C. Stanfield. *Fisiologia Humana*. 5^a Edição. São Paulo, Brasil: Pearson Education do Brasil, 2014.
- [4] R. Szeliski. *Computer Vision: Algorithms and Applications*. 2^a Edição. Seattle, WA, USA: Springer, 2022.

¹Instituto de Matemática e Estatística - IME, Universidade Federal de Uberlândia, victor.sena@ufu.br. Agradeço à CAPES pelo fomento.

²Instituto de Matemática e Estatística - IME, Universidade Federal de Uberlândia, rmotta@ufu.br.

³Faculdade de Computação - FACOM, Universidade Federal de Uberlândia, caioarsantos@ufu.br.

Compensação do Efeito da Temperatura em Assinaturas de Impedância Eletromecânica via Algoritmos de *Machine Learning*

Willian da Silva Lino¹

José Waldemar da Silva²

Simone Rodrigues Campos Ruas³

Resumo

O monitoramento da integridade estrutural por meio da impedância eletromecânica é uma técnica muito difundida como pode ser verificado em Rabelo (2014) [3]. O procedimento consiste em coletar valores de impedância (Ω) ao longo de alguns valores de frequência (Hz) obtendo assim um conjunto de pontos, geralmente apresentados em um gráfico, que configuram a assinatura de impedância. A terminologia “assinatura” se deve à suposição de que mudanças no estado da estrutura implica em alterações nos valores de impedância. O monitoramento a partir da impedância eletromecânica, em geral, consiste em resumir a informação da assinatura em alguma métrica de dano como a CCD (*Correlation Coefficient Deviation*) [1]. O cálculo da CCD envolve o uso da assinatura atual da estrutura e de uma assinatura de referência. O valor da métrica será pequeno se não houve mudança importante na estrutura. O material monitorado pode dilatar termicamente, mudando assim sua densidade, módulo de elasticidade, entre outras propriedades que irão impactar nos valores da impedância. Assim, as assinaturas coletadas em momentos distintos podem ser diferentes não devido ao efeito da mudança estrutural mas, devido ao efeito da temperatura e a CCD pode ter valor alto não pela presença de dano na estrutura mas devido ao efeito da temperatura. O processo de construção ou previsão de uma assinatura de modelo de referência em uma temperatura não existente nos dados de referência é denominado compensação de temperatura [3]. Neste estudo são propostos os algoritmos de aprendizado de máquina, regressão logística, árvores de decisão e gradiente *boosting* baseado em histograma. As variáveis de entrada são temperatura e frequência e a variável de saída é a impedância eletromecânica. Utilizou-se a linguagem Python [2] para implementar os algoritmos. O experimento foi desenvolvido em uma câmara climática do Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst) da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Os valores de temperatura utilizados foram -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25 e 30 °C e, em cada uma, coletadas 30 assinaturas de impedância composta por 1000 pontos. Um modelo é considerado válido se produz boas previsões em temperaturas não utilizadas no treinamento. Utilizou-se seis temperaturas e as frequências e impedâncias correspondentes para treinamento. Os dados, nas outras duas temperaturas, foram reservados para validação. Este procedimento foi repetido até que todas as combinações de temperaturas, tanto para treino quanto para teste fossem consideradas. A média, menor e maior valor de CCD de validação no algoritmo regressão logística foi: 0,6442, 0,5600, 0,733, respectivamente. Para os algoritmo árvore de decisão foi: 0,2447, 0,1138, 0,3808, para floresta aleatória: 0,2447, 0,1138, 0,3808 e, para o gradiente *boosting*, 0,2247, 0,0957, 0,3653, respectivamente. Os modelos apresentaram, em geral, baixa precisão com melhores resultados do algoritmo gradiente *boosting*. Em trabalhos futuros, pretende-se explorar outros algoritmos para que a compensação da temperatura seja mais eficiente.

Referências

- [1] W. S. Na; J. Baek. A review of the piezoelectric electromechanical impedance based structural health monitoring technique for engineering structures. *Sensors*, Volume 18, n. 5, p. 1307, 2018.
- [2] A. Netto; F. Maciel. *Python Para Data Science: E Machine Learning Descomplicado*. Alta Books, 2021.
- [3] D. Rabelo. *Dissertação: Monitoramento de integridade estrutural baseado na técnica da impedância eletromecânica incorporando compensação do efeito da variação da temperatura* (2014).

¹Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) - Universidade Federal de Uberlândia (UFU), willian.lino@ufu.br.

²Instituto de Matemática e Estatística (IME) -Universidade Federal de Uberlândia (UFU), zewaldemar@ufu.br.

³Departamento de Engenharia Civil - Universidade Federal de Viçosa (UFV) - Campus Rio Paranaíba, simone.ruas@ufv.br.



INSTITUTO DE
MATEMÁTICA
E ESTATÍSTICA



Brasilwood Hotspot Ambiental

