

# XIV SEMANA DE MATEMÁTICA DO PONTAL

ISBN: 978-65-01-07854-0

Organização:  
Tânia Maria Machado de Carvalho



FigShare

Ituiutaba  
2024

# **XIV SEMANA DE MATEMÁTICA**

## **DO PONTAL**

Ituiutaba - MG  
2024

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

XIV Semana de matemática do Pontal [livro eletrônico] / organização Tânia Maria Machado de Carvalho. -- Ituiutaba, MG : Ed. dos Autores, 2024. -- (Anais da semana de matemática do Pontal) PDF

Vários autores.

Bibliografia.

ISBN 978-65-01-07854-0

1. Matemática 2. Matemática - Estudo e ensino  
3. Pesquisa científica I. Carvalho, Tânia Maria Machado de. II. Série.

24-214933

CDD-510

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Matemática 510

Tábata Alves da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9253

DOI:

[10.6084/m9.figshare.26308273](https://doi.org/10.6084/m9.figshare.26308273)

Disponível em:

[https://figshare.com/articles/book/XIV\\_SEMANA\\_DE\\_MATEM\\_TICA\\_DO\\_PONTAL\\_  
pdf/26308273](https://figshare.com/articles/book/XIV_SEMANA_DE_MATEM_TICA_DO_PONTAL_pdf/26308273)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS DO PONTAL

Campus Pontal - Bloco C - Sala 1º piso  
Rua Vinte - 1600 - Bairro Tupã  
Ituiutaba - MG - CEP 38304-402

*Reitor*  
Valder Steffen Júnior

*Vice-reitor*  
Carlos Henrique Martins da Silva

*Pró-Reitor de Graduação*  
Kárem Cristina de Sousa Ribeiro

*Diretora do ICENP - UFU*  
Rosana Maria Nascimento de Assunção

*Coordenador dos Cursos de Matemática do ICENP - UFU*  
Marcelo Gonçalves de Oliveira Vieira



Esta obra está licenciada com uma Licença Creative Commons  
Atribuição-Não Comercial-Compartilhamento Igual 4.0 Internacional





---

## ORGANIZAÇÃO E EDITORAÇÃO

Tânia Maria Machado de Carvalho - ICENP/UFU

## PARECERISTAS

Prof. Dr. Alisson Rafael Aguiar Barbosa - ICENP/UFU  
Prof. Dr. Carlos Eduardo Petronilho Boiago - ICENP/UFU  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira - ICENP/UFU  
Prof. Dr. Edward Luis Araújo - ICENP/UFU  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Evaneide Alves Carneiro - ICENP/UFU  
Prof. Dr. Homero Ghioti da Silva - ICENP/UFU  
Prof. Dr. João Carlos Moreira - ICENP/UFU  
Prof. Dr. José Laércio Doricio - ICENP/UFU  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Milena Almeida Leite Brandão -ICENP/UFU  
Prof. Dr. Moisés Rodrigues Cirilo do Monte - ICENP/UFU  
Prof. Dr. Wallisom da Silva Rosa - ICENP/UFU  
Prof. Dr. Rogério Fernando Pires - ICENP/UFU  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho - ICENP/UFU  
Prof. Dr. Vlademir Marim - ICENP/UFU

## CAPA

Otávio Machado Pinheiro de Carvalho



## COMISSÃO ORGANIZADORA DA XIV SEMAP

Presidente: Prof. Dr. Alisson Rafael Aguiar Barbosa - ICENP/UFU

Prof. Dr. Moisés Rodrigues Cirilo do Monte - (Tesoureiro) - ICENP/UFU

Prof<sup>a</sup>. Dra. Evaneide Alves Carneiro - (Coordenadora da comissão de assuntos gerais) - ICENP/UFU

Prof. Dr. Wallisom da Silva Rosa - (Coordenador da comissão cultural) - ICENP/UFU

Prof<sup>a</sup>. Dra. Milena Almeida Leite Brandão - (Coordenadora da comissão técnica) - ICENP/UFU

Prof<sup>a</sup>. Dra. Vanda Maria Luchesi - (Coordenadora da comissão de divulgação) - ICENP/UFU

Prof. Dr. Edward Luis Araújo - (Colaborador) - ICENP/UFU

Prof. Dr. José Laércio Doricio (Colaborador) - ICENP/UFU

Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira- (Colaborador) - ICENP/UFU

Ana Cláudia Gonçalves Moreira - (Colaboradora) - PET Matemática Pontal;

Denise Aparecida Santos Camargo (Colaboradora) - PIBID - Mat/Quí - ICENP/UFU;

Eduarda Cristina Silva - (Colaboradora) - PET Matemática Pontal - ICENP/UFU;

Eunice de Paula Santos (Colaboradora) - PIBID - Mat/Quí - ICENP/UFU;

Felipe Jun Long Jiang - (Colaborador) - PET Matemática Pontal;

Giovanna Graziely Silva Santos - (Colaboradora) - PET Matemática Pontal - ICENP/UFU;

Henrique Vieira dos Santos Brito - (Colaborador) - PET Matemática Pontal - ICENP/UFU;

Igor Henrique Ferreira da Costa - (Colaborador) - PET Matemática Pontal - ICENP/UFU;

José Antônio Alves Queiroz - (Colaborador) - PET Matemática Pontal - ICENP/UFU;

Matheus Felipe Calu Rocha - (Colaborador) - PET Matemática Pontal - ICENP/UFU;

Paulo Henrique Cavalini Elias Junior - (Colaborador) - PET Matemática Pontal - ICENP/UFU;

Ryan Eduardo Brito Barcelos (Colaborador) - PIBID - Mat/Quí - Pontal - ICENP/UFU;

Rejane Abadia Silva Cintra (Colaboradora) - PIBID - Mat/Quí - ICENP/UFU;

Samara Aparecida Parreira Araujo Silva (Colaboradora) - Voluntária - ICENP/UFU.

Silas Silveira Campos - (Colaborador) - PET Matemática Pontal - ICENP/UFU;

Vitor Daniel Arantes Freitas (Colaborador) - PIBID - Mat/Quí - ICENP/UFU;

## COMISSÃO CIENTÍFICA

Prof<sup>a</sup>. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho (Presidente) - ICENP/UFU

Prof<sup>a</sup>. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira - ICENP/UFU

Prof<sup>a</sup>. Dra. Franciella Marques da Costa - ICENP/UFU

Prof. Dr. Homero Ghioti da Silva - ICENP/UFU

Prof. Dr. João Carlos Moreira - ICENP/UFU

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires - ICENP/UFU

Prof. Dr. Vlademir Marim - ICENP/UFU



---

## ATIVIDADES DA XIV SEMAP

### MESA REDONDA:

Transversalidade, Etnociências e o programa Etnomatemática  
Componentes: Cristiane Coppe e Viviane de Andrade Vieira  
Mediador: Carlos Eduardo Petronilho Boiago

### MINICURSO:

Título: Caiu na rede: recursos digitais como possibilidade metodológica na prática do profissional em Matemática.

Prof. Daniel Alves da Silva

### PALESTRAS:

Título: Robótica na educação

Prof. Ms. Eustáquio de Moraes e alunos da escola Sesi

Título: Divulgação da Revista BEJOM

Prof<sup>a</sup> Dra. Milena Almeida Leite Brandão

Título: O Problema de Dido e a desigualdade isoperimétrica

Prof<sup>a</sup>. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues

Título: Otimização e simulação para tomada de decisão na Logística das Lojas Renner S.A.

Dra. Arianne A. S. Mundim

Título: Sistemas lineares no balanceamento de equações químicas

Prof. Dr. André Ferreira e Pereira



## Reflexões sobre a importância da pesquisa e inovação no ensino superior e os desafios da produção e divulgação científica

Tânia Maria Machado de Carvalho  
Universidade Federal de Uberlândia

A pesquisa científica é o fundamento de toda e qualquer ciência. Segue daí a importância de ações que atuem na solidificação da formação do pesquisador e no preparo e incentivo ao surgimento de novos pesquisadores, fortalecendo as bases para o crescimento da pesquisa. Em particular, faz parte das atribuições da universidade criar ambientes propícios à discussão, desenvolvimento e divulgação de trabalhos científicos.

Na década de 1950, o perfil do Brasil era de uma população predominantemente rural, com poucos ambientes de pesquisa e poucos cientistas que se dedicavam em tempo integral à pesquisa. A cultura de inovação praticamente inexiste e o atraso na prática científica era muito grande. Sessenta anos depois, houve um crescimento substantivo na produção científica brasileira, que correspondia a 3% da produção científica mundial e 55% de toda a produção científica da América Latina. De 2001 para 2011, o Brasil subiu de 17º lugar mundial na quantidade de artigos publicados para 13º lugar. Isto significa que pesquisas estavam sendo publicadas e, principalmente, estavam sendo lidas ao redor do mundo.

É fato que a pesquisa científica tem atualmente grande peso no crescimento científico e tecnológico e, consequentemente, no desenvolvimento do país. No entanto, nos últimos anos, o Brasil experimentou uma queda na produção científica. Em 2022, houve uma redução de 7,4% na comparação com o ano anterior, a primeira queda desde 1996. Esse declínio foi particularmente acentuado nas áreas de ciências agrárias, ciências da natureza, ciências médicas e engenharia e tecnologias.<sup>1</sup>

Entre 2019 e 2022, a produção científica brasileira aprofundou estudos sobre temas estratégicos como biodiversidade, sustentabilidade, enfrentamento da Covid-19 e outras complicações que afetaram a saúde coletiva, física e mental. Essa análise reflete a importância de continuar investindo em ciência e tecnologia para enfrentar desafios nacionais e globais.

Além disso, eventos científicos desempenham um papel crucial nesse contexto, proporcionando um espaço para a congregação de pesquisadores, a divulgação de resultados de pesquisas, e a realização de atividades que atuem na formação, inicial e continuada, de professores. Esses eventos são fundamentais para o avanço do conhecimento, promoção da inovação e fortalecimento da comunidade científica. Além disso, são cruciais para o desenvolvimento de redes de colaboração, que são essenciais para a realização de pesquisas de maior impacto.

<sup>1</sup>Brasil teve queda de 7,4% na produção científica em 2022. Disponível em: <https://www.poder360.com.br/educacao/brasil-teve-queda-de-74-na-producao-cientifica-em-2022/>



---

Em particular, eventos de divulgação voltados para a graduação geram estímulo à ampliação do interesse dos alunos pela pesquisa científica, já que eles são incentivados a desenvolver e compartilhar suas pesquisas. Esse tipo de evento representa um espaço vital para a formação de novos pesquisadores e para o fortalecimento da cultura de inovação e investigação científica na região e no país, visto que, interação entre alunos e pesquisadores experientes facilita a troca de ideias e o surgimento de novas perspectivas, essenciais para o avanço da ciência.

A busca por inovações e a troca de experiências e saberes são essenciais para superar adversidades e continuar avançando na produção acadêmica e científica. Estes foram os princípios que nortearam a criação do evento Semana de Matemática do Pontal (SEMAP), evento anual que já está em sua décima quarta edição e que a cada edição proporciona oportunidades de reflexão sobre a estreita relação entre matemática, tecnologia, ensino e pesquisa. Este evento permite aos participantes o acesso a palestras, minicursos, mesas redondas, atividades culturais e apresentações de trabalhos científicos, além de possibilitar trocas de saberes e o estabelecimento de parcerias, as quais são fundamentais ao desenvolvimento de novas pesquisas.

Ao promover a integração entre diferentes áreas do conhecimento e a colaboração entre pesquisadores, a SEMAP (e em particular, a XIV SEMAP) contribui significativamente para o fortalecimento da ciência e do ensino superior no Brasil, exercendo um papel fundamental na criação de espaços de discussão e desenvolvimento científico na região do Triângulo Mineiro, especialmente diante dos desafios enfrentados no cenário atual da pesquisa no Brasil.

A Semana de Matemática do Pontal (SEMAP) é realizada pelos Cursos de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) desde 2010. A XIV SEMAP foi realizada nos dias 26 e 27 de outubro de 2023. Os trabalhos apresentados no evento e que tiveram parecer favorável do corpo de revisores compõem estes anais. Ao longo da leitura dos trabalhos, é possível perceber a diversidade das pesquisas desenvolvidas.

Os trabalhos que se seguem oferecem contribuições em temas que vão desde propriedades matemáticas fundamentais até aplicações inovadoras que impactam diretamente a sociedade. A publicação desta obra reflete o compromisso e a dedicação dos pesquisadores, tanto professores quanto discentes, em suas respectivas áreas de estudo. Esperamos que os trabalhos aqui apresentados inspirem novas investigações no campo da matemática e áreas afins, evidenciando o contínuo esforço da comunidade científica brasileira em promover o avanço do saber.



## Sumário

### Trabalhos

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 1.  | e: do limite à série. ....   | 9   |
|     | Robert Vieira de Araujo; Victor Gonzalo Lopez Neumann                                |     |
| 2.  | Três limites essenciais. ....  | 19  |
|     | Elmira Rosa Silva de Melo; Fábio José Bertoloto                                      |     |
| 3.  | Sistemas de equações diferenciais e o problema de diluição de soluções. ....         | 29  |
|     | Felipe Farias Alves; Edward Luís de Araújo   |     |
| 4.  | Algumas aplicações da teoria dos grafos. ....  | 38  |
|     | Mariana Teodora Camargos Dias; Milton de Araújo Neto; Evaneide Alves Carneiro        |     |
| 5.  | A relação entre a propriedade foco-diretriz das cônicas e as definições usuais. .... | 47  |
|     | Laurinda Aparecida Ferreira de Moraes; Tânia Maria Machado de Carvalho               |     |
| 6.  | O número de ends de um grupo não enumerável. ....                                    | 57  |
|     | Mateus Fernando Araújo Silva; Francielle Rodrigues de Castro Coelho                  |     |
| 7.  | Funções analíticas e séries de taylor. ....  | 65  |
|     | Lorena Bezerra de Almeida; Elisa Regina dos Santos                                   |     |
| 8.  | A razão cruzada e a razão harmônica na geometria projetiva. ....                     | 75  |
|     | Matheus Felipe Calu Rocha; Tânia Maria Machado de Carvalho                           |     |
| 9.  | O teorema do ponto fixo de Banach e suas aplicações no Google. ....                  | 85  |
|     | Denilson Rodrigues Júnior; Valdair Bonfim  |     |
| 10. | Teorema das quatro cores e a história da demonstração. ....                          | 94  |
|     | Matheus Henrique Silva do Nascimento; Evaneide Alves Carneiro                        |     |
| 11. | Álgebra linear aplicada no controle de um braço robótico. ....                       | 102 |
|     | Vitor Hugo Leite Caetano; Luciana Aparecida Alves                                    |     |
| 12. | O problema da Basiléia. ....   | 110 |
|     | Silas Silveira Campos; Evaneide Alves Carneiro                                       |     |



## XIV Semana de Matemática do Pontal

26 e 27 de outubro de 2023

### e: do limite à série

Robert Vieira de Araujo

Universidade Federal de Uberlândia

robert.araujo@ufu.br

Victor Gonzalo Lopez Neumann

Universidade Federal de Uberlândia

victor.neumann@ufu.br

**Resumo.** Temos como objetivo para este trabalho o estudo do número de Euler, escrito como “e”. Sabemos que e é uma constante de fundamental importância em diversas áreas do conhecimento e considerada uma das mais importantes da matemática, porém pouco se fala sobre suas propriedades durante a graduação. Com isso, se inspirando em [2], estudamos as formas de representação do número de Euler e a função exponencial.. Durante o trabalho utilizamos o número e em sua definição por um curso de cálculo, ou seja,  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  e desctrinchamos conteúdos de sequências e séries para mostrar que podemos escrevê-lo como uma soma infinita, obtemos então que  $e = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)$ . Além disso, mostraremos também que a famosa função exponencial  $e^x$  pode ser também escrita como um limite e uma soma infinita, ou seja,  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ . Este último resultado será utilizado para provar que e é irracional.

**Palavras-chave.** Euler; exponencial; soma.

### 1 Introdução

O número e é uma constante fundamental na matemática, representando a base dos logaritmos naturais. Descoberto no estudo de crescimento exponencial, ele é essencial no cálculo diferencial e integral, aplicando-se em diversas áreas, como física, economia e ciências naturais. Reconhecido como a constante de Euler ou número neperiano, seu papel é crucial na modelagem de fenômenos naturais e processos de crescimento. O Número de Euler, descrito como um número irracional, é definido em [1], p. 119, como  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Em [2], p. 197, temos a demonstração de que este limite existe.

Porém é comum termos mais de uma representação para um valor, como exemplo temos  $1 = 5 - 4 = 9 - 8 = \dots$ .



Com isso é natural se perguntar se esta constante tão importante pode ser escrita de outra forma se não pela sua definição que utiliza limite. A resposta para esta dúvida é sim, podemos reescrevê-la de várias formas como apontam [3] e [4], em particular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)$ .

Neste trabalho então, estudaremos por que essa igualdade é verdadeira, além de provar que  $e$  de fato é um número irracional. Para todas essas conclusões utilizaremos resultados obtidos de [3] e [4].

## 2 Definições e Resultados Preliminares

Apresentaremos, primeiramente, algumas definições preliminares que serão necessárias sobre sequências, séries e convergências.

**Definição 1.** *Dados números reais  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , distintos ou não, chamamos*

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad (1)$$

*de sequência de números reais.*

**Definição 2.** *Dizemos que a sequência  $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$  converge se existe um número  $a$  tal que*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon. \quad (2)$$

*Escrevemos então  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ou  $a_n \rightarrow a$ .*

Caso as condições anteriores não sejam satisfeitas para todo  $a$ , dizemos que a sequência  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  diverge.

**Teorema 1.** *Suponha que a sequência  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  converge para  $a$  e que  $a_n \leq B$  para todo  $n$  suficientemente grande. Então, o limite também satisfaz  $a \leq B$ .*

*Demonstração.* Para esta demonstração, basta mostrarmos que  $a > B$  nos leva à uma contradição.

Para isso, tome  $\varepsilon = a - B > 0$  e usamos a definição anterior. Isso implica que para algum  $n$  suficientemente grande, temos:

$$a - a_n \leq |a_n - a| < \varepsilon = a - B. \quad (3)$$

Então  $a_n > B$ , o que é uma contradição, pois por hipótese  $a_n \leq B$ . Portanto,  $a \leq B$ .  $\square$



**Definição 3.** Uma sequência  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  é uma sequência de Cauchy se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \text{ para todos } n, m \geq n_0. \quad (4)$$

**Teorema 2.** Se a sequência  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  converge, então  $a_n$  é limitada.

$$\exists B \quad \forall n \geq 1 \quad |a_n| \leq B. \quad (5)$$

*Demonstração.* Colocamos  $\varepsilon = 1$ . Por definição de convergência, sabemos que existe um inteiro  $N$  tal que  $|a_n - a| < 1$ , para todo  $n \geq N$ .

Pela desigualdade triangular, temos:  $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ , para todo  $n \geq N$  e a afirmação está provada com  $B = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$ .  $\square$

**Teorema 3.** Considere duas sequências convergentes  $a_n \rightarrow a$  e  $s_n \rightarrow s$ . Então, a soma, o produto e o quociente das duas sequências, tomadas termo a termo, convergem também e temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + s_n) = a + s. \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot s_n) = a \cdot s. \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{s_n} \right) = \frac{a}{s}, \text{ se } s_n \neq 0 \text{ e } s \neq 0. \quad (8)$$

*Demonstração.* Veja [4], p. 175.  $\square$

**Teorema 4** (Bolzano-Weierstrass). Toda sequência limitada admite subsequência convergente.

*Demonstração.* Seja  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  uma sequência limitada. Logo,  $a < a_n < b$ , para todo  $n$ . Considere o conjunto:  $A = \{t \in \mathbb{R} \mid t < a_n \text{ para uma infinidade de índices } n\}$ . É claro que  $A \neq \emptyset$ , pois  $a \in A$ .

Vejamos que  $b$  é cota superior de  $A$ :  $t \in A \Rightarrow t < a_n$  para uma infinidade de índices  $n \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $t < a_{n_0} < b$ . Logo, pelo [4, Theorem 1.12],  $A$  tem supremo, digamos  $m = \sup A \in \mathbb{R}$ .

Seja  $\varepsilon > 0$ . Por um lado:  $m - \varepsilon < m \Rightarrow m - \varepsilon$  não é cota superior de  $A \Rightarrow \exists t \in A$  tal que  $t > m - \varepsilon$ . Portanto existem infinitos índices  $n$  tais que  $m - \varepsilon < t < a_n$ . Por outro lado:  $m + \varepsilon > m = \sup A \Rightarrow m + \varepsilon \notin A$ . Logo,  $a_n > m + \varepsilon$  apenas para uma quantidade finita de índices.

Combinando essas duas informações concluímos que  $\forall \varepsilon > 0$ , existem infinitos índices  $n$  tais que  $m - \varepsilon < a_n < m + \varepsilon$ , isto é,  $|a_n - m| < \varepsilon$ . Aplicando na última



desigualdade  $\varepsilon = 1 > 0$ , existem infinitos índices  $n$  tais que  $|a_n - m| < 1$ . Escolha  $n_1$  tal que  $|a_{n_1} - m| < 1$ .

Aplicando novamente para  $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ , existem infinitos índices  $n$  tais que  $|a_n - m| < \frac{1}{2}$ . Como são infinitos, alguns deles são maiores que  $n_1$ . Escolha  $n_2 > n_1$  tal que  $|a_{n_2} - m| < \frac{1}{2}$ .

Como  $\frac{1}{n} > 0$  para todo  $n$ , o processo continua indefinidamente, e assim escolhemos números naturais  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$  tais que  $|a_{n_k} - m| < \frac{1}{k}$  para todo  $k$ .

Dessa forma,  $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  é uma subsequência de  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  e  $0 \leq |a_{n_k} - m| < \frac{1}{k} \rightarrow 0 \Rightarrow a_{n_k} - m \rightarrow 0$ . Logo,  $a_{n_k} = (a_{n_k} - m) + m \rightarrow 0 + m = m$ .  $\square$

**Lema 1.** Se a sequência  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  é de Cauchy e tem uma subsequência que converge para  $a$ , então  $a_n \rightarrow a$ .

*Demonastração.* Seja  $a_{n,j} \rightarrow a$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todos  $m, n \geq n_0$ . Também existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_{n,j} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $j \geq j_0$ .

Como  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , podemos tomar  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $n_k \geq \max\{n_0, n_{j_0}\}$ . Note que  $k \geq j_0$ . Assim,  $n \geq n_0 \Rightarrow n, n_k \geq n_0$  e  $k \geq j_0$ . Então,

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\therefore a_n \rightarrow a$ .  $\square$

**Teorema 5** (Critério de Cauchy). Uma sequência  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  é convergente  $\Leftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty}$  é de Cauchy.

*Demonastração.* ( $\Rightarrow$ ) Por hipótese,  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  é convergente, digamos  $a_n \rightarrow a$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , com  $\frac{\varepsilon}{2}$  podemos tomar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $n \geq n_0$ . Assim,  $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Então

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| = |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\therefore (a_n)_{n=0}^{\infty}$  é de Cauchy.

( $\Leftarrow$ )  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  é de Cauchy por hipótese. Para  $\varepsilon = 1 > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - a_m| < 1$  para todos  $m, n \geq n_0$ . Em particular,  $|a_{n_0} - a_n| < 1$  para todo  $n \geq n_0$ . Daí,  $|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$  para todo  $n \geq n_0$ .

Tomando  $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$ , segue que  $|a_n| \leq K$  para todo  $n$ . Isso prova que a sequência  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  é limitada, e portanto tem subsequência convergente pelo Teorema 4. Pelo Lema 1 segue que  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  é convergente.  $\square$

**Definição 4.** Dada uma sequência  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ , definimos

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad \dots, \quad s_n = \sum_{j=0}^n a_j. \quad (9)$$



Obtemos assim uma nova sequência  $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ , que é chamada de sequência das somas parciais da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Se a sequência das somas parciais for convergente, dizemos que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é uma série convergente. Neste caso, chamando de  $s$  o limite da sequência das somas parciais, escrevemos

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n a_j = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \text{soma da série.} \quad (10)$$

Se a sequência das somas parciais  $(s_n)_{n=0}^{\infty}$  diverge, dizemos que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é divergente.

**Teorema 6** (Critério de Cauchy). *A série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| = |\sum_{j=n+1}^m a_j| < \varepsilon$  para todos  $m > n \geq n_0$ .*

*Demonstração.* Considere as somas parciais  $s_n = \sum_{j=0}^n a_j$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , e veja que se  $m > n$ , então

$$\begin{aligned} s_m - s_n &= \sum_{j=0}^m a_j - \sum_{j=0}^n a_j = a_0 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m - (a_0 + \cdots + a_n) \\ &= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m = \sum_{j=n+1}^m a_j. \end{aligned} \quad (11)$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} &\Leftrightarrow (s_n)_{n=0}^{\infty} \text{ converge} \Leftrightarrow (s_n)_{n=0}^{\infty} \text{ é de Cauchy} \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |s_m - s_n| < \varepsilon \text{ para todos } m > n \geq n_0. \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left| \sum_{j=n+1}^m a_j \right| < \varepsilon \forall m > n \geq n_0. \end{aligned} \quad (12)$$

□

**Teorema 7.** *Se a série  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  é absolutamente convergente, então todos os seus rearranjos convergem para o mesmo limite.*

*Demonstração.* Veja [4], p 193.

□



Considere o arranjo bidimensional de números reais:

$$\begin{aligned}
 a_{0,0} &+ a_{0,1} + a_{0,2} + \cdots = s_0 \\
 + &+ + + + \\
 a_{1,0} &+ a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots = s_1 \\
 + &+ + + + \\
 a_{2,0} &+ a_{2,1} + a_{2,2} + \cdots = s_2 \\
 + &+ + + + \\
 \vdots &\vdots \vdots \vdots \vdots \\
 = &= = = = \\
 v_0 &+ v_1 + v_2 + \cdots = ?? 
 \end{aligned} \tag{13}$$

Suponha que queiramos resumir todo esse arranjo bidimensional. Existem diversas formas de fazer isso, umas delas é somar os arranjos que possuem o primeiro índice igual, ou seja, somar os elementos  $s_i$  da seguinte maneira  $\sum_{i=0}^{\infty} s_i$ . Analogamente podemos somar também os elementos  $v_j$ , ou seja,  $\sum_{j=0}^{\infty} v_j$ . Outra possibilidade é escrever todos os elementos em um único arranjo linear baseando-se em alguma regra. Por exemplo, podemos começar com o elemento  $a_{0,0}$  e adicionar em seguida os elementos  $a_{i,j}$  tais que  $i + j = 1$ , depois os elementos tais que  $i + j = 2$  e assim sucessivamente. Isso nos da uma soma da forma:

$$a_{0,0} + (a_{1,0} + a_{0,1}) + (a_{2,0} + a_{1,1} + a_{0,2}) + \cdots \tag{14}$$

Assim, denotamos os pares  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(2,0)$ , ... como  $\sigma(0)$ ,  $\sigma(1)$ ,  $\sigma(2)$ , ... de modo que tenhamos  $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ . Definimos então

**Definição 5.** A série  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  é chamada de arranjo linear da série dupla se existe uma bijeção  $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  tal que  $b_k = a_{\sigma(k)}$ .

Temos então a questão: as diferentes formas de somar estes elementos convergem ao mesmo valor? Em outras palavras, uma série dupla é comutativa?

$$s_0 + s_1 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} \right) = v_0 + v_1 + \cdots \tag{15}$$

Em geral, essa igualdade é falsa, veremos então quando é verdadeira.

**Teorema 8.** Suponha para a série dupla (13)

$$\exists B \geq 0 \quad \forall m \geq 0 \quad \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{i,j}| \leq B. \tag{16}$$



Então, todo arranjo linear da série dupla converge para o mesmo valor. Em particular, as séries que aparecem em (15) convergem e são iguais.

*Demonstração.* Seja  $b_0 + b_1 + b_2 + \dots$  um arranjo linear da série dupla (13). A sequência  $\{\sum_{i=0}^n |b_i|\}$  é monótona crescente e limitada por hipótese de modo que  $\sum_{i=0}^\infty |b_i|$ , e portanto  $\sum_{i=0}^\infty b_i$ , converge. Analogamente, conseguimos estabelecer as convergências de  $s_i = \sum_{j=0}^\infty a_{i,j}$  e  $v_j = \sum_{i=0}^\infty a_{i,j}$ .

Como na prova do Teorema 7, aplicaremos o Teorema 6 na série  $\sum_{i=0}^\infty |b_i|$  e obtemos:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 0 \quad \forall n \geq N \quad \forall k \geq 1 \quad |b_{n+1}| + |b_{n+2}| + \dots + |b_{n+k}| < \varepsilon.$$

Para um dado  $\varepsilon > 0$  e um  $N \geq 0$  correspondente escolhemos um inteiro  $M$  de modo que todos os elementos  $b_0, b_1, \dots, b_N$  estão no intervalo  $0 \leq i \leq M$ ,  $0 \leq j \leq M$ . Com essa escolha,  $b_0, b_1, \dots, b_N$  aparecem na soma  $\sum_{i=0}^l b_i$  (para  $l \geq N$ ) bem como em  $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{i,j}$  (para  $m \geq M$  e  $n \geq M$ ).

Daí, temos para  $l \geq N$ ,  $m \geq M$ ,  $n \geq M$ :

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{i,j} - \sum_{i=0}^l b_i \right| \leq |b_{N+1}| + \dots + |b_{N+k}| < \varepsilon, \quad (17)$$

com um  $k$  suficientemente grande. Definimos  $s = \sum_{i=0}^\infty b_i$  e fazemos o limite quando  $l \rightarrow \infty$  e  $n \rightarrow \infty$  em (17). Então, trocamos as somas finitas  $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \leftrightarrow \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m$  e fazemos o limite quando  $l \rightarrow \infty$  e  $m \rightarrow \infty$ . Temos então pelo Teorema 1,

$$\left| \sum_{i=0}^m s_i - s \right| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \left| \sum_{j=0}^n v_j - s \right| \leq \varepsilon. \quad (18)$$

Daí,  $\sum_{i=0}^\infty s_i$  e  $\sum_{j=0}^\infty v_j$  convergem para o mesmo limite  $s$ . □

### 3 Conclusão

Tudo o que fizemos até agora será útil para mostrarmos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

como está indicado em [3], p 29. Para isso utilizaremos o seguinte resultado.

**Teorema 9.** Suponha que todos os elementos da sequência  $(s_{0,j}, s_{1,j}, s_{2,j}, \dots)$  possuem o mesmo sinal e  $|s_{n+1,j}| \geq |s_{n,j}|$  para todos  $n$  e  $j$ . Se existe um limite  $B$  tal que  $\sum_{j=0}^n |s_{n,j}| \leq B$  para todo  $n \geq 0$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} s_{n,j} = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,j}. \quad (19)$$



*Demonstração.* A ideia desta prova é reformular a hipótese de modo que o Teorema 8 seja diretamente aplicável. Anteriormente vimos que as séries podem ser escritas como sequências infinitas considerando as somas parciais (9). Por outro lado, se as somas parciais  $s_0, s_1, \dots$  são dadas, podemos definir únicos elementos  $a_i$  tais que  $\sum_{i=0}^n a_i = s_n$ . Precisamos então, apenas definir  $a_0 = s_0$  e  $a_i = s_i - s_{i-1}$  para  $i \geq 1$ .

Aplicando essa ideia na sequência  $(s_{0,j}, s_{1,j}, \dots)$ , definimos

$$a_{0,j} := s_{0,j}, \quad a_{i,j} := s_{i,j} - s_{i-1,j}, \quad \text{então} \quad \sum_{i=0}^n a_{i,j} = s_{n,j}.$$

Substituindo  $s_{n,j}$  pela expressão acima, (19) se transforma em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_{i,j}. \quad (20)$$

Agora, pelo Teorema 8, podemos mudar a ordem das somas finitas a esquerda da igualdade em (20) e vemos que se torna equivalente à (15). Portanto, precisamos apenas verificar a condição (16).

Por hipótese, os elementos  $a_{0,j}, a_{1,j}, \dots$  possuem o mesmo sinal. Daí, temos

$$\sum_{i=0}^n |a_{i,j}| = |s_{i,j}| \text{ e } \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |a_{i,j}| = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n |a_{i,j}| = \sum_{j=0}^n |s_{i,j}| \leq B.$$

Pelos Teoremas 3 e 8, isso implica (20) e portanto, também implica (19).  $\square$

A partir do apresentado até então e pelo binômio de Newton, temos:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} + \frac{x^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (21)$$

que é uma série que depende do parâmetro  $n$ . Definimos então:

$$s_{n,0} = 1, \quad s_{n,1} = x, \quad s_{n,2} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2}, \quad s_{n,3} = \frac{x^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \dots$$

Para  $x$  fixado, todos os elementos da sequência  $(s_{0,j}, s_{1,j}, \dots)$  possuem o mesmo sinal e  $(|s_{0,j}|, |s_{1,j}|, \dots)$  é crescente monótona. Portanto, nós temos:

$$\sum_{j=0}^n |s_{n,j}| \leq \sum_{j=0}^n \frac{|x|^j}{j!} \leq B,$$

onde  $B$  é uma constante, pois pelo teste da razão, veja [4], p.194,  $\sum_{j=0}^n \frac{|x|^j}{j!}$  converge. Daí,



o Teorema 19 é aplicável e nos fornece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}. \quad (22)$$

Note ainda que:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Mostremos agora que  $e$  é irracional. Utilizaremos uma demonstração simples dada por Fourier em 1815.

Como  $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ , dado  $m \in \mathbb{N}$ , temos

$$0 < m!e - \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m!}{(m+k)!}.$$

Note que  $\binom{m+k}{k} \geq m$ , para todo  $k > 0$  e assim,

$$\frac{(m+k)!}{k!m!} \geq m \Rightarrow \frac{m!}{(m+k)!} \leq \frac{1}{mk!}.$$

Então

$$0 < m!e - \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!} \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1!}{k!} = \frac{e-1}{m}. \quad (23)$$

Antes de provarmos que  $e$  é irracional, provemos o seguinte resultado:

**Lema 2.** *O número neperiano não é um inteiro. Em particular,  $2 < e < 3$ .*

*Demonstração.* Como todos os termos da série  $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$  são maiores que 0, temos que  $e$  é maior que 2. Por outro lado, observe que para  $n = 2$ ,  $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2^1}$ . Provemos que para  $n \geq 3$ , temos  $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ . Para  $n = 3$  claramente é verdade pois  $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} < \frac{1}{4} = \frac{1}{2^{3-1}}$ .

Suponha então que  $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$  para algum  $n$  (hipótese de indução), e mostremos que vale para  $n+1$ . Temos então que  $\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} < \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$ . Como  $n+1 > 2$ , então  $\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{2^n}$  para todo  $n \geq 3$ . Daí,

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Temos então uma série geométrica de razão menor que 1, logo ela converge. Segue então que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$



Portanto,  $e < 3$ . □

### **Teorema 10.** *O número neperiano e é irracional*

*Demonstração.* Suponha então que  $e$  é racional, ou seja, da forma  $\frac{p}{q}$ . Suponha que  $q \geq 2$  (já que  $e \notin \mathbb{Z}$ ). Assim, pelo Lema 2 temos que  $\frac{e-1}{q} < \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ , além disso, da suposição de que  $q \geq 2$  temos  $q! \cdot e = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)! \cdot p$ . Como  $(q-1)!$  e  $p$  são números inteiros, segue que  $q! \cdot e \in \mathbb{Z}$  e portanto, de (23), obtemos que  $q!e - \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$  é um inteiro entre 0 e 1. O que é um absurdo. Logo,  $e$  é irracional. □

### **Agradecimentos**

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, o primeiro autor agradece ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento. O segundo autor agradece a FAPEMIG pelo apoio financeiro dos projetos APQ-00470-22 e RED-00133-21.

### **Referências**

- [1] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo - vol.1**, 5 ed., LTC, 2001.
- [2] MANOR. E. **e: the story of a number**, 1 ed., Princeton University Press, 1994.
- [3] MARQUES, D. **Teoria dos Números Transcendentes**, 1 ed., Rio de Janeiro: Editora SBM - Coleção Textos Universitários, 2013. v. 1.
- [4] HAIRER. E., WANNER. G. **Analysis by Its History**, 1 ed., New York: Springer New York, NY, 2008.



## XIV Semana de Matemática do Pontal

26 e 27 de outubro de 2023



### Três limites essenciais

Elmira Rosa Silva de Melo

Universidade Federal de Uberlândia

elmira.rosa@ufu.br

Fábio José Bertoloto

Universidade Federal de Uberlândia

bertoloto@ufu.br

**Resumo.** O objetivo deste trabalho é apresentar três importantes limites acompanhados de demonstrações. São os seguintes:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Os três limites apresentados são comuns de surgirem em um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral sendo, os dois primeiros essenciais no cálculo de derivação de funções trigonométricas e, o terceiro é útil para a caracterização do logaritmo natural, sendo que este surge em várias aplicações de matemática.

**Palavras-chave:** Limites; confronto; sequência.

### Introdução

Alguns limites em Cálculo Diferencial e Integral recebem o adjetivo “fundamental”. Isso é devido à importância desses limites ao se calcular derivadas e integrais de algumas funções. Vamos dar o foco aos limites:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

O resultado deste último limite é chamado *número de Euler*, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, ou *número de Napier*, em homenagem ao matemático escocês John Napier (1550-1617). Não existe certeza da grafia correta de Napier, que pode ser Neper, Nepair ou Naipper. O nome Napier se afrancesou, convertendo-se em Néper. Fatos históricos sobre Napier podem ser encontrados em [7]. Para as demonstrações dos dois primeiros limites, são necessários conhecimentos sobre algumas identidades trigonométricas e, no caso do limite para obter  $e$ , precisamos utilizar conceitos como os de sequência monótona, ínfimo e supremo.



Vale destacar a importância do Teorema do Confronto nas demonstrações dos três casos. Tal teorema foi utilizado geometricamente pelos matemáticos Arquimedes (287-212 a.C.) e Eudoxo (408-355 a.C.) num esforço de encontrar o valor de  $\pi$ , e foi formulado em termos modernos por Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

## 1 Resultados e Conceitos Necessários

**Definição 1.** (*Límite de funções*) Seja  $f$  uma função real definida em um intervalo aberto, exceto, possivelmente, num ponto  $p$  pertencente a este intervalo. Dizemos que  $f(x)$  tende a  $L$  quando  $x$  tende ao número  $p$  se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Em símbolos,  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ .

Em palavras, dizemos que o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $p$ , é  $L$ .

Na definição anterior, as situações vão ficando interessantes quando consideramos valores de  $\varepsilon$  cada vez menores.

No exemplo a seguir, não utilizaremos da definição propriamente dita, mas veremos uma situação mais prática de como um limite pode ser obtido.

**Exemplo 1.** (*Um limite inicial*)

Consideremos a função

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}.$$

Notamos que seu domínio é  $A = \mathbb{R}^+ - \{2\}$ . O limite pode ser calculado em qualquer  $p \neq 2$ , bastando aplicar o valor de  $p$  na expressão:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

Caso  $p = 2$ , é preciso fazer uma manipulação:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{(x - 2)}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}. \quad (1)$$

Como antes, basta agora substituir 2 na última expressão em (1), obtendo

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

**Observação 1.** É conhecido que

$$|x - p| < \delta \iff -\delta < x - p < \delta \iff p - \delta < x < p + \delta.$$

Podemos pensar em situações onde consideramos apenas  $x < p$  ou  $x > p$ . Nesses casos, temos, respectivamente:

$$p - \delta < x < p, \quad (2)$$

$$p < x < p + \delta. \quad (3)$$



Conforme tendemos  $\delta$  a zero, em [2] dizemos que  $x \rightarrow p^-$  ( $x$  tende a  $p$  pela esquerda) e, em [3] dizemos que  $x \rightarrow p^+$  ( $x$  tende a  $p$  pela direita). Essas situações são denominadas limites laterais. Quando os limites laterais existem e são iguais em um ponto  $p$  relativo a uma função  $f$  como na Definição 1, então o limite existe.

**Observação 2.** Um fato a se destacar é que quando escrevemos  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ , para alguma função real  $f$ , estamos considerando que para algum  $\delta > 0$ , o intervalo  $|x - p| < \delta$  está contido no domínio de  $f$ , exceto, possivelmente, o próprio  $p$ . Fato semelhante vale para limites laterais.

O teorema a seguir também é válido se considerados limites laterais ou limites no infinito, conforme pode ser visto em [3], que definimos a seguir:

**Definição 2. (Limites no infinito)** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $(a, \infty) \subset A$ . Dizemos que  $f(x)$  tende a  $L$  quando  $x$  tende ao infinito se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ e } \delta > a : x > \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em símbolos,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ .

Vale um análogo para  $f: (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 1. (Teorema do Confronto ou Teorema do Sanduíche)**

Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  três funções reais definidas em um intervalo aberto contendo um ponto  $p$ , exceto, possivelmente, o próprio ponto  $p$ . Suponhamos que exista  $r > 0$ , tal que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

para  $0 < |x - p| < r$ . Nessas condições, se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x), \text{ então } \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L.$$

**Demonstração:** Como, por hipótese,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x),$$

dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tais que

$$0 < |x - p| < \delta_1 \leq r \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

e

$$0 < |x - p| < \delta_2 \leq r \implies |h(x) - L| < \varepsilon.$$

Tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , ocorre que

$$0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \text{ e } |h(x) - L| < \varepsilon.$$

ou, de outra forma para  $0 < |x - p| < \delta$ , obtemos que

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \text{ e } L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Disso, a partir da hipótese, podemos escrever para  $0 < |x - p| < \delta$ :

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$



Ou seja, em resumo, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - p| < \delta \implies L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

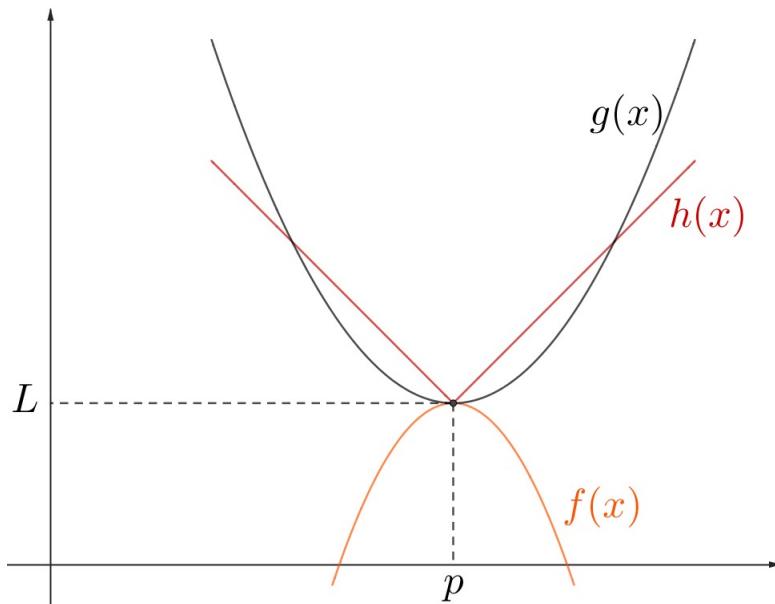
que, por definição, é o mesmo que dizer que

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L.$$

□

Uma figura que ilustra o que ocorre no teorema acima é a seguinte:

Figura 1: Uma situação do Teorema do Confronto



Fonte: Construção feita pelos autores via Geogebra.

Para o que segue, vamos ver algumas definições e resultados necessários para o estudo do limite que resulta no Número de Euler.

**Definição 3.** Dado  $A \subset \mathbb{R}$ , dizemos que:

i)  $A$  é limitado superiormente se existe  $M \geq 0$  tal que

$$\forall x \in A, x \leq M.$$

O número  $M$  é denominado cota superior de  $A$ .

ii) um número  $a \in \mathbb{R}$  é denominado supremo de  $A$  ( $a = \sup A$ ), se é a menor das cotas superiores. Em símbolos,

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A : a - \epsilon \leq x_\epsilon < a.$$

**Definição 4.** Dizemos que uma função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  é crescente, se

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$



**Observação 3.** Há de se destacar que existem algumas variações no conceito de crescimento e decrescimento de funções. No caso, seguimos o que consta em [3, p. 226]. Porém, em [2, p. 207], o termo “crescente” seria trocado pelo termo “não decrescente”.

**Definição 5.** Dizemos que uma função  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada superiormente, se existe  $M > 0$ , sendo este denominado uma cota superior, tal que

$$\forall x \in A, f(x) \leq M.$$

**Proposição 1.** Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ , sejam  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  e  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente. Se  $f$  for limitada superiormente em  $(a, b)$ , então existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L.$$

**Demonstração:** O conjunto  $\{f(x) : x \in (a, b)\}$  é não vazio e limitado superiormente. Logo, admite supremo  $L$ , pois  $\mathbb{R}$  é completo (ver [2, p. 80]). Disso, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $x_1 \in (a, b)$  tal que

$$L - \epsilon < f(x_1) \leq L.$$

Daí, para todo  $x \in (x_1, b)$ , tem-se

$$L - \epsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq L < L + \epsilon.$$

Ou seja,

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon.$$

Pela Definição 1 e, pela observação que antecede o Teorema 1, segue o resultado.

□

**Definição 6.** Uma sequência real  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (ou simplesmente  $(a_n)$ ) é uma função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(n) = a_n$ .

**Exemplo 2.** Importantes exemplos de sequência são a de Fibonacci, em que o termo geral  $a_n$  é tal que  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  e, a Sequência Harmônica  $(1/n)$ .

## 2 Demonstração de que $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$

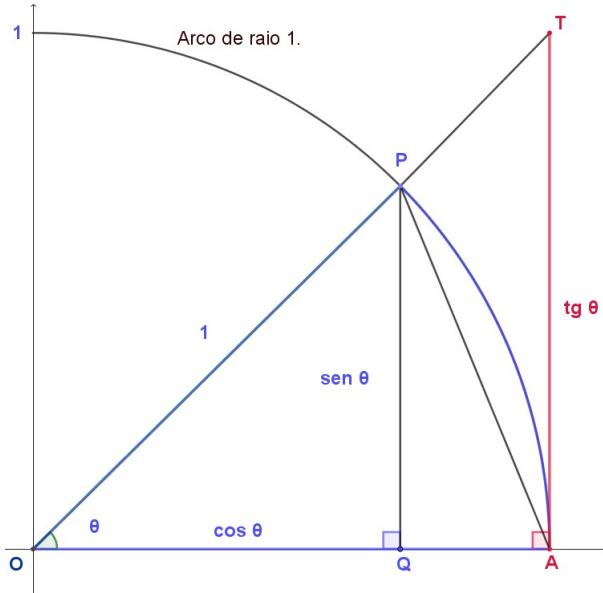
Observando a Figura 2, não é difícil notarmos que:

$$A_1 < A_2 < A_3, \text{ ou seja, } \frac{1}{2}\sin(\theta) < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Além disso, considerando  $\theta$  dado em radianos, é preciso analisar algumas áreas:

- A área do triângulo  $OAP$  que é dada por  $A_1 = \frac{1}{2}(1)(\sin(\theta)) = \frac{1}{2}\sin(\theta)$ ;
- A área do setor circular  $OAP$  que é dada por  $A_2 = \frac{1}{2}\theta(1)^2 = \frac{\theta}{2}$ ;
- A área do triângulo  $OAT$  que é dada por  $A_3 = \frac{1}{2}(1)\tan(\theta) = \frac{\tan(\theta)}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ .

Figura 2: Relações no círculo trigonométrico.



Fonte: Construção feita pelos autores via Geogebra.

Considerando  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  e dividindo as expressões das desigualdades acima por  $\frac{\sin(\theta)}{2}$ , resulta que

$$1 < \frac{\theta}{\sin(\theta)} < \frac{1}{\cos(\theta)} \implies \cos(\theta) < \frac{\sin(\theta)}{\theta} < 1. \quad (4)$$

Das últimas desigualdades, a partir do Teorema 1, como  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} 1 = 1$ , então

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.$$

Agora, para  $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ , como a função cosseno é par, ou seja,  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$  e, a função seno é ímpar, ou seja,  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ , de  $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$ , obtemos de (4) que

$$\cos(-\theta) < \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} < 1 \implies \cos(\theta) < \frac{\sin(\theta)}{\theta} < 1.$$

Disso,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$$

e o resultado segue.  $\square$

Uma outra demonstração utilizando comprimentos (de segmentos e arcos) e não áreas, pode ser encontrado em [4, p. 174].

### 3 Demonstração de que $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta} = 0$

Começamos com o seguinte resultado:

**Lema 1. (Fórmula do arco metade ou arco duplo)**



Dado  $h \in \mathbb{R}$ , é válida a seguinte igualdade:

$$\frac{1 - \cos(h)}{2} = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right).$$

**Prova:** Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , é conhecido que (ver [1], p. 263]):

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Disso,

$$\begin{aligned}\cos(h) &= \cos\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) = \cos\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right) - \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \\ &= \left(1 - \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)\right) - \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \\ &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right).\end{aligned}$$

Da última igualdade, segue o resultado.  $\square$

Com  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta \neq 0$ , segue que:

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos(\theta)}{\theta} &= \frac{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\theta} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &\stackrel{u=\frac{\theta}{2}}{=} \frac{\sin(u)}{u} \sin(u).\end{aligned}$$

Do limite fundamental anteriormente demonstrado, claro que:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} \cdot \sin(u) = 1 \cdot 0 = 0$$

Para a penúltima igualdade, utilizamos de  $\lim_{u \rightarrow 0} \sin(u) = 0$ , fato que pode ser encontrado em [6], p. 68]. Também, utilizamos do fato de que o limite de um produto é o produto dos limites (ver [3], p. 97]), desde que os limites existam.

Uma outra demonstração da validade desse limite fundamental pode ser encontrada em [5], p. 153].

#### 4 Demonstração de que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

Comecemos considerando a sequência cujo termo geral é

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Provemos que tal sequência é convergente e, denominemos tal limite como  $e$ , ou



seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Para provar tal fato, vamos utilizar da Proposição 1. Ou seja, é necessário provar que  $(a_n)$  é limitada e crescente.

(i)  $(a_n)$  é limitada por 3: de fato, pelo Binômio de Newton,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \frac{1}{3!} + \dots + \frac{n!}{n^n} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Disso tudo, podemos observar que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

pois

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{n^{k+1}} = \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{n\dots n}}_{k \text{ termos}} < 1$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ .

Agora,  $2^n \leq (n+1)!$ , para todo  $n \geq 1$ , o que prova-se por indução finita. Disso,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Como  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots)$  é uma progressão geométrica de razão  $1/2$  e termo inicial 1, então

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2.$$

Portanto,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$ , para todo  $n \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(ii)  $(a_n)$  é crescente: Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ , com  $m, n \geq 1$ . Se  $n < m$ , então

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \frac{1}{3!} + \dots + \frac{n!}{n^n} \frac{1}{n!} \quad (5)$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{m(m-1)}{m^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3} \frac{1}{3!} + \dots + \frac{m!}{m^m} \frac{1}{m!} \quad (6)$$

Como  $n < m$ , então



$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{m}$$

$$1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{m}$$

⋮

$$1 - \frac{n-1}{n} < 1 - \frac{n-1}{m}$$

Notemos que fazendo o produto dos  $k$  primeiros termos de cada lado da desigualdade, obtemos:

$$\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{n^k} < \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-k)}{m^k},$$

para  $1 \leq k < n$ .

Multiplicando por  $n/n$  pela esquerda e, por  $m/m$  pela direita, resulta:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{n^{k+1}} < \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k)}{m^{k+1}},$$

que são, justamente, os relativos coeficientes que surgem nas equações (5) e (6).

Disso,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

e, portanto, a sequência  $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$  é crescente.

Como é crescente e limitada, pela Proposição 1, segue que tal sequência converge.

Agora vamos finalizar, verificando o limite em  $\mathbb{R}$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . Aqui utilizaremos do Teorema 1 para limites no infinito.

Dado  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , é fato que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \leq x < n+1.$$

Assim,

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Ainda, de  $n \leq x < n+1$ ,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Colocando termos em evidência na última expressão:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2}.$$

A partir do que foi feito para o caso de  $n$  no lugar de  $x$  e, utilizando o Teorema 1 para o caso em que temos limite no infinito, resulta o desejado, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$



## 5 Conclusão

Apesar de o conteúdo expresso neste trabalho ser muito conhecido, o objetivo principal foi dar destaque aos limites aqui apresentados, agrupando-os em um mesmo texto e apresentando detalhes sobre as respectivas demonstrações. Nos casos dos limites fundamentais relativos às funções seno e cosseno, outras provas possíveis também são indicadas.

## Referências

- [1] CARVALHO, P. C. P., LIMA, E. L., MORGADO A. C. e WAGNER, E. **A Matemática do Ensino Médio**, 10.ed., Rio de Janeiro: SBM - Coleção do Professor de Matemática, 2012. v. 1.
- [2] LIMA, E. L. **Curso de Análise**, 14.ed., Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014. v. 1.
- [3] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 5.ed., Rio de Janeiro: LTC, 2008. v. 1.
- [4] STEWART, J. **Cálculo**. 7.ed., São Paulo: Cengage Learning, 2016. v. 1.
- [5] SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2.ed., São Paulo: Makron Books, 1994. v. 1.
- [6] THOMAS, G. B. **Cálculo**. 12.ed., São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. v. 1.
- [7] COBIANCHI, A. S., **Ologaritmos neperianos: Algumas considerações históricas**. Disponível em: <https://www.revistaespacios.com/a16v37n26/163726e2.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2023.



## XIV Semana de Matemática do Pontal

26 e 27 de outubro de 2023



# Sistemas de equações diferenciais e o problema da diluição de soluções

Felipe Farias Alves

Universidade Federal de Uberlândia

[felipe.farias@ufu.br](mailto:felipe.farias@ufu.br)

Edward Luís de Araújo

Universidade Federal de Uberlândia

[edward@ufu.br](mailto:edward@ufu.br)

**Resumo.** Neste trabalho estudamos a teoria básica sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares, mais especificamente os sistemas lineares de primeira ordem homogêneos e com coeficientes constantes. Apresentamos uma aplicação relacionada ao problema de diluição de soluções que tem uma importância destacada na área da Química. A motivação para o estudo de sistemas de equações diferenciais ordinárias é que a grande maioria dos fenômenos físicos não são modelados por uma única equação diferencial ordinária ou por várias equações diferenciais ordinárias independentes. O problema da diluição de soluções ilustra muito bem este fato, quando consideramos apenas um reservatório, com um determinado volume de água pura, onde é bombeada uma mistura de salmoura (só para fixar a ideia, mas poderia ser qualquer outra solução ou mistura) com uma certa taxa de vazão e a mistura suposta uniforme é bombeada para fora do reservatório com a mesma vazão da entrada, a quantidade de sal no reservatório é modelada por uma única equação diferencial ordinária de primeira ordem, mas quando complicamos um pouquinho o problema, admitindo um segundo reservatório e uma interação entre eles, as quantidades de sal nos dois reservatórios serão modeladas por um sistema de duas equações diferenciais ordinárias.

**Palavras-chave.** Sistemas de equações diferenciais; modelo matemático; diluição de soluções.

## Introdução

As equações diferenciais ordinárias modelam diversos fenômenos da natureza, no entanto nem todos os modelos matemáticos são descritos por uma única equação diferencial ordinária simples, em geral necessitamos de um sistema de equações diferenciais ordinárias para modelar o problema. Neste trabalho abordaremos os sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares e o problema da diluição de soluções.



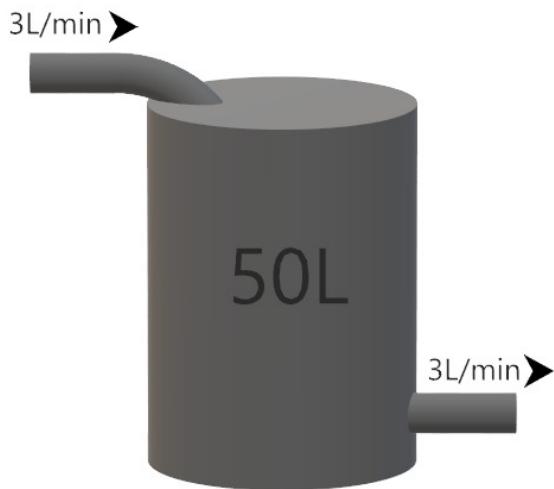
Consideremos o seguinte problema que é ilustrado na figura 1.

**Problema 01:** Um reservatório, contendo 50 litros de água pura, começa a receber uma solução salgada (2 gramas de sal por litro de solução). A uma razão constante de 3 litros/minuto. Admitindo as seguintes hipóteses simplificadoras para o problema como em 2:

(H1) um mecanismo de agitação no fundo do reservatório mantém homogênea a solução que vai sendo formada;

(H2) simultaneamente ao processo de injeção de água salgada, começa-se a retirar do reservatório a solução formada, na razão de 3 litros/minuto.

Figura 1: Modelo unidimensional.



Fonte: compilação do autor.

Se  $x = x(t)$  descreve a quantidade de sal no reservatório no instante  $t$  então o modelo matemático para o fenômeno é descrito por uma única equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3}{50} \cdot x, \quad (1)$$

onde a primeira parcela do lado direito da equação representa a taxa de entrada do sal no reservatório e a segunda parcela do lado direito representa a taxa de saída do sal no reservatório. A solução de (1) com a condição inicial  $x(0) = 0$  (no instante inicial o reservatório só continha água pura) é dada por

$$x(t) = 100 \cdot (1 - e^{-\frac{3}{50}t}).$$

Agora, considerando o seguinte problema:

**Problema 02:** Um reservatório A, contém 50 litros de água em que foram dissolvidas 25 gramas de sal. Um reservatório B, contém 50 litros de água pura. Bombeia-se água pura a uma taxa de 3 litros/minuto no reservatório A, a mistura suposta uniforme resultante é bombeada para o reservatório B a uma taxa de 4 litros/minuto. No reservatório B uma parte da mistura é bombeada para o reservatório A a uma taxa de 1 litro/minuto e



a outra parte é descartada a uma taxa de 3 litros/minuto. Supõe-se que existe um mecanismo de agitação no fundo dos reservatórios A e B que mantém homogêneas as soluções que vão sendo formadas. O processo de bombeação para dentro e fora dos reservatórios A e B são simultâneos.

Se  $x_1 = x_1(t)$  e  $x_2 = x_2(t)$  descrevem respectivamente as quantidades de sal nos reservatórios A e B num instante  $t$ , veremos que o modelo matemático para este fenômeno não pode ser descrito por uma única equação diferencial ordinária ou por duas equações diferenciais ordinárias consideradas isoladamente. Necessitaremos de um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

A metodologia utilizada neste trabalho que é fruto dos estudos iniciais do Projeto de Iniciação Científica: Introdução às Equações Diferenciais e Aplicações foi a revisão bibliográfica de livros clássicos da literatura de equações diferenciais ordinárias, como [1], [2], [4] e [5].

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo simplificado para o fenômeno da diluição de soluções, como o descrito no problema 02, utilizar a teoria dos sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares para determinar uma solução para o modelo.

## 1 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem

Nesta seção apresentaremos a teoria preliminar sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem.

**Definição 1.** Um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é um sistema da forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (2)$$

onde  $f_j : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  para  $j = 1, \dots, n$ , são funções contínuas. Uma solução de (2) é uma  $n$ -upla de funções  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^t$  definidas num intervalo  $I$  que satisfazem todas as equações. Um **problema de valor inicial** consiste em obter uma solução de (2) que satisfaz

$$X(t_0) = X_0, \quad (3)$$

onde  $t_0 \in I$  e o vetor coluna  $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^t$  são dados e  $X(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))^t$ .

**Definição 2.** Quando cada uma das funções  $f_j : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  para  $j = 1, \dots, n$ , em (2) forem lineares nas variáveis dependentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  temos um sistema linear



de equações de primeira ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{array} \right. \quad (4)$$

onde  $a_{ij}$  e  $b_j$  para  $i, j = 1, \dots, n$  são funções contínuas num intervalo  $I$ . Nos referiremos a um sistema de equações como em (4) simplesmente como **sistema linear**. Quando  $b_j(t) = 0 \forall i = j = 1, \dots, n$  e  $\forall t \in I$  o sistema linear será chamado de **homogêneo** e caso contrário de **não homogêneo**.

**Notação matricial:** se  $X' = X'(t)$ ,  $A(t)$ ,  $X = X(t)$  e  $B(t)$  denotam respectivamente as matrizes:

$$X' = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix}, A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

e

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

então o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem (4) pode ser reescrito como

$$X' = A(t)X + B(t). \quad (5)$$

Se o sistema for homogêneo, sua forma matricial será

$$X' = A(t)X. \quad (6)$$

**Problema de valor Inicial:** consiste em obter uma solução de (4) que satisfaça a condição  $X(t_0) = X_0$  ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0, \end{array} \right. \quad (7)$$

onde  $t_0 \in I$  e o vetor coluna  $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^t$  são dados e  $X(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))^t$ .

O próximo teorema é extremamente importante na teoria dos sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem. Uma discussão sobre demonstração do mesmo pode ser encontrada em [1] na pagina 194.



**Teorema 1. (Existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial)**  
Suponha que todos os elementos das matrizes  $A(t)$  e  $B(t)$  em (2) sejam funções contínuas num intervalo  $I$  que contenha o ponto  $t_0$ , então existe uma única solução para o problema de valor inicial (2) no intervalo  $I$ .

Nas próximas definições e teoremas nos concentraremos apenas nos sistemas homogêneos, como definido em (6).

**Definição 3. (Dependência/Independência Linear)** Seja  $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$  um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo (6). Dizemos que o conjunto é linearmente dependente sobre  $\mathbb{R}$  num intervalo  $I$  se existirem  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , escalares reais, não todos nulos, de modo que

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_kX_k = 0 \quad \forall t \in I.$$

Se o conjunto de vetores não for linearmente dependente (L.D.) sobre  $\mathbb{R}$  num intervalo  $I$ , ele será chamado de linearmente independente (L.I.) sobre  $\mathbb{R}$  num intervalo  $I$ .

**Teorema 2. (Propriedades das soluções)** Considere o sistema (6).

(i) Se  $X_1, \dots, X_k$  são soluções de (6) então toda combinação linear dessas soluções também é solução de (6);

(ii) Se  $X_1, \dots, X_k$  são soluções de (6), tais que  $X_j = \phi_j(t) \quad \forall j = 1, \dots, k$ , então

$$\{\phi_1(t), \dots, \phi_k(t)\} \text{ é L.I. sobre } \mathbb{R} \iff \{\phi_1(t_0), \dots, \phi_k(t_0)\} \text{ é L.I. sobre } \mathbb{R},$$

onde  $t_0 \in I$ , ou seja, para que um conjunto de soluções seja linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$  basta verificar que o conjunto dos vetores correspondentes de  $\mathbb{R}^n$  avaliados em  $t_0$  seja linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$ ;

(iii) O espaço  $S$  das soluções de (6) tem dimensão  $n$ .

**Demonstração:** Ver o capítulo 8 de [4].

**Definição 4. (Conjunto fundamental de soluções)** Todo conjunto  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  de  $n$  vetores solução de (6) em um intervalo  $I$ , linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$  é chamado de conjunto fundamental de soluções no intervalo  $I$ .

**Definição 5. (Solução geral de sistemas homogêneos)** Seja  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo (6) em um intervalo  $I$ . A solução geral do sistema no intervalo  $I$  é dada por

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n,$$

onde  $c_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , são constantes reais arbitrárias.

Para finalizar essa seção faremos uma breve discussão sobre os sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares com coeficientes constantes, que são os sistemas como em (6), onde todos os elementos da matriz  $A(t)$  são constantes reais. Dividiremos a análise das soluções deste tipo de sistema em dois casos, considerando a ordem da matriz  $A = A(t)$ .



(i) Se  $n = 1$  o sistema (6) com coeficientes constantes é uma equação diferencial ordinária linear homogênea de primeira ordem, ou seja,  $x' = ax$  cuja solução que satisfaz a condição inicial  $x(t_0) = x_0$  é dada por

$$x(t) = e^{at}x_0.$$

(ii) Se  $n > 1$  devemos esperar que a solução do sistema (6) com coeficientes constantes é da forma  $X(t) = e^{\lambda t}X_0$ ? Caso a resposta seja afirmativa, ainda assim restam os seguintes questionamentos. Qual é o significado do escalar  $\lambda$  e do vetor  $X_0$  e qual a relação de ambos com a matriz  $A$ ?

Para responder às questões do item (ii) suporemos que o sistema (6) com coeficientes constantes admite uma solução da forma  $X(t) = e^{\lambda t}X_0$ . Assim,

$$X'(t) = (e^{\lambda t}X_0)' = \lambda e^{\lambda t}X_0$$

e para que  $X(t)$  seja solução do sistema (6) com coeficientes constantes, devemos ter

$$Ae^{\lambda t}X_0 = \lambda e^{\lambda t}X_0$$

e dividindo ambos os lados da equação anterior pelo escalar não nulo  $e^{\lambda t}$ , obtemos

$$AX_0 = \lambda X_0,$$

o que nos informa que  $\lambda$  é um autovalor da matriz constante  $A$  e  $X_0$  é um autovetor da matriz  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$ .

Assim concluímos que os sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com coeficientes constantes, que são sistemas da forma

$$X'(t) = AX(t), \quad (8)$$

onde  $A$  é uma matriz de ordem  $n$  com coeficientes em  $\mathbb{R}$  tem solução da forma

$$X(t) = e^{\lambda t}X_0, \quad (9)$$

onde  $\lambda$  é um autovalor da matriz  $A$  e  $X_0$  é um autovetor da matriz  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$ .

Um estudo detalhado do conceito de autovalores e autovetores de matrizes pode ser encontrado no capítulo 6 de [3].

## 2 O Problema de Diluição de Soluções

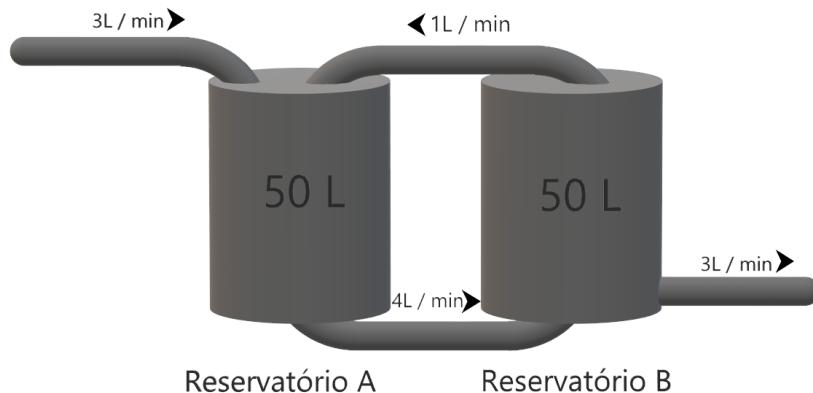
Nesta seção apresentaremos um modelo matemático para o problema da diluição de soluções e utilizaremos a teoria da seção anterior com os cálculos necessários para determinar uma solução para o modelo.

Consideremos o seguinte problema que é ilustrado na figura 2:

**Problema:** Um reservatório A, contém 50 litros de água em que foram dissolvidas 25 gramas de sal. Um reservatório B, contém 50 litros de água pura. Bombeia-se água pura a uma taxa de 3 litros/minuto no reservatório A, a mistura suposta uniforme resultante é bombeada para o reservatório B a uma taxa de 4 litros/minuto. No reservatório B uma parte da mistura é bombeada para o reservatório A a uma taxa de 1 litro/minuto e a

outra parte é descartada a uma taxa de 3 litros/minuto.

Figura 2: Modelo bidimensional.



Fonte: compilação do autor.

Admitindo as seguintes hipóteses simplificadoras para o problema:

(H1) supõe-se que exista um mecanismo de agitação no fundo dos reservatórios A e B que mantém homogêneas as soluções que vão sendo formadas;

(H2) O processo de bombeamento dos líquidos para dentro e fora dos reservatórios A e B são simultâneos;

Determine a quantidade de sal nos reservatórios A e B num instante  $t$ .

**Modelo Matemático:** Sejam  $x_1 = x_1(t)$  e  $x_2 = x_2(t)$  as quantidades de sal respectivamente nos reservatórios A e B. Lembrando do significado da derivada podemos escrever o seguinte modelo para o reservatório A:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \left( \frac{3l}{min} \right) \cdot \left( \frac{0g}{l} \right) + \left( \frac{1l}{min} \right) \cdot \left( \frac{x_2 g}{50l} \right) - \left( \frac{4l}{min} \right) \cdot \left( \frac{x_1 g}{50l} \right) \\ &= -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2, \end{aligned}$$

onde a primeira parcela do lado direito da última equação representa a taxa de saída de sal no reservatório A e a segunda parcela do lado direito da última equação representa a taxa de entrada do sal no reservatório A. Analogamente no reservatório B, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= \left( \frac{4l}{min} \right) \cdot \left( \frac{x_1 g}{50l} \right) - \left( \frac{1l}{min} \right) \cdot \left( \frac{x_2 g}{50l} \right) - \left( \frac{3l}{min} \right) \cdot \left( \frac{x_2 g}{50l} \right) \\ &= \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2. \end{aligned}$$

Assim, obtemos o seguinte problema de valor inicial associado ao sistema de equações



diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares com coeficientes constantes:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = +\frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2 \\ x_1(0) = 25 \\ x_2(0) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Reescrevendo o sistema (10) na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{25} & \frac{1}{50} \\ \frac{2}{25} & -\frac{2}{25} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

ou seja, o problema de valor inicial (10) reescrito como:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

$$\text{onde } X(0) = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Solução:** Repare que por se tratar de um sistema linear de 2 equações de primeira ordem lineares com coeficientes constantes, o problema de valor inicial (10) satisfaz todas as hipóteses do teorema 1 da seção anterior, portanto o problema tem uma única solução. De acordo com (8) e (9) da seção anterior, precisamos obter os autovalores da matriz  $A$  e os respectivos autovetores, para determinar a solução do problema de valor inicial (10).

Realizando os cálculos dos autovalores da matriz  $A$ , obtemos os seguintes autovetores

$$\lambda_1 = -\frac{3}{25} \text{ e } \lambda_2 = -\frac{1}{25}.$$

Um par de autovetores da matriz  $A$  associados respectivamente aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  obtidos foram

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Repare que o conjunto  $\{v_1, v_2\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$ . Portanto, a solução geral do sistema em (10) é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\frac{-3}{25}t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\frac{-1}{25}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$



Impondo as condições iniciais de (10), obtemos

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -\frac{25}{2} e^{\frac{-3}{25}t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{25}{2} e^{\frac{-1}{25}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

### 3 Conclusão

Neste trabalho constatamos a relevância da teoria sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias, num caso particular de sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares e com coeficientes constantes, pois a maioria dos fenômenos físicos não são modelados por uma única equação diferencial ordinária ou por várias equações diferenciais independentes entre si.

### Referências

- [1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [2] FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações diferenciais aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [3] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1987.
- [4] ZILL, D. G.. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- [5] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. v. 1.



## XIV Semana de Matemática do Pontal

26 e 27 de outubro de 2023



### Algumas aplicações da teoria de grafos

Mariana Teodora Camargo Dias

EE Professora Maria de Barros

[maryanacamargos0315@gmail.com](mailto:maryanacamargos0315@gmail.com)

Milton de Araújo Neto

EE Professora Maria de Barros

[miltonnetinho9@gmail.com](mailto:miltonnetinho9@gmail.com)

Evaneide Alves Carneiro

Universidade Federal de Uberlândia

[eva.ac@ufu.br](mailto:eva.ac@ufu.br)

**Resumo.** Este trabalho é um recorte de um projeto de iniciação científica júnior, e apresenta duas aplicações da teoria dos grafos: uma delas relacionada com o Problema do carteiro chinês e a outra com coloração de mapas e o Teorema das Quatro Cores. No estudo de tais problemas, podemos perceber que a teoria dos grafos tem muitas aplicações em problemas práticos, que algumas vezes são de fácil entendimento, mas a teoria que os embasa é bastante sofisticada, e assim podemos perceber a beleza da ciência. Especificamente, lidamos com dois problemas relacionados com a teoria dos grafos: o problema do carteiro chinês e o problema de coloração mínima. Ambos são problemas aplicáveis ao ensino básico, o que não significa que a teoria relacionada seja simples ou trivial.

**Palavras-chave.** Grafos. Rota. Coloração.

### Introdução

Neste trabalho, veremos algumas aplicações da teoria dos grafos. Inicialmente precisamos entender o que é um grafo. Antes de vermos a definição precisa, ilustremos com um exemplo. Uma escola realizou um torneio de basquete. As turmas que participaram do torneio foram: A, B, C, D, E e F. Os jogos realizados na primeira semana foram:

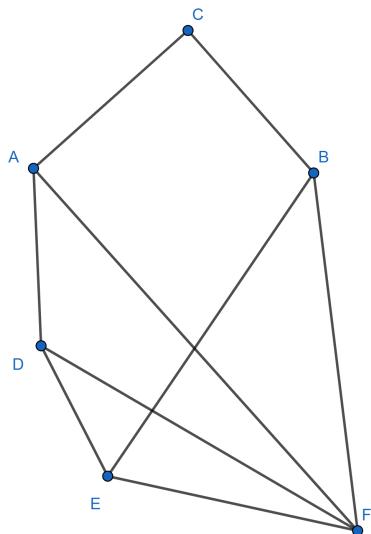
- A jogou com C, D e F;
- B jogou com C, E e F;



- C jogou com A e B;
- D jogou com A, E e F;
- E jogou com B, D e F;
- F jogou com A, B, D e E.

Existe uma maneira de representar essa situação por meio de uma figura (ver figura 1), na qual as turmas serão representadas por pontos e os jogos por linhas.

Figura 1: Jogos realizados no torneio de basquete



Fonte: Elaborada pelos autores no software Geogebra

A estrutura que acabamos de conhecer é um grafo (a definição precisa será vista na próxima seção). Para que um grafo fique bem definido, devemos ter dois conjuntos:

- O conjunto  $V$ , dos **vértices** - no nosso exemplo, o conjunto de turmas.
- O conjunto  $E$ , das **arestas** - no nosso exemplo, são os jogos realizados.

Quando há dois vértices ligados por uma aresta, eles são nomeados de **adjacentes** e a aresta nomeada de **incidente** aos vértices. No nosso exemplo podemos representar o grafo de forma sintetizada como:

$$V = \{A, B, C, D, E, F\},$$



$$E = \{AC, AD, AF, BC, BE, BF, DE, DF, EF\}.$$

Notemos que não é necessário colocar  $ED$  no conjunto de arestas, pois já colocamos  $DE$ . O número de vértices será simbolizado pela letra  $n$  e o número de arestas pela letra  $m$ . No nosso exemplo, temos  $n = 6$  e  $m = 9$ .

O objetivo deste trabalho, cuja metodologia foi a de pesquisa bibliográfica, é apresentar duas aplicações da teoria dos grafos.

## 1 Definições e resultados básicos

### Definição 1.

- i. Um **grafo** é um par ordenado  $G = (V; E)$  formado por um conjunto não vazio  $V$ , cujos elementos são chamados de **vértices** e um conjunto  $E$  cujos elementos são pares não ordenados de vértices e são chamados de **arestas**.
- ii. Os dois vértices que correspondem a uma aresta são chamados de **extremidades** da aresta, e neste caso dizemos que os vértices são **adjacentes**.
- iii. Uma aresta em que as duas extremidades são iguais é chamada de **laço**.
- iv. Quando cada par de vértices de um grafo corresponde a no máximo uma aresta e o grafo não possui laços, dizemos que ele é um **grafo simples**.

No exemplo visto na introdução, é possível verificar que cada turma jogou um número diferente de jogos: A, B, D e E jogaram 3 jogos, C jogou 2 jogos, enquanto F jogou 4 jogos. Desse modo, no desenho, os vértices A, B, D e E têm 3 arestas ligadas a ele, o vértice C tem 2 arestas e F tem 4 arestas ligadas a ele.

O número de vezes que as arestas que estão ligadas ao vértice ou que **incidentem sobre o vértice** é chamado de **grau do vértice** e simbolizado por  $d(v)$ . No exemplo,  $d(A) = 3 = d(B) = d(D) = d(E)$ ,  $d(C) = 2$  e  $d(F) = 4$ . O teorema a seguir é muito importante e tem consequências interessantes no estudo dos grafos.

**Teorema 1** (Teorema de Euler). *A soma dos graus dos vértices de um grafo  $G = (V; E)$  é igual a duas vezes o número de arestas nesse grafo, ou seja:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\#E.$$

**Demonstração.** Para cada vértice do grafo  $G$ , conte seu grau e marque cada uma das arestas que possuem aquele vértice como extremidade. Por um lado, o número de total de marcas que foram utilizadas é exatamente a soma dos graus dos vértices. Por outro lado, cada aresta foi marcada exatamente duas vezes (uma vez para cada uma de suas



extremidades). Assim, o número de marcas utilizadas é exatamente duas vezes o número de arestas.  $\square$

**Corolário 1.** *Em todo grafo, a quantidade de vértices que possuem grau ímpar é um número par.*

**Demonstração.** Seja  $G = (V; E)$  um grafo com  $n$  vértices e sejam  $d_1, \dots, d_n$  os graus desses vértices. Suponhamos que, dentre eles, existem  $r$  números pares e  $s$  números ímpares. Denotemos por  $p_1, \dots, p_r$  os pares e por  $i_1, \dots, i_s$  os ímpares. Pelo Teorema de Euler, temos:

$$2\#E = d_1 + \dots + d_n = (p_1 + \dots + p_r) + (i_1 + \dots + i_s).$$

Portanto,

$$i_1 + \dots + i_s = 2\#E - (p_1 + \dots + p_r).$$

Como o lado direito é um número par, vemos que  $i_1 + \dots + i_s$  é par. Agora para que uma soma de números ímpares resulte em um número par, é necessário que a quantidade de parcelas seja par. Portanto,  $s$  é par, como queríamos.  $\square$

**Definição 2.** *Um caminho de comprimento  $n$ , denotado por  $P_n$ , é um grafo com  $n + 1$  vértices distintos, ordenados em uma sequência, tal que suas arestas ligam vértices consecutivos dessa sequência, isto é:*

$$V(P_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \text{ e } E(P_n) = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\}.$$

*Os vértices  $v_0$  e  $v_n$  são os extremos do caminho. Um **ciclo** é um caminho em que o primeiro e o último vértice coincidem, e nenhum outro vértice é repetido.*

**Definição 3.** *Dizemos que um grafo  $G$  é **euleriano** se há um ciclo em  $G$  que contenha todas as suas arestas.*

## 2 O Problema do Carteiro Chinês

Esse problema é uma importante aplicação do conceito grafo euleriano. Usamos um grafo **valorado**, onde às arestas é associado um **peso**, isto é, uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Este peso pode representar comprimento, custo, tempo, ou o que a modelagem do problema exigir.

O problema do carteiro chinês (quem tem este nome não pela nacionalidade do carteiro, mas do pesquisador que o apresentou) consiste em minimizar o esforço de um carteiro na tarefa de percorrer todas as ruas de uma cidade entregando encomendas. Associamos a esse problema um grafo no qual as arestas são as ruas e os vértices são os

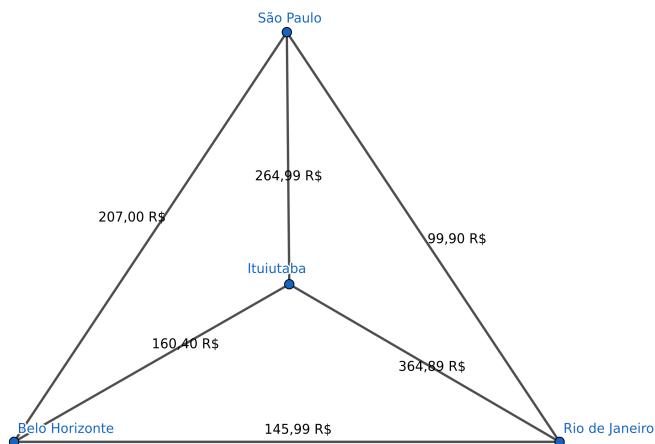


cruzamentos das ruas. Se o grafo em questão for euleriano, o problema está resolvido. Caso não seja, queremos encontrar uma maneira de fazer o carteiro percorrer ruas repetidas de forma econômica. Na referência [1], existem discussões e uma aplicação interessante deste problema.

Agora vamos lidar com um problema simplificado: suponhamos que você queira fazer uma viagem percorrendo as seguintes cidades: Ituiutaba, Rio de Janeiro, São Paulo e Belo Horizonte. Você sairá de Ituiutaba e passará uma única vez por cada local, e finalizará a viagem voltando para Ituiutaba. Considere os valores das viagens entre cada par de cidades (ida ou volta).

Podemos transformar a situação apresentada em um grafo, onde os vértices representam as cidades, e cada aresta representa a viagem entre os locais ligados por suas pontas (ver figura 2). Colocaremos ao lado de cada aresta o valor do custo em reais da viagem entre os dois locais representados por suas pontas. Esses valores foram pesquisados em abril de 2023.

Figura 2: Preços das passagens rodoviárias



Fonte: Elaborada pelos autores no software Geogebra

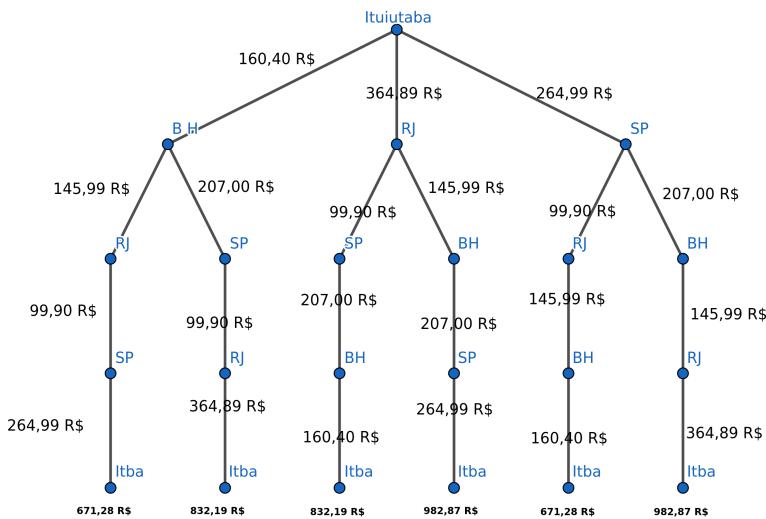
Devido à somatória dos caminhos traçados, dois se destacaram como sendo os mais baratos (Veja a figura 2). São eles:

- Ituiutaba, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Ituiutaba;
- Ituiutaba, São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte e Ituiutaba.

Com o uso do grafo conhecido como árvore, vemos (figura 3) que ele nos mostra as possíveis soluções pelo método da exaustão (testando todas as maneiras possíveis).

Apesar de ser um método cansativo, muitas vezes é o melhor a ser feito. Há métodos mais rápidos, no entanto, eles podem não garantir que seja o mais barato. Isso nos leva

Figura 3: Rotas



Fonte: Elaborada pelos autores no software Geogebra

à pergunta: quando é possível arriscar buscar um método mais rápido, no entanto, não tão confiável? O grafo de árvore pode ser a melhor solução para quem quer economizar, porém leva tempo.

### 3 Teorema das 4 cores

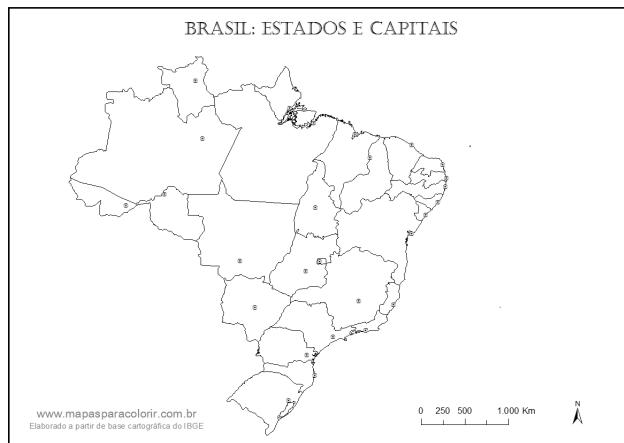
Nesta seção apresentamos as nossas impressões sobre uma das atividades realizadas durante a iniciação científica. Foi nos dada uma atividade lógica pela nossa orientadora com o intuito de colorir três mapas, **com o limite de quatro cores**, porém sem fazer fronteiras com áreas vizinhas da mesma cor. Cada mapa com o nível superior ao outro. A experiência foi otima, a sensação de completar uma atividade que estimula nosso cérebro ao raciocínio lógico é gratificante. A princípio achamos que seria impossível completar o mapa inteiro, em ambos os níveis, porém, com o andamento da atividade, nós percebemos que era possível e mudamos de pensamento. Concluímos todos os níveis com sucesso.

Os mapas coloridos pelos autores foram três: o mapa do Brasil, o das mesorregiões de Minas Gerais e o da Região Metropolitana de Belo Horizonte.

Algumas impressões sobre a atividade:

- No primeiro mapa (figura 4), iniciamos pintando a região Sul, e foi bem fácil colorir.

Figura 4: Mapa do Brasil



Fonte: Site Mapas para colorir ([2])

Figura 5: Mapa das mesorregiões de Minas Gerais



Fonte: Site Mapas para colorir ([2])

Figura 6: Mapa da região metropolitana de Belo Horizonte



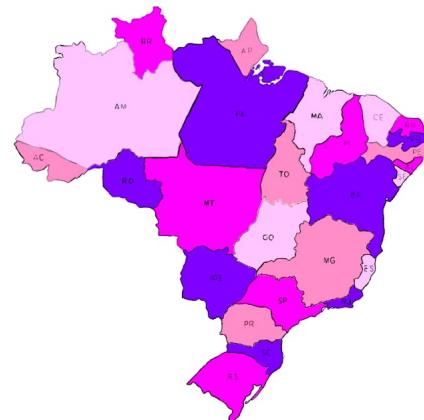
Fonte: Site Mapas para colorir ([2])



- No segundo mapa (mesorregiões de Minas Gerais, figura 5), utilizamos a técnica que consiste em colorir a região que possui mais fronteiras primeiro.
- No mapa três (região metropolitana de Belo Horizonte, figura 6), a primeira tentativa de um dos autores não deu certo, pois a estratégia utilizada foi de começar colorindo pelas bordas. Após entender o erro, a tarefa foi executada com sucesso, iniciando-se a coloração por aquelas regiões que têm maior número de vizinhos.

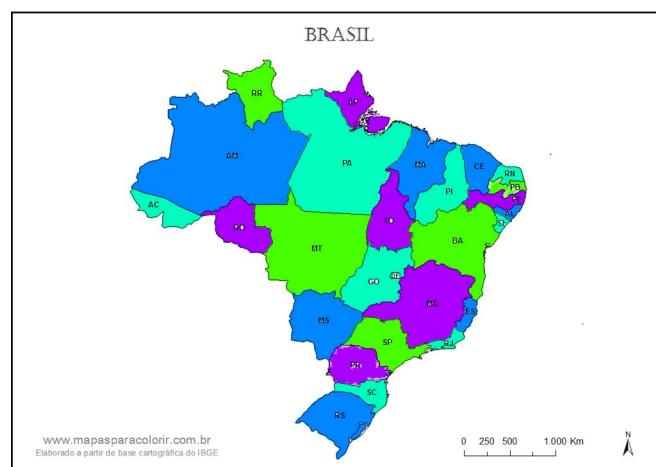
Seguem os mapas do Brasil coloridos.

Figura 7: Mapa do Brasil colorido pelo autor 1



Fonte: Site Mapas para colorir ([2])

Figura 8: Mapa do Brasil colorido pelo autor 2



Fonte: Site Mapas para colorir ([2])



## 4 Considerações finais

Podemos perceber neste estudo que a teoria dos grafos tem muitas aplicações interessantes e algumas vezes até lúdicas. Na atividade de coloração, a primeira impressão é que não seria uma tarefa muito complexa. Usando um raciocínio lógico básico, precisamos apenas traçar uma estratégia inicial.

## Referências

- [1] MORO, M. F. **O problema do carteiro chinês aplicado na otimização de rotas utilizadas na coleta de lixo reciclável: um estudo de caso.** 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2014.
- [2] MAPAS PARA COLORIR. *In:* DIFERENÇA. Disponível em: <https://www.mapasparacolorir.com.br/>. Acesso em: 12 out. 2023.



## XIV Semana de Matemática do Pontal

26 e 27 de outubro de 2023



# A relação entre a propriedade foco-diretriz das cônicas e as definições usuais

Laurinda Aparecida Ferreira de Moraes

Universidade Federal de Uberlândia

[laurindaaafm@gmail.com](mailto:laurindaaafm@gmail.com)

Tânia Maria Machado de Carvalho

Universidade Federal de Uberlândia

[tania.carvalho@ufu.br](mailto:tania.carvalho@ufu.br)

**Resumo.** As cônicas são curvas planas que podem ser obtidas a partir das interseções de um cone de duas folhas com um plano. Tais curvas possuem propriedades extraordinárias, e muitas dessas propriedades podem ser exploradas sem a necessidade de distinguir se o seu traço é uma elipse, parábola ou hipérbole. Essa possibilidade existe graças à propriedade foco-diretriz, apresentada na referência [1]. Nesse trabalho, inicialmente será apresentada uma definição geral para as cônicas (unificada) e posteriormente a definição geral será particularizada para cada uma dessas três cônicas, com o objetivo de mostrar a equivalência dessas definições com as definições usualmente abordadas nos livros de Geometria Analítica, as quais, com exceção da parábola, não se baseiam no conceito de diretriz.

**Palavras-chave.** Cônica; Propriedade foco-diretriz; Definições equivalentes de cônicas.

## Introdução

O estudo das cônicas teve suas raízes na Grécia Antiga, originando-se das tentativas de resolver um dos problemas clássicos da época: a duplicação do cubo (veja [2]). Tal problema consistia em encontrar a aresta de um cubo cujo volume fosse o dobro de um cubo dado. Diversos matemáticos da antiguidade se interessaram por esse problema, dentre eles Menaecmo, que se destaca por buscar a resolução desse desafio por meio da interseção de um plano com um cone, dando origem ao termo *seções cônicas*, ou simplesmente *cônicas*. Por essa razão, Menaecmo é considerado o descobridor das cônicas.

As interseções de um plano com um cone podem resultar em: elipses, hipérboles e parábolas, que são as chamadas *cônicas não degeneradas*, ou ainda um ponto, duas retas concorrentes, uma reta ou uma circunferência, conhecidas como *cônicas degeneradas*.



As definições das cônicas não degeneradas, comumente conhecidas exprimem a relação das distâncias de seus pontos aos focos, no caso das elipses e hipérboles, e, no caso da parábola, a relação das distâncias de seus pontos ao foco e a uma reta fixa chamada *diretriz*. Entretanto, o conceito de diretriz geralmente não é abordado quando se estudam as elipses e hipérboles.

Nesse trabalho, inicialmente será apresentada uma definição geral das cônicas por meio da *propriedade foco-diretriz* (ver [1] e [2]), posteriormente será apresentada uma definição para cada cônica não degenerada, ainda pela mesma propriedade, e, ao final, será evidenciada a equivalência dessas definições com as definições comumente abordadas nos cursos (e livros) de Geometria Analítica. É importante ressaltar ainda, que os resultados apresentados aqui fazem parte do Trabalho de Conclusão de Curso que tem como título *Cônicas não degeneradas do ponto de vista da propriedade foco-diretriz* apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal como requisito parcial para obtenção do título de Bacharelado em Matemática.

## 1 Cônicas definidas a partir da propriedade foco-diretriz

No que se segue, ao longo do texto, todos os objetos geométricos considerados estarão em um mesmo plano.

**Definição 1. (*Cônica*)** Sejam  $d$  uma reta, e  $F$  um ponto, ambos fixos em um plano. Uma *cônica* é o lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano, sujeitos à condição  $\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = e$ , onde  $e$  é uma constante real estritamente maior que zero.

A propriedade satisfeita pelos pontos  $P$  na definição [1] é chamada de *propriedade foco-diretriz*.

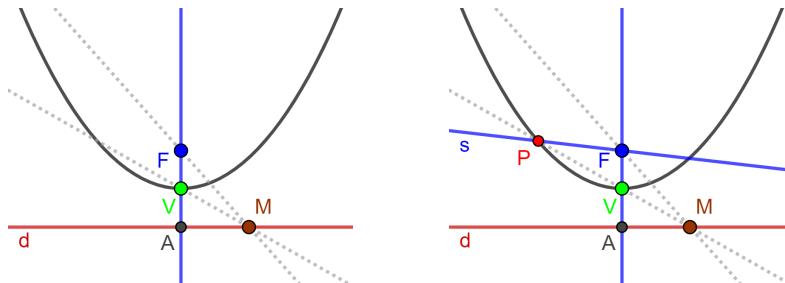
**Definição 2. (*Foco, diretriz e excentricidade*)** O ponto  $F$  da definição [1] é chamado de *foco*, a reta  $d$  é chamada de *diretriz correspondente a  $F$* , e a constante  $e$  é denominada de *excentricidade* da cônica.

**Observação 1.** A reta  $AF$ , a qual passa pelo foco de uma cônica e é perpendicular à sua diretriz é chamada de *eixo da cônica*, ou simplesmente *eixo*.

Ao fixar um ponto  $V$  entre  $A$  e  $F$  ( $A - V - F$ ), com  $A, V$  e  $F$ , colineares e distintos dois a dois, é possível encontrar um ponto  $P$  tal que, tanto  $V$  quanto  $P$ , sejam pontos de uma mesma cônica.

Seja  $V$  um ponto como descrito anteriormente e tome  $M$  um ponto na diretriz  $d$ , distinto de  $A$ . Trace as retas  $MV$  e  $MF$  (ver figura [1], à esquerda). Trace por  $F$  a reta  $s$  simétrica ao eixo com relação à reta  $MF$ . Seja  $P$  o ponto de interseção entre a reta  $s$  e a reta  $MV$  (ver figura [1], à direita).

Figura 1: Construção de um ponto  $P$  da cônica.



Fonte: Elaborada pelas autoras no GeoGebra(2023).

**Afirmiação 1.** Os pontos  $V$  e  $P$  são, ambos, pontos da mesma cônica.

A demonstração da afirmação 1 pode ser encontrada em [4], assim como a demonstração da proposição 1.

**Proposição 1.** Uma reta intersecta uma cônica no máximo em dois pontos.

Os teoremas a seguir (teoremas 1, 2 e 3) são extrínsecos à teoria das cônicas, entretanto, as propriedades expressas por eles serão importantes nas justificativas de alguns resultados aqui apresentados. Suas demonstrações podem ser encontradas na referência [5].

**Teorema 1. (Teorema da desigualdade triangular)** A soma das medidas de dois lados de um triângulo é sempre maior que a medida do outro lado.

**Teorema 2. (Teorema fundamental da proporcionalidade)** Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo e  $r$  uma reta paralela ao lado  $AB$ , tal que  $r$  intersecta os lados  $AC$  e  $BC$  em  $A'$  e  $B'$ , respectivamente. Então,

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'}.$$

**Teorema 3. (Teorema de Tales)** Sejam  $r$  e  $s$  duas retas transversais a um conjunto de três ou mais retas paralelas. A razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer determinados sobre  $r$  é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes determinados sobre  $s$ .

Nas seções seguintes será feita a abordagem das cônicas centrada e não centradas separadamente.

## 2 Cônicas não centradas (parábolas)

**Definição 3. (Parábola)** Sejam  $d$  uma reta e  $F$  um ponto, ambos fixos em um plano. O lugar geométrico dos pontos  $P$  desse plano, sujeitos à condição  $\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = 1$  é chamado de *parábola*.



Note que

$$\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = 1 \Rightarrow D(P, F) = D(P, d).$$

Sejam  $F$  o foco,  $d$  a reta diretriz e  $K$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  a  $d$ . A definição 3 afirma que a parábola é formada por todos os pontos  $P$  tais que  $D(P, F) = D(P, K)$ . Logo, é possível observar a equivalência da definição da parábola pela propriedade foco-diretriz com a definição 4 dessa mesma cônica apresentada nas bibliografias de geometria analítica, dada a seguir.

**Definição 4.** A *parábola* é o lugar geométrico dos pontos  $P$  de um plano que equidistam de um ponto fixo, chamado *foco*, e de uma reta fixa, chamada *diretriz*.

**Proposição 2.** Uma reta paralela ao eixo intersecta a parábola em um único ponto.

**Demonstração.** Suponha que exista  $P'$ , distinto de  $P$ , outro ponto sobre a reta  $KP$ , tal que  $P'$  é um ponto da parábola. Então,

$$FP = PK \text{ e} \quad (1)$$

$$FP' = P'K. \quad (2)$$

Subtraindo  $FP'$  de ambos os lados de (1), tem-se

$$\begin{aligned} FP - FP' &= PK - FP' \xrightarrow{\text{I}} FP - FP' = PK - P'K \\ &\Rightarrow FP - FP' = PP' \\ &\Rightarrow FP = FP' + PP', \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois, os segmentos  $FP$ ,  $FP'$  e  $PP'$  determinam um triângulo e a soma da medida de dois lados de um triângulo é sempre maior que o terceiro lado (teorema I).

Portanto, qualquer reta paralela ao eixo (incluindo o próprio eixo) intersecta a parábola em um único ponto.  $\square$

Segue desse resultado que não é possível definir um segundo ponto  $V'$  sobre o eixo de uma parábola que também pertença a ela. Devido a isso, parábolas são ditas *cônicas não centradas*.

### 3 Cônicas centradas (elipses e hipérboles)

Seja  $A$  o pé da perpendicular baixada do foco  $F$  até a diretriz. No que se segue,  $V$  denotará um ponto sobre o segmento  $AF$ , tal que  $D(V, F) < D(V, A)$  ou  $D(V, F) > D(V, A)$ , ou seja  $\frac{D(V, F)}{D(V, A)} \neq 1$ , nesses dois casos, será mostrado que construindo-se uma



cônica pelo método apresentado anteriormente, obtém-se uma cônica centrada (elipse ou uma hipérbole, respectivamente), tendo  $V$  como um de seus vértices.

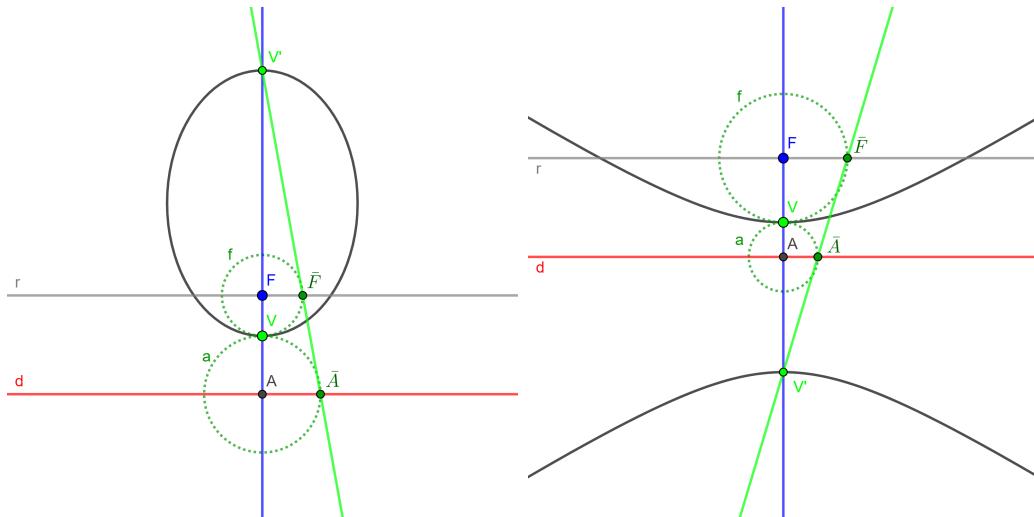
Agora, será apresentado um método para encontrar um segundo vértice de uma *cônica centrada*. Ou seja, busca-se encontrar um ponto  $V'$ , também sobre o eixo da cônica, tal que

$$\frac{D(V', F)}{D(V', d)} = \frac{D(V', F)}{D(V', A)} = \frac{D(V, F)}{D(V, d)} = \frac{D(V, F)}{D(V, A)} = \frac{D(P, F)}{D(P, d)} = e \neq 1.$$

Sejam  $r$  uma reta paralela à diretriz passando por  $F$ ,  $a$  uma circunferência de centro  $A$  e raio  $AV$  e  $f$  outra circunferência de centro  $F$  e raio  $FV$ .

Sejam  $\bar{A}$  e  $\bar{F}$  as interseções de  $a$  com a diretriz e de  $f$  com a reta  $r$ , respectivamente (ver figura 2). Seja ainda  $V'$  a interseção da reta  $\bar{A}\bar{F}$  com o eixo.

Figura 2: Construção de um segundo vértice sobre o eixo da elipse e da hipérbole.



Fonte: Elaborada pelas autoras no GeoGebra (2023).

**Afirmiação 2.** O ponto  $V'$  é um ponto da cônica.

**Demonstração.** Observe que, por construção

$$r_f = VF = F\bar{F} \quad \text{e} \quad r_a = VA = A\bar{A}. \tag{3}$$

Pelo teorema de Tales (teorema 3), tem-se que

$$\frac{V'F}{V'A} = \frac{F\bar{F}}{A\bar{A}} \stackrel{\text{3}}{=} \frac{VF}{VA} = e.$$

Escrevendo em termos de distância, segue que

$$\frac{D(V', F)}{D(V', A)} = \frac{D(V, F)}{D(V, A)} \Rightarrow \frac{D(V', F)}{D(V', d)} = \frac{D(V, F)}{D(V, A)} = e.$$



Portanto,  $V'$  é um ponto da cônica. □

**Definição 5.** Se  $c$  é uma cônica e existe um ponto  $V'$ , distinto de  $V$ , tal que  $V$  e  $V'$  são ambos pontos da cônica que estão sobre o eixo, então o ponto médio do segmento  $VV'$  é denominado *centro da cônica*. Nesse caso, diz-se que a cônica é uma *cônica centrada*.

Mais detalhes sobre a afirmação a seguir podem ser encontrados em [\[I\]](#).

**Afirmiação 3.** Quando a cônica é centrada, a definição por meio da propriedade foco-diretriz pode ser extendida a um segundo foco  $F'$  e a uma segunda diretriz  $d'$ , simétricos a  $F$  e  $d$ , respectivamente, com relação ao centro  $C$ .

### 3.1 Elipse

**Definição 6. (*Elipse*)** Sejam  $d$  uma reta e  $F$  um ponto, ambos fixos em um plano. O lugar geométrico dos pontos  $P$  desse plano, sujeitos à condição  $\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = e$ , onde  $e$  é uma constante real, estritamente maior que zero e menor que um ( $0 < e < 1$ ), é chamado de *elipse*.

O teorema a seguir mostra que a definição [6](#) de uma elipse (em relação à propriedade foco-diretriz) é equivalente à definição usual de elipse adotada nos cursos de Geometria Analítica, a qual relaciona a soma das distâncias de um ponto aos focos com a medida do eixo maior.

**Teorema 4.** Sejam  $F$  e  $F'$  os focos e  $P$  um ponto arbitrário de uma elipse. Então,

$$FP + F'P = VV'.$$

Em outras palavras, a soma das distâncias de um ponto de uma elipse aos seus focos é igual a distância entre as extremidades do eixo maior.

**Demonstração.** Seja  $s$  a reta perpendicular às diretrizes passando por  $P$  e sejam  $K$  e  $K'$  os pontos de interseção da reta  $s$  com as retas  $d$  e  $d'$ , respectivamente. Como  $V$  e  $V'$  são pontos da cônica, têm-se que

$$\frac{FP}{PK} = \frac{FV}{VA} = \frac{FV'}{V'A} = e.$$



Observe também, que

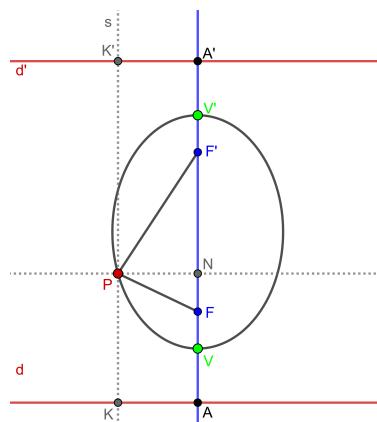
$$\begin{aligned}
 \frac{VV'}{AA'} &= \frac{FV + FV'}{AA'} \Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = \frac{FV}{AA'} \cdot \frac{VA}{VA} + \frac{FV'}{AA'} \cdot \frac{V'A}{V'A} \\
 &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \cdot \frac{VA}{AA'} + e \cdot \frac{V'A}{AA'} \\
 &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \cdot \frac{VA + V'A}{VA + VA'} \\
 &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \cdot \frac{VA + V'A}{VA + V'A} \\
 &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \\
 &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e
 \end{aligned} \tag{4}$$

Seja  $N$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  até o eixo, assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{F'P}{FP} &= \frac{PK'}{PK} = \frac{NA'}{NA} \Rightarrow \frac{F'P}{FP} + \frac{FP}{FP} = \frac{NA'}{NA} + \frac{NA}{NA} \\
 &\Rightarrow \frac{F'P + FP}{FP} = \frac{AA'}{NA} \\
 &\Rightarrow \frac{F'P + FP}{AA'} = \frac{FP}{NA} \\
 &\Rightarrow \frac{F'P + FP}{AA'} = \frac{FP}{PK} \\
 &\Rightarrow \frac{F'P + FP}{AA'} = \frac{FV}{VA} \\
 &\Rightarrow \frac{F'P + FP}{AA'} = \frac{VV'}{AA'} \\
 &\Rightarrow F'P + FP = VV',
 \end{aligned}$$

ou seja, a soma das distâncias de um ponto de uma elipse aos seus focos é igual à distância

Figura 3: Elipse.



Fonte: Elaborada pelas autoras no GeoGebra (2023).

entre as extremidades do eixo maior. □



A propriedade apresentada no teorema anterior é a mesma utilizada na definição usualmente conhecida da elipse, como segue:

**Definição 7.** Elipse é o lugar geométricos dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é igual a uma constante  $r$ , com  $r$  estritamente maior que a distância entre os focos.

### 3.2 Hipérbole

**Definição 8. (*Hipérbole*)** Sejam  $d$  uma reta e  $F$  um ponto, ambos fixos em um plano. O lugar geométrico dos pontos  $P$  desse plano, sujeitos à condição  $\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = e$ , onde  $e > 1$  e  $e$  é uma constante real, é chamado de *hipérbole*.

O teorema 5 mostra que a definição 8 de uma hipérbole (em relação à propriedade foco-diretriz) é equivalente à definição usual de hipérbole adotada nos cursos de Geometria Analítica, a qual relaciona a diferença, em módulo, das distâncias de um ponto aos focos, com a medida do eixo transversal, como segue:

**Definição 9.** *Hipérbole* é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença, em módulo, entre as distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é constante.

**Teorema 5.** Sejam  $P$  um ponto arbitrário de uma hipérbole e  $F$  e  $F'$  os seus focos. Então,

$$|PF - PF'| = VV'.$$

**Demonstração.** Lembre que, como  $V$  e  $V'$  são pontos da cônica, têm-se que

$$\frac{FV}{VA} = \frac{FV'}{V'A} = e.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{VV'}{AA'} &= \frac{FV' - FV}{AA'} \Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = \frac{FV'}{AA'} \cdot \frac{V'A}{V'A} - \frac{FV}{AA'} \cdot \frac{VA}{VA} \\ &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \cdot \frac{V'A - VA}{AA'} \\ &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \cdot \frac{V'A - V'A'}{AA'} \\ &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \cdot \frac{AA'}{AA'} \\ &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \end{aligned}$$



Seja  $s$  uma reta incidente ao ponto  $P$  e perpendicular a diretriz. Sejam ainda  $K$  e  $K'$  os respectivos pontos de interseção da reta  $r$  com as retas  $d$  e  $d'$  (ver figura 4).

$$\frac{PF'}{PK'} = \frac{VF}{VA} \Rightarrow PF' = \frac{PK' \cdot VF}{VA},$$

$$\frac{PF}{PK} = \frac{VF}{VA} \Rightarrow PF = \frac{PK \cdot VF}{VA}.$$

Note que o caso  $PF = PF'$  ocorre se, e somente se,  $P$  é um ponto da reta suporte do eixo conjugado (que é a mediatrix do segmento  $FF'$ ), e isso não pode ocorrer. Logo, suponha, sem perda de generalidade, que  $PF < PF'$ , o que implica que  $PK < PK'$ .

Observe que

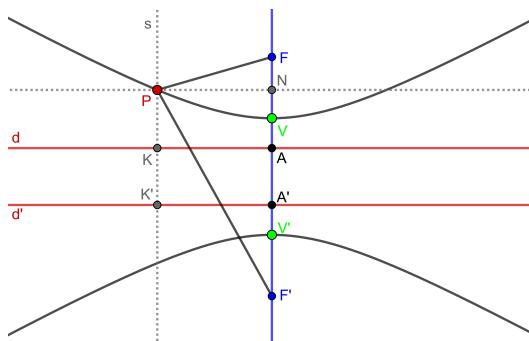
$$PK' = PK + KK'. \quad (5)$$

Daí,

$$\begin{aligned} PF' - PF &= \frac{PK' \cdot VF - PK \cdot VF}{VA} \\ &\stackrel{\text{5}}{=} \frac{(PK + KK') \cdot VF - PK \cdot VF}{VA} \\ &= \frac{PK \cdot VF}{VA} + \frac{KK' \cdot VF}{VA} - \frac{PK \cdot VF}{VA} \\ &\Rightarrow \frac{PF' - PF}{KK'} = \frac{VF}{VA}. \end{aligned}$$

O que implica que

Figura 4: Hipérbole.



Fonte: Elaborada pelas autoras no GeoGebra (2023).

$$\frac{PF' - PF}{KK'} = \frac{VF}{VA} = \frac{VV'}{AA'} = \frac{VV'}{KK'} \Rightarrow PF' - PF = VV'.$$

A necessidade de escolher  $PF' < PF$ , se dá pelo fato de que  $VV'$  é positivo. Entretanto, conhecendo a propriedade apresentada no teorema 5 para generalizá-la, basta calcular a diferença entre  $PF$  e  $PF'$  em módulo. Logo,  $|PF - PF'| = VV'$ .  $\square$



#### 4 Considerações finais

A abordagem da diretriz em relação às elipses e hipérboles é frequentemente omitida nas discussões sobre essas cônicas. Tal conceito costuma ser utilizado apenas nas abordagem envolvendo as parábolas. Entretanto, nesse trabalho, além de evidenciar o conceito de diretriz de uma cônica não degenerada, foi apresentada a equivalência entre as definições das cônicas provenientes da propriedade foco-diretriz e as definições comumente apresentadas nas bibliografias de Geometria Analítica.

#### Referências

- [1] BESANT, W. H. **Conic sections treated geometrically**. 9<sup>a</sup> ed. London: George Bell and Sons, 1895. Disponível em: <https://www.gutenberg.org/files/29913/29913-pdf.pdf>. Acesso em: 28 set. 2022.
- [2] CARVALHO, T. M. M. de. The Dandelin spheres and the method of the conic sections of the greeks. **NEXUS Mathematicæ**, Goiânia, v. 1, p. 30-48, 2018. Disponível em: <https://revistas.ufg.br/nexus/article/view/51354>. Acesso em: 28 set. 2022.
- [3] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5<sup>a</sup> ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [4] MORAIS, L. A. F. de., CARVALHO, T. M. M. de. **A surpreendente relação entre a diretriz de uma cônica e as retas tangentes nas extremidades das cordas focais**. Ituiutaba: Semana de Matemática do Pontal (SEMAP), 2022. Disponível em: [https://figshare.com/articles/book/XIII\\_Semana\\_de\\_Matem\\_tica\\_do\\_Pontal/22796003/3](https://figshare.com/articles/book/XIII_Semana_de_Matem_tica_do_Pontal/22796003/3). Acesso em: 12 out. 2023.
- [5] QUEIROZ, M. L. B., REZENDE, E. Q. F., **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2<sup>a</sup> ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.



## XIV Semana de Matemática do Pontal

26 e 27 de outubro de 2023



### O número de ends de um grupo não enumerável

Mateus Fernando Araújo Silva  
Universidade Federal de Uberlândia  
mateus.fernando@ufu.br

Francielle Rodrigues de Castro Coelho  
Universidade Federal de Uberlândia  
francielle@ufu.br

**Resumo.** A Topologia Algébrica é uma área importante da Matemática na qual se resolvem problemas de Topologia com auxílio da Álgebra. Nesta área a Álgebra Homológica (na qual se estudam módulos e ends de grupos) se faz presente e tem bastante relevância. O conceito de ends de grupos, definido algebricamente por Specker em 1950, está relacionado com a dimensão de um espaço quociente sobre  $\mathbb{Z}_2$ . Isto é, se  $G$  é um grupo, o número de ends de  $G$  é dado por  $\dim_{\mathbb{Z}_2} Q(G)/F(G)$ . Os conjuntos  $F(G)$  e  $Q(G)$  são subespaços vetoriais de  $P(G)$ , onde  $P(G) = \{X \mid X \subset G\}$ ,  $F(G) = \{X \in P(G) \mid X \text{ é finito}\}$ ,  $Q(G) = \{X \in P(G) \mid X + gX \in F(G), \forall g \in G\}$  e a operação “+” representa a operação diferença simétrica entre conjuntos. E ainda  $F(G)$  é um subespaço vetorial de  $Q(G)$ . Neste trabalho, apresentamos conceitos e resultados sobre ends de grupo. Mais especificamente calculamos o número de ends de um grupo não enumerável, quando  $G$  não é um grupo abeliano e no caso em que  $G$  é abeliano.

**Palavras-chave.** Espaços Vetoriais sobre  $\mathbb{Z}_2$ ; ends de grupos; ends de grupos não enumerável.

### Introdução

A teoria de ends de grupos teve sua origem na teoria de ends de espaços topológicos devido a Freudenthal (em 1931) e Hopf (em 1943) que definiu o número de ends,  $e(G)$ , de um grupo finitamente gerado  $G$ , como sendo o número de ends de um espaço conveniente. Depois, em 1950, Specker definiu de forma algébrica o número de ends de um grupo  $G$  qualquer.

A metodologia utilizada neste trabalho foi a revisão bibliográfica das referências [1], [2] e [3].

Neste trabalho, o principal objetivo é calcular o número de ends de um grupo não enumerável.



## 1 Espaços Vetoriais sobre $\mathbb{Z}_2$

**Definição 1.** Um conjunto não vazio  $V$  é um **espaço vetorial sobre um corpo  $K$**  ou um  **$K$ -espaço vetorial** (cujos elementos são denominados vetores), se estiverem definidas as seguintes duas operações:

(A) A cada par  $(u, v)$  de vetores de  $V \times V$  se associa um vetor  $u + v \in V$ , chamado de soma de  $u$  e  $v$ , de modo que:

$$(A_1) (u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V.$$

$$(A_2) u + v = v + u, \forall u, v \in V.$$

(A<sub>3</sub>) Existe um vetor em  $V$ , denominado vetor nulo e denotado por  $0$ , tal que  $0 + v = v$ .

(A<sub>4</sub>) Para cada vetor  $v \in V$  existe um vetor em  $V$ , denotado por  $-v$ , tal que  $v + (-v) = 0$ .

(M) A cada par  $(\alpha, v)$  de vetores de  $K \times V$  se associa um vetor  $\alpha \cdot v \in V$ , denominado multiplicação por escalar de  $\alpha$  por  $v$ , de modo que:

$$(M_1) (\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v), \forall \alpha, \beta \in K \text{ e } \forall v \in V.$$

$$(M_2) 1 \cdot v = v, \forall v \in V \text{ (onde } 1 \text{ é o escalar unidade de } K).$$

$$(M_3) \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \forall \alpha \in K \text{ e } \forall u, v \in V.$$

$$(M_4) (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \forall \alpha, \beta \in K \text{ e } v \in V.$$

Note que as condições A<sub>1</sub> a A<sub>4</sub> nos dizem que  $(V, +)$  é um grupo abeliano.

**Exemplo 1.** Seja  $A \neq \emptyset$  e consideremos  $V = P(A) = \{X | X \subset A\}$ . Podemos verificar que  $(P(A), +)$  é um grupo abeliano (em que todo elemento não nulo tem ordem 2) com a operação diferença simétrica, isto é,

$$X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y) = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y),$$

que iremos indicar sempre aditivamente, ou seja,  $X + Y = X \Delta Y$ .

Considere a multiplicação por escalar  $\mathbb{Z}_2 \times P(A) \rightarrow P(A)$  dada por  $\bar{0} \cdot X = \emptyset$  e  $\bar{1} \cdot X = X$ . Esta multiplicação está bem definida e verifica os demais axiomas da definição de espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ . Assim,  $P(A)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{Z}_2$  para todo  $A \neq \emptyset$ . Em particular, se  $G$  é um grupo,  $P(G)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{Z}_2$ .

Este  $\mathbb{Z}_2$ -espaço vetorial será de fundamental importância na definição de ends de  $G$ .

**Definição 2.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $K$ . Um subconjunto  $W$  de  $V$  é um **subespaço vetorial de  $V$**  se:

(i)  $0 \in W$  (ou  $W \neq \emptyset$ );

(ii)  $v, w \in W$  implica  $av + bw \in W$  para todo  $a, b \in K$ .

**Exemplo 2.** Sejam  $A \neq \emptyset$  e  $F(A) = \{X \in P(A) | X \text{ é finito}\}$ ,  $F(A)$  é um subespaço do  $\mathbb{Z}_2$ -espaço vetorial  $P(A)$  dado no exemplo [1].



- (i) O conjunto vazio é finito (com zero elemento) e assim, pertence a  $F(A)$ .  
(ii)  $X, Y \in F(A)$ , implica  $a \cdot X + b \cdot Y \in F(A)$  para todo  $a, b \in \mathbb{Z}_2$ , pois  
 $a = \bar{0}, b = \bar{0} \implies a \cdot X + b \cdot Y = \emptyset$ .  
 $a = \bar{1}, b = \bar{0} \implies a \cdot X + b \cdot Y = X$ .  
 $a = \bar{0}, b = \bar{1} \implies a \cdot X + b \cdot Y = Y$ .  
 $a = \bar{1}, b = \bar{1} \implies a \cdot X + b \cdot Y = X + Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y) \subset X \cup Y$ .  
Como  $\emptyset, X, Y$  e  $X \cup Y$  são finitos, segue que  $a \cdot X + b \cdot Y \in F(A)$ .

**Observação 1.** No exemplo anterior temos:

- Se  $A$  é finito então  $F(A) = P(A)$ .
- Se  $A$  é infinito então necessariamente  $F(A) \neq P(A)$ , pois  $A \in P(A)$  e  $A \notin F(A)$ .  
Por exemplo,  $\mathbb{Z} \in P(\mathbb{Z})$ , mas  $\mathbb{Z} \notin F(\mathbb{Z})$ .

**Exemplo 3.** Seja  $(G, \cdot)$  um grupo. Considere o  $\mathbb{Z}_2$ -espaço vetorial  $P(G)$ . Seja

$$Q(G) = \{X \in P(G) \mid X + gX \in F(G), \forall g \in G\}.$$

Aqui, dado  $g \in G$ ,  $gX := \{g \cdot x \mid x \in X\}$ , onde “ $\cdot$ ” indica a operação do grupo.

Observemos que:

- $g(X \cup Y) = gX \cup gY$  (claro).
- $g(X \cap Y) = gX \cap gY$ , pois  $g \cdot x = g \cdot y \iff g^{-1} \cdot g \cdot x = g^{-1} \cdot g \cdot y \iff x = y$ .
- $gX^c = (gX)^c$ , pois  $G = gG = g(X \cup X^c) = gX \cup gX^c$  e  $\emptyset = g(X \cap X^c) = gX \cap gX^c$ .
- $g(X + Y) = g[(X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y)] = g(X \cap Y^c) \cup g(X^c \cap Y) = [gX \cap (gY)^c] \cup [(gX)^c \cap gY] = gX + gY$ .

Agora, mostremos que  $Q(G)$  é um subespaço vetorial de  $P(G)$ . De fato,

- $Q(G) \neq \emptyset$ , pois  $\emptyset \in Q(G)$ .
- $\forall X, Y \in Q(G), (X + Y) + g(X + Y) = X + Y + gX + gY = (X + gX) + (Y + gY) \in F(G)$ . Logo,  $X + Y \in Q(G)$ .
- $\forall k \in \mathbb{Z}_2$  e  $\forall X \in Q(G), k \cdot X \in Q(G)$  pois  $\bar{0} \cdot X + g(\bar{0} \cdot X) = \emptyset \in F(G)$  e  $\bar{1} \cdot X + g(\bar{1} \cdot X) = X + gX \in F(G)$ .

**Observação 2.** Se  $X \in F(G)$  então  $X + gX$  será finito, para todo  $g \in G$ . Daí,  $X \in Q(G)$ , isto é,  $F(G) \subset Q(G)$ . Além disso,  $F(G)$  é um subespaço vetorial de  $Q(G)$ .

**Observação 3.** No caso em que  $G$  é finito temos que  $P(G) = F(G) = Q(G)$ .

## 2 Espaços Quocientes

Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $K$  e  $W$  um subespaço de  $V$ . Vamos construir um espaço vetorial chamado de espaço quociente de  $V$  por  $W$  e que será denotado por  $V/W$ .

Primeiro, vamos definir uma relação de equivalência  $\sim$  nos elementos do espaço  $V$ .



Dados  $v_1, v_2 \in V$ , dizemos que  $v_1 \sim v_2$  se  $v_1 - v_2 \in W$ .

Tal relação é uma relação de equivalência em  $V$ .

Para um vetor  $v \in V$ , indicamos por  $\bar{v}$  a sua classe de equivalência, isto é,

$$\bar{v} = \{u \in V \mid u \sim v\}.$$

Se escrevemos  $v + W$  para representar o conjunto de somas  $v + w$ , com  $w \in W$ , isto é,

$$v + W = \{v + w \mid w \in W\},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \{u \in V \mid u \sim v\} \\ &= \{u \in V \mid u - v = w \in W\} \\ &= \{v + w \mid w \in W\} \\ &= v + W.\end{aligned}$$

Esses conjuntos são chamados classes laterais de  $W$  em  $V$ .

**Teorema 1.** Seja  $W$  um subespaço de um espaço vetorial sobre um corpo  $K$ . Então  $V/W := \{v + W \mid v \in V\}$  (conjunto de todas as classes laterais de  $W$  em  $V$ ) é um espaço vetorial sobre  $K$  com as seguintes operações de adição e multiplicação por escalar:

- (i)  $(u + W) + (v + W) = (u + v) + W$ ;
- (ii)  $k(v + W) = kv + W$ , com  $k \in K$ .

**Definição 3.** O espaço vetorial  $V/W$  é chamado **espaço quociente** de  $V$  por  $W$ .

**Observação 4.** Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $W$  um subespaço de  $V$ .

- (i) Se  $W = V$  então  $V/W = V/V = \{0 + V\} = \{V\}$ , pois  $v + V = 0 + V, \forall v \in V$ ;
- (ii) Se  $W = \{0\}$  então  $V/\{0\} = \{v + 0 \mid v \in V\}$  que é isomorfo a  $V$  (pois a aplicação  $v + \{0\} \mapsto v$  é um isomorfismo de  $V/\{0\}$  em  $V$ ).

### 3 Ends de um Grupo

**Definição 4.** Dado um grupo  $G$ , o número de ends de  $G$ , denotado por  $e(G)$ , é definido por  $e(G) := \dim_{\mathbb{Z}_2}(Q(G)/F(G))$ , que denotamos apenas por  $\dim(Q(G)/F(G))$ .

**Exemplo 4.** Seja  $G$  um grupo finito. Neste caso,  $F(G) = Q(G)$  e portanto,  $e(G) = \dim(Q(G)/F(G)) = 0$ .



**Proposição 1.** Seja  $G$  um grupo.

- (i) Se  $G$  é infinito, então  $\emptyset$  e  $\overline{G}$  são elementos distintos em  $Q(G)/F(G)$  e portanto,  $e(G) \geq 1$ .
- (ii)  $G$  é finito se, e somente se,  $e(G) = 0$ .
- (iii)  $e(G) \geq 2$  se, e somente se, existe  $\overline{A} \in Q(G)/F(G)$  tal que  $\overline{A} \neq \emptyset$  e  $\overline{A} \neq \overline{G}$ . Neste caso,  $\emptyset, \overline{A}, \overline{A^c}, \overline{G}$  são elementos distintos em  $Q(G)/F(G)$ .
- (iv)  $e(G) = 2$  se, e somente se, existe  $\overline{A}$  como em (iii) tal que para qualquer  $\overline{B} \in Q(G)/F(G)$ ,  $\overline{B} \neq \emptyset$  e  $\overline{B} \neq \overline{G}$  tem-se  $\overline{B} = \overline{A}$  ou  $\overline{B} = \overline{A^c}$ .

#### 4 Ends de um Grupo não Enumerável

**Lema 1.** Sejam  $G$  um grupo e  $H$  um subconjunto de  $G$  tal que  $H \in Q(G)$  e  $H \notin F(G)$ . Então,

- (i)  $H$  gera  $G$ .
- (ii) Se  $H$  é enumerável, então  $G$  é enumerável.

**Teorema 2.** Seja  $G$  um grupo não enumerável.

- (i) Então  $e(G) = 1$  ou  $e(G) = \infty$ .
- (ii) Se  $G$  também for abeliano, então  $e(G) = 1$ .

*Demonstração.* (i) Como  $G$  não é enumerável, então  $G$  não é finito. Assim,  $e(G) \neq 0$  e portanto  $e(G) \geq 1$ .

Se  $e(G) = 1$ , não há nada a demonstrar. Neste caso, como  $G$  é infinito, teremos só os elementos  $\emptyset$  e  $\overline{G}$  distintos em  $Q(G)/F(G)$ .

Suponhamos  $e(G) > 1$  e mostremos que  $e(G) = \infty$ .

Como  $e(G) > 1$ , pela proposição 1(iii), existe  $\overline{H} \in Q(G)/F(G)$  (portanto,  $H$  é subconjunto de  $G$  com  $H \in Q(G)$ ) tal que  $\overline{H} \neq \emptyset, \overline{H} \neq \overline{G}$  e  $\emptyset, \overline{H}, \overline{H^c}, \overline{G}$  são elementos distintos em  $Q(G)/F(G)$ . Daí,  $H \notin F(G), H \neq G$  e  $H^c \notin F(G)$ .

Agora, provemos a seguinte afirmação:

Para tal  $H$ , existem subconjuntos  $H_1$  e  $H_2$  de  $G$  tais que  $H_1 \cup H_2 = H, H_1 \cap H_2 = \emptyset, H_1, H_2 \in Q(G)$  e são infinitos.

De fato, como  $H$  e  $H^c$  são infinitos, podemos considerar  $C_1 \subset H, C_2 \subset H^c$  tais que  $C_1, C_2$  são enumeráveis infinitos. Então  $C = C_1 \cup C_2$  é enumerável infinito e existe uma bijeção entre  $\mathbb{N}^*$  e  $C$ . Assim,  $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ .

Temos que  $H \cap C^{-1}H^c$  é enumerável pois:

(1) Como  $H \in Q(G), (H \cap gH^c) \cup (H^c \cap gH)$  é finito,  $\forall g \in G$ . Daí,  $H \cap gH^c$  e  $H^c \cap gH$  são finitos para qualquer  $g \in G$ . Em particular, para  $g = c_i^{-1}, H \cap c_i^{-1}H^c$  é finito.

(2)  $H \cap C^{-1}H^c = H \cap \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} \{c_i^{-1}\} \right) H^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} (H \cap c_i^{-1}H^c)$  (isto é,  $H \cap C^{-1}H^c$  é uma reunião enumerável de conjuntos finitos e portanto enumerável).



Por outro lado, pelo lema anterior temos que  $H$  é não enumerável, pois se  $H$  fosse enumerável, como  $H \in Q(G)$  e  $H \notin F(G)$ ,  $G$  seria enumerável por (ii), o que contradiz a hipótese. Portanto,  $H \cap C^{-1}H^c \subset H$  e  $H \cap C^{-1}H^c \neq H$ . Logo, existe  $h_0 \in H$  tal que  $h_0 \notin H \cap C^{-1}H^c$ , ou seja,  $h_0 \notin C^{-1}H^c$  e daí,  $h_0 \notin c_i^{-1}H^c, \forall i \in \mathbb{N}^*$ . Assim,  $h_0 \in (c_i^{-1}H^c)^c = c_i^{-1}H, \forall i \in \mathbb{N}^*$  e então  $h_0 = c_i^{-1}h_i, h_i \in H$ . Daí,  $c_i h_0 = h_i \in H, \forall i \in \mathbb{N}^*$  e portanto,

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \{c_i\} h_0 = Ch_0 \subset H. \quad (1)$$

Tomemos  $H_1 = H \cap Hh_0$  e  $H_2 = H \cap H^c h_0$  e temos que:

- $H_1 \cup H_2 = (H \cap Hh_0) \cup (H \cap H^c h_0) = H \cap (Hh_0 \cup H^c h_0) = H \cap (Hh_0 \cup (Hh_0)^c) = H \cap G = H$ .

- $H_1 \cap H_2 = (H \cap Hh_0) \cap (H \cap H^c h_0) = H \cap (Hh_0 \cap (Hh_0)^c) = H \cap \emptyset = \emptyset$ .

- Dado  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned} H_1 + gH_1 &= H \cap Hh_0 + g(H \cap Hh_0) \\ &= H \cap Hh_0 + (gH \cap gHh_0) \\ &= [(H \cap Hh_0) \cap (gH \cap gHh_0)^c] \cup [(H \cap Hh_0)^c \cap (gH \cap gHh_0)] \\ &= [(H \cap Hh_0) \cap (gH^c \cup gH^c h_0)] \cup [(H^c \cup H^c h_0) \cap (gH \cap gHh_0)] \\ &= [(H \cap Hh_0 \cap gH^c) \cup (H \cap Hh_0 \cap gH^c h_0)] \\ &\quad \cup [(H^c \cap gH \cap gHh_0) \cup (H^c h_0 \cap gH \cap gHh_0)] \\ &= [(H \cap gH^c) \cap Hh_0] \cup [H \cap (H \cap gH^c) h_0] \\ &\quad \cup [(H^c \cap gH) \cap gHh_0] \cup [(H^c \cap gH) h_0 \cap gH] \in F(G) \end{aligned}$$

já que  $H \cap gH^c \in F(G)$  e  $H^c \cap gH \in F(G)$  pois  $H \in Q(G)$ . Portanto,  $H_1 \in Q(G)$ .

$$\begin{aligned} H_2 + gH_2 &= H \cap H^c h_0 + g(H \cap H^c h_0) \\ &= [(H \cap H^c h_0) \cap (gH \cap gH^c h_0)^c] \cup [(H \cap H^c h_0)^c \cap (gH \cap gH^c h_0)] \\ &= [(H \cap H^c h_0) \cap (gH^c \cup gHh_0)] \cup [(H^c \cup Hh_0) \cap (gH \cap gH^c h_0)] \\ &= [(H \cap H^c h_0 \cap gH^c) \cup (H \cap H^c h_0 \cap gHh_0)] \\ &\quad \cup [(H^c \cap gH \cap gH^c h_0) \cup (Hh_0 \cap gH \cap gH^c h_0)] \\ &= [(H \cap gH^c) \cap H^c h_0] \cup [H \cap (H^c \cap gH) h_0] \\ &\quad \cup [(H^c \cap gH) \cap gH^c h_0] \cup [(H \cap gH^c) h_0 \cap gH] \in F(G) \end{aligned}$$

já que  $H \cap gH^c$  e  $H^c \cap gH$  são finitos. Portanto,  $H_2 \in Q(G)$ .

- $H_1$  e  $H_2$  são infinitos. De fato:

Temos que  $C_1 h_0 \subset H_1 = H \cap Hh_0$  pois,

$$C_1 \subset C \implies C_1 h_0 \subset Ch_0 \subset H \text{ (por 1)} \text{ e } C_1 \subset H \implies C_1 h_0 \subset Hh_0.$$



Logo,  $C_1 h_0 \subset H \cap H h_0 = H_1$ .

Agora, temos que  $C_2 h_0 \subset H_2 = H \cap H^c h_0$  pois,

$$C_2 \subset C \implies C_2 h_0 \subset Ch_0 \subset H \text{ (por } \boxed{1} \text{) e } C_2 \subset H^c \implies C_2 h_0 \subset H^c h_0.$$

Assim,  $C_2 h_0 \subset H \cap H^c h_0 = H_2$ .

Portanto, como  $C_1$  e  $C_2$  são infinitos segue que  $H_1$  e  $H_2$  são infinitos.

Com isso, a afirmação inicial está provada.

Agora, observe que:

- $\overline{H_1} \in Q(G)/F(G)$ , pois  $H_1 \in Q(G)$ .
- $\overline{H_1} \neq \emptyset$ , pois  $H_1$  é infinito.
- $\overline{H_1} \neq \overline{L}, \forall L$  com  $H \subset L$  e  $L \in Q(G)$ , pois

$$\overline{H_1} = \overline{L} \implies H_1 + L \in F(G).$$

Mas,  $H_1 + L = (H_1 \cap L^c) \cup ((H_1)^c \cap L)$ . Como  $H_2 \subset H_1^c$  e  $H_2 \subset H \subset L$ , segue que  $H_2 \subset H_1^c \cap L$ . Agora,  $H_1 \subset H$  e  $H \subset L$  implica em  $H_1 \cap L^c = \emptyset$ . Daí,  $H_1 + L = \emptyset \cup (H_1^c \cup L) \supset H_2$  que é infinito. Logo,  $H_1 + L$  é infinito, o que contradiz a afirmação. Portanto,  $\overline{H_1} \neq \overline{L}$ .

Logo,  $\overline{H_1} \in Q(G)/F(G)$  e  $\overline{H_1} \notin \{\emptyset, \overline{G}, \overline{H}, \overline{H_1}\}$  e então os elementos de  $\{\emptyset, \overline{G}, \overline{H}, \overline{H_1}\}$  são distintos.

Note que, como  $\overline{H_1} \neq \emptyset$  e  $\overline{H_1} \neq \overline{G}$ , a afirmação inicial também é verdadeira para  $H_1$  (no lugar de  $H$ ), isto é,  $H_1 = H_{11} \cup H_{12}$  com  $H_{11}, H_{12} \in Q(G)$ ,  $H_{11} \cap H_{12} = \emptyset$  e  $H_{11}, H_{12}$  infinitos. Também conclui-se que  $\overline{H_{11}} \in Q(G)/F(G)$  e  $\overline{H_{11}} \notin \{\emptyset, \overline{G}, \overline{H}, \overline{H_1}\}$  pois  $H_{11}$  é infinito e  $\overline{H_{11}} \neq \overline{L}, \forall L$  com  $H_1 \subset L$ , como vimos anteriormente.

Aplicando sucessivamente o mesmo processo obtemos uma sequência infinita de elementos distintos em  $Q(G)/F(G)$ , ou seja,  $\{\emptyset, \overline{G}, \overline{H}, \overline{H_1}, \overline{H_{11}}, \overline{H_{111}}, \dots\}$ .

Logo, supondo  $e(G) > 1$  obtemos que  $e(G) = \infty$ .

Portanto,  $e(G) = 1$  ou  $e(G) = \infty$ .

(ii) Agora, suponhamos que  $G$  seja abeliano e  $e(G) > 1$ .

Se  $e(G) > 1$  então teríamos como no caso (i), que o conjunto  $H_2$  da construção anterior seria infinito, mas, por outro lado, temos que  $H_2 = H \cap H^c h_0 = H \cap h_0 H^c$  e como  $H \in Q(G)$  segue que  $H_2$  é finito, o que é uma contradição.

Portanto, no caso em que  $G$  é abeliano e não enumerável, teremos necessariamente  $e(G) = 1$ . □

**Exemplo 5.** Se  $G$  é um dos seguintes grupos:  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ,  $(S^1, \cdot)$ ,  $(S^1 \times S^1, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}[t], +)$ , onde  $\mathbb{R}[t]$  é o anel dos polinômios com coeficientes em  $\mathbb{R}$ , então  $e(G) = 1$  pois todos os grupos são abelianos não enumeráveis.

**Exemplo 6.**  $e(S_3 \times \mathbb{R}) = 1$  ou  $\infty$  pois  $S_3 \times \mathbb{R}$  não é um grupo abeliano e é não enumerável (aqui  $S_3$  indica o grupo das bijeções de  $\{1, 2, 3\}$ ).



## Referências

- [1] SANTOS, A.P. **Cohomologia de grupos e invariantes algébricos**. 2006. 145 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista ?Julio de Mesquita Filho?, São José do Rio Preto, 2006.
- [2] SCOTT, G. P.; WALL, T. Topological methods in group theory. In: WALL, C. T. C. (ed.). **Homological Group Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1972. p. 167-174. (London Mathematical Society Lecture Note Series, 36).
- [3] SPECKER, F. Endenverbande von raume und gruppen. **Mathematische Annalen**, v. 122, n. 2, p. 167-174, 1950.



## XIV Semana de Matemática do Pontal

26 e 27 de outubro de 2023

### Funções Analíticas e Séries de Taylor

Lorena Bezerra de Almeida  
Universidade Federal de Uberlândia  
lore.lo2310@ufu.br

Elisa Regina dos Santos  
Universidade Federal de Uberlândia  
elisars@ufu.br

**Resumo.** O presente trabalho tem por objetivo introduzir séries de potências no conjunto dos complexos e estudar sua relação com as funções analíticas. Primeiramente, é importante notar que as séries de potências, em particular as Séries de Taylor, possuem diversas aplicações interessantes tanto na matemática pura como na matemática aplicada. Uma das principais é a aproximação de funções por polinômios. Cientes da importância das Séries de Taylor e com o objetivo de relacionar tais séries com as funções analíticas, iniciaremos a primeira seção definindo essas funções, bem como a derivabilidade no conjunto dos complexos. Em seguida, enunciaremos alguns teoremas sobre funções analíticas que serão importantes no desenvolvimento deste trabalho. Para finalizar a primeira seção, vamos definir séries de funções complexas, seus tipos de convergência, séries de potências, e enunciaremos alguns teoremas fundamentais relacionados a essas séries. Na segunda seção, demonstraremos os teoremas mais importantes deste trabalho, os quais caracterizam as funções analíticas como aquelas que podem ser desenvolvidas em série de potências, dando destaque ao Teorema da Série de Taylor. Por fim, faremos alguns exemplos que mostram, na prática, como é possível desenvolver uma função analítica em séries de potências.

**Palavras-chave.** Funções analíticas; séries de Taylor; séries de potências.

### Introdução

A análise de funções através da expressão em séries de potências representa uma ferramenta fundamental no estudo aprofundado do comportamento das funções analíticas, gerando diversas aplicações. Entre elas, uma das mais importantes e utilizadas em Cálculo Numérico é a aproximação de funções por polinômios. Segundo [1], outras aplicações conhecidas são: convergência de métodos iterativos, estudo de máximos e mínimos, e soluções de equações diferenciais ordinárias.



Dada a importância do desenvolvimento de funções analíticas como séries de potências, este trabalho se dedica à caracterização meticulosa de tais funções por meio dessas séries, explorando a riqueza das expansões infinitas. Em particular, evidenciamos o renomado Teorema da Série de Taylor, uma peça essencial na teoria das séries de potências, que fornece uma representação única e poderosa das funções analíticas.

Ao longo deste estudo, desvendaremos os aspectos teóricos que fundamentam essas técnicas analíticas, proporcionando uma visão mais clara das propriedades e comportamentos das funções no domínio da análise matemática.

As principais referências utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho foram [2] e [3].

## 1 Definições e Resultados Preliminares

Veremos, primeiramente, algumas definições e resultados preliminares sobre funções analíticas. Mas antes de seguirmos é importante ressaltar que as noções de limite, continuidade, derivabilidade, integral, e convergência de sequências e séries numéricas e de funções no caso complexo são análogas as do caso real.

**Definição 1.1.** *Sejam  $f$  uma função cujo domínio é um conjunto aberto e conexo  $R$ , e  $z_0 \in R$ . Dizemos que  $f$  é **derivável** no ponto  $z_0$  se existe o limite*

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

**Definição 1.2.** *Dizemos que uma função  $f$  é **analítica** em um conjunto aberto e conexo  $R$  se ela é derivável em cada ponto de  $R$ ; e  $f$  é **analítica em um ponto**  $z_0$  se  $f$  é analítica em um conjunto aberto e conexo contendo  $z_0$ .*

**Teorema 1.3** (Fórmula Integral de Cauchy). *Seja  $f$  uma função analítica em um conjunto aberto, conexo e simplesmente conexo  $R$ . Então,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

onde  $z \in R$  e  $C$  é qualquer contorno fechado simples de  $R$ , que envolve  $z$  uma vez no sentido positivo e cujo interior está todo contido em  $R$ .

*Demonstração.* Veja [2], Teorema 3.15. □

**Teorema 1.4.** *Uma função analítica em um conjunto aberto e conexo  $R$  possui derivadas de todas as ordens, as quais, por sua vez, são também analíticas em  $R$  e podem ser obtidas da Fórmula Integral de Cauchy por derivação sob o sinal de integração, ou seja,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$



onde  $z \in R$  e  $C$  é um contorno fechado simples de  $R$ , que envolve  $z$  uma vez no sentido positivo e cujo interior está todo contido em  $R$ .

*Demonstração.* Veja [2], Teoremas 3.16 e 3.17. □

Para finalizar esta seção, vejamos a definição e alguns resultados importantes sobre séries de potências e séries de funções complexas.

**Definição 1.5.** Uma *série de funções* é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots,$$

cujos termos  $f_n$  são funções de uma variável complexa  $z$ , todas com o mesmo domínio.

**Definição 1.6.** Dizemos que a série de funções

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{1}$$

é **convergente** em um conjunto  $D$  se, dado  $\varepsilon > 0$ , para cada  $z \in D$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies |s_n(z) - s(z)| < \varepsilon,$$

onde

$$s_n(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z).$$

Dizemos que a série (1) **converge uniformemente** em  $D$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  satisfazendo

$$n \geq n_0 \implies |s_n(z) - s(z)| < \varepsilon, \forall z \in D.$$

Dizemos ainda que a série (1) **converge absolutamente** em  $D$  se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$$

for convergente em  $D$ .

**Teorema 1.7** (Teste de Weierstrass). Sejam  $\sum M_n$  uma série numérica convergente e  $(f_n(z))$  uma sequência de funções definidas num conjunto  $D$ , satisfazendo a condição  $|f_n(z)| \leq M_n$ , para todo  $n$  e todo  $z \in D$ . Então a série  $\sum f_n(z)$  converge uniformemente em  $D$ .

*Demonstração.* Veja [2], Teorema 4.4. □



**Teorema 1.8.** *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad (2)$$

*uma série de funções contínuas, uniformemente convergente num conjunto  $D$ . Então:*

- a)  $f$  é contínua em  $D$ ;
- b) para um contorno  $C \subset D$ , a integral de  $f$  sobre  $C$  pode ser obtida por integração de (2) termo a termo;
- c) se  $D$  é um conjunto aberto, conexo e simplesmente conexo no qual as funções  $f_n$  são analíticas, então  $f$  também é analítica em  $D$ , e suas derivadas podem ser obtidas derivando a série (2) termo a termo um número arbitrário de vezes.

*Demonstração.* Veja [2], Teorema 4.6. □

**Definição 1.9.** *Uma série de potências é uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

*onde  $z$  é uma variável complexa, e  $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$  são constantes. Os números  $a_n$  são chamados de **coeficientes** da série. onde  $z$  é uma variável complexa,  $a_n$  são constantes complexas chamadas **coeficientes** da série e  $z_0$  também é uma constante complexa.*

**Teorema 1.10.** *A toda série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

*está associado um número não negativo  $r$  tal que a série converge absolutamente em  $|z - z_0| < r$  e uniformemente em qualquer disco  $|z - z_0| \leq r' < r$ . Ela diverge em  $|z - z_0| > r$ . O número  $r$ , que pode assumir os valores  $r = 0$  e  $r = \infty$ , é chamado **raio de convergência** da série; e o disco de raio  $r$  e centro  $z_0$ , o seu **disco de convergência**.*

*Demonstração.* Veja [2], Teorema 4.11. □

**Teorema 1.11** (Identidade das séries de potências). *Sejam*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

*duas séries de potências, convergentes num disco  $|z - z_0| < r$ . Seja  $z_n$  uma sequência de pontos distintos, que converge para  $z_0$ , e tal que as duas séries coincidem nos pontos dessa sequência. Então  $a_n = b_n$  para todo  $n$ . Em particular, essa conclusão é válida se as*



séries coincidem num disco de centro  $z_0$ , ou mesmo num segmento, ou pequeno arco com extremidade em  $z_0$ .

*Demonstração.* Veja [2], Teorema 4.15. □

## 2 Caracterização de Funções Analíticas em Série de Potências

Nesta seção, demonstraremos que as funções analíticas podem ser caracterizadas por meio de séries de potências. Inicialmente, vejamos que toda série de potências representa uma função analítica em seu disco de convergência.

**Teorema 2.1.** *Toda série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (3)$$

representa uma função analítica  $f$  no seu disco de convergência  $|z - z_0| < r$ . Ela pode ser derivada termo a termo um número arbitrário de vezes; as séries assim obtidas possuem o mesmo raio de convergência  $r$  da série original, e representam as derivadas da função  $f$ .

*Demonstração.* Primeiramente, vamos mostrar que toda série de potências (3) representa uma função analítica  $f$  em seu disco de convergência  $|z - z_0| < r$ , e que  $f$  pode ser derivada termo a termo um número arbitrário de vezes.

Seja  $z$  no disco  $|z - z_0| < r$ . Então existe  $r_1 < r$  tal que  $|z - z_0| < r_1$ , como ilustra a Figura 1(a). Pelo Teorema 1.10, a série (3) converge uniformemente no disco  $|z - z_0| < r_1$ . Daí, pelo item c) do Teorema 1.8, essa série é uma função analítica nesse disco e pode ser derivada termo a termo um número arbitrário de vezes. Em particular, a série (3) é uma função analítica em  $z$  e pode ser derivada termo a termo um número arbitrário de vezes em  $z$ . Assim, a função

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

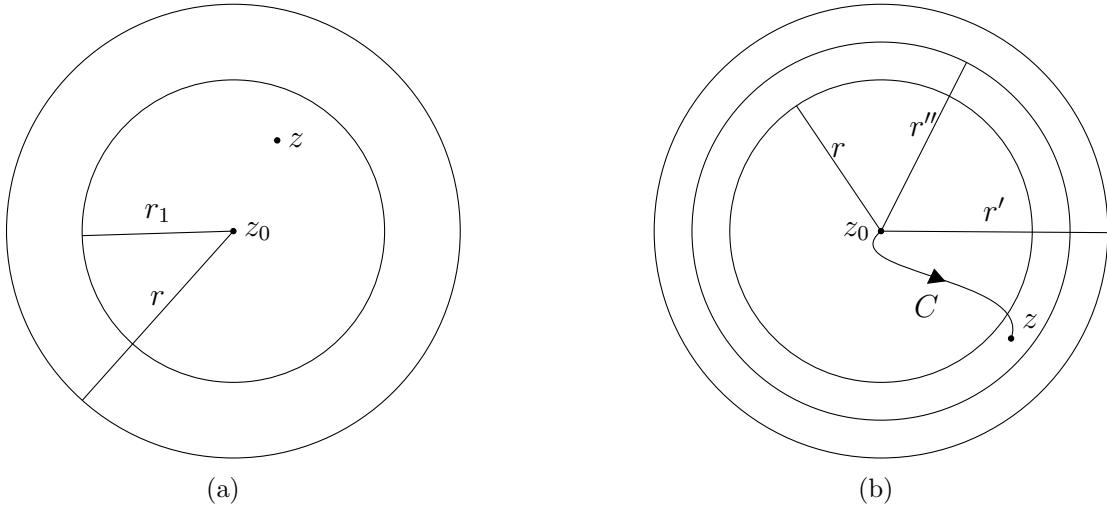
é analítica no disco  $|z - z_0| < r$  e pode ser derivada termo a termo um número arbitrário de vezes.

Agora, vejamos que o raio de convergência das derivadas de  $f$  é igual ao raio de convergência de  $f$ .

Observe que a série

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z - z_0)^n \quad (4)$$

converge pelo menos no disco  $|z - z_0| < r$ , ou seja, o raio de convergência  $r'$  de (4) é tal que  $r' \geq r$ .

Figura 1: Discos centrados em  $z_0$ .

Fonte: elaborado pelas autoras (2023).

Suponha que  $r' > r$ . Sejam  $r''$  e  $z \in \mathbb{C}$  tais que  $r < r'' < r'$  e  $r < |z - z_0| < r''$ , como na Figura 1(b). Pelo Teorema 1.10, a série (4) converge uniformemente em  $|z - z_0| < r''$ . Logo, pelo item b) do Teorema 1.8, essa série pode ser integrada termo a termo sobre um contorno  $C$  contido em  $|z - z_0| < r''$ , que vai de  $z_0$  a  $z$ , como na Figura 1(b). Então,

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \int_{z_0}^z f'(z) dz = \int_{z_0}^z \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z - z_0)^n dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{z_0}^z (n+1)a_{n+1}(z - z_0)^n dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Dai,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

no disco  $|z - z_0| < r''$ , o que é uma contradição, já que  $z$  está fora do disco de convergência de  $f$ . Portanto,  $r' = r$ , ou seja, o raio de convergência de  $f'$  é igual ao raio de convergência de  $f$ . Analogamente, concluímos que as derivadas  $f'', \dots, f^{(n)}, \dots$  tem mesmo raio de convergência  $r$  de  $f$ .  $\square$

Agora, veremos que toda função analítica pode ser desenvolvida em série de potências.

**Teorema 2.2** (Série de Taylor). *Sejam  $f$  uma função analítica num conjunto aberto e conexo  $R$ ,  $z_0 \in R$  e  $r_0 > 0$  tais que o disco  $|z - z_0| < r_0$  esteja todo contido em  $R$ . Então, nesse disco, a função  $f$  pode ser desenvolvida em série de potências de  $z - z_0$ . Conhecido*



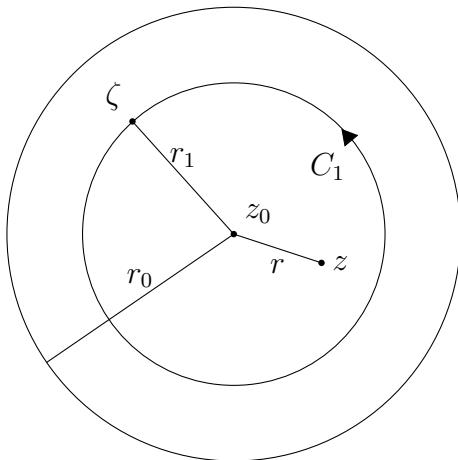
como a **série de Taylor** da função  $f$  relativa ao ponto  $z_0$ , esse desenvolvimento é dado univocamente por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

O caso  $z_0 = 0$  é conhecido como **série de MacLaurin** da função  $f$ .

*Demonstração.* Sejam  $z$  um ponto do disco  $|z - z_0| < r_0$ ,  $r = |z - z_0|$  e  $r_1 > 0$  tal que  $r < r_1 < r_0$ , como ilustra a Figura 2.

Figura 2: Disco centrado em  $z_0$ .



Fonte: elaborado pelas autoras (2023).

Pela Fórmula Integral de Cauchy, temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (5)$$

onde  $C_1$  é a circunferência  $|\zeta - z_0| = r_1$ . Observe que

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta - z_0} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n. \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5), obtemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right] d\zeta. \quad (7)$$

Como  $f$  é analítica no disco  $|z - z_0| < r_0$ , que contém  $C_1$ , então  $f$  é analítica em  $C_1$ . Logo,  $f$  é contínua em  $C_1$ . Além disso, como  $C_1$  é um conjunto fechado e limitado,  $f$  é limitada nesse conjunto, isto é, existe  $M > 0$  tal que  $|f(\zeta)| \leq M$  para  $\zeta \in C_1$ . Assim,

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right| \leq \frac{M}{r_1} \left( \frac{r}{r_1} \right)^n. \quad (8)$$



Note que  $r < r_1$ . Então  $\frac{r}{r_1} < 1$  e, consequentemente, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{r_1} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$  converge.

Disso, de (8) e do Teste de Weierstrass segue que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$  é uniformemente convergente. Pelo item b) do Teorema 1.8, podemos integrar (7) termo a termo e obter

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

A última igualdade segue do Teorema 1.4. Pelo Teorema 1.11, o desenvolvimento acima é único.  $\square$

Portanto, a partir dos Teoremas 2.1 e 2.2, podemos concluir que uma função  $f$  é analítica em um ponto  $z_0$  se, e somente se,  $f$  pode ser desenvolvida em série de potências em um disco centrado em  $z_0$ .

### 3 Exemplos

Por fim, veremos alguns exemplos de como funções analíticas podem ser desenvolvidas em série de potências. Para facilitar, utilizaremos o seguinte desenvolvimento de séries geométricas:

$$\frac{a}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} aw^n, \text{ quando } |w| < 1. \quad (9)$$

**Exemplo 3.1.** Considere a função  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Observe que  $f$  é analítica em  $z = 3$  e em  $z = -4$ . Então, vamos desenvolver  $f$  em série de potências de  $z - 3$  e, posteriormente, em série de potências de  $z + 4$ .

Note que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-3)+3} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{(z-3)}{3}}.$$

Tomando  $w = -\frac{z-3}{3}$  e  $a = \frac{1}{3}$  na série geométrica (9), e utilizando a expressão anterior, temos que o desenvolvimento

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-3)^n$$



é válido no disco  $|z - 3| < 3$  de centro  $z_0 = 3$  e raio  $r = 3$ . Por outro lado,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z + 4) - 4} = \frac{-\frac{1}{4}}{1 - \frac{(z + 4)}{4}}.$$

Fazendo  $w = \frac{z + 4}{4}$  e  $a = -\frac{1}{4}$  em (9), e pela expressão anterior, obtemos o desenvolvimento

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{4^{n+1}} (z + 4)^n,$$

que é válido no disco  $|z + 4| < 4$  de centro  $z_0 = -4$  e raio  $r = 4$ . Assim, vemos que utilizar desenvolvimentos conhecidos de outras funções pode ajudar no trabalho de desenvolver uma função analítica em série de potências.

**Exemplo 3.2.** Considere a função exponencial  $f(z) = e^z$ . Observe que  $f^{(n)}(z) = e^z$ . Então  $f^{(n)}(0) = 1$  e, portanto, o desenvolvimento de Taylor da função  $f$  é dado por

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots,$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ , já que  $f$  é analítica em  $\mathbb{C}$ .

**Exemplo 3.3.** Seja  $f(z) = \sin(z)$ . Como  $f$  é analítica em  $\mathbb{C}$ , pelo Teorema da Série de Taylor, segue que

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

onde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Note que

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0, \dots$$

Assim,

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

## 4 Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.



## Referências

- [1] FABIANO ROSA, C. **Série de Taylor e aplicações**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.
- [2] ÁVILA, G. **Variáveis complexas e aplicações**. 3<sup>a</sup> Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [3] STEWART, J. **Cálculo**. Volume I. 5<sup>a</sup> Edição. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.



## XIV Semana de Matemática do Pontal

26 e 27 de outubro de 2023



# A razão cruzada e a razão harmônica na geometria projetiva

Matheus Felipe Calu Rocha

Universidade Federal de Uberlândia

[matheus.calu@ufu.br](mailto:matheus.calu@ufu.br)

Tânia Maria Machado de Carvalho

Universidade Federal de Uberlândia

[tania.carvalho@ufu.br](mailto:tania.carvalho@ufu.br)

**Resumo.** Na geometria projetiva as propriedades que são invariantes com respeito a qualquer projeção são chamadas de propriedades projetivas. Por exemplo, o conceito de *colinearidade* e *incidência*, são invariantes da geometria projetiva, visto que são preservados por quaisquer transformações projetivas. A *razão cruzada* é uma propriedade que também é preservada por transformações projetivas, sendo, portanto, um *invariante da geometria projetiva*. Um caso particular da razão cruzada é a chamada *razão harmônica*. Nesse trabalho são introduzidos os dois conceitos e é estabelecida a relação entre eles.

**Palavras-chave.** Razão cruzada; projetividade; razão harmônica.

## Introdução

De certa forma, a geometria projetiva pode ser vista como uma extensão da geometria euclidiana. Problemas que envolvem retas tangentes paralelas e círculos tangentes, por exemplo, podem ser resolvidos de forma mais simples por meio da geometria projetiva. A ideia principal reside em supor que qualquer par de retas paralelas possui um ponto de intersecção, o qual é chamado *ponto do infinito*, de forma que quaisquer duas retas sempre se interceptem. A partir daí, é natural imaginar que o conjunto de todos os *pontos do infinito*, obtidos a partir das intersecções das infinitas combinações possíveis de duas retas paralelas, geram uma *reta do infinito*.

Como dito no resumo, na geometria projetiva denominam-se propriedades projetivas às propriedades que são invariantes com respeito a qualquer projeção. Dois exemplos ilustrativos são os conceitos de *colinearidade* e *incidência*. Ambos são considerados invariantes da geometria projetiva, visto que são preservados por quaisquer transformações projetivas.



A razão cruzada (ou razão dupla, ou razão anharmônica) é um número real  $r$  que define uma relação a qual é válida para quaisquer conjunto de quatro pontos  $A, B, C, D$ , obtidos pela interseção de um feixe de quatro retas (incidentes a um ponto  $O$ ), com uma reta transversal  $t$  a essas quatro retas, de forma que  $\frac{AC}{CB} \div \frac{AD}{DB} = r$ , e de forma que, se  $A', B', C', D'$  são os pontos de interseção de outra transversal  $t'$  com o feixe de retas, então

pontos

$$\frac{AC}{CB} \div \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} \div \frac{A'D'}{D'B'} = r,$$

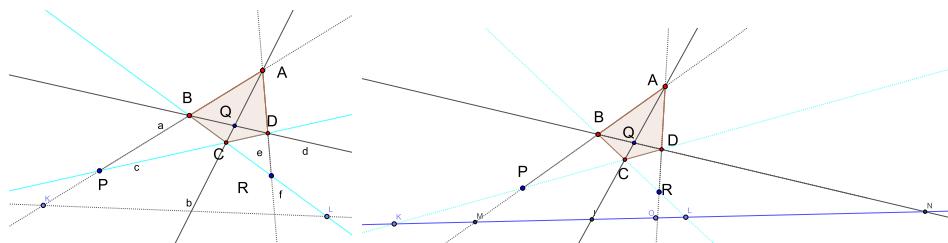
ou seja, a *razão cruzada* é uma propriedade que também é preservada por transformações projetivas, sendo, portanto, um *invariante da geometria projetiva*.

Um caso particular da razão cruzada é a chamada *Razão Harmônica*, a qual ocorre quando  $r = -1$ . Nesse trabalho são introduzidos os dois conceitos e é estabelecida a relação entre eles.

## 1 Quadrângulo completo

**Definição 1.** Um *quadrângulo completo* é uma figura formada por 4 pontos coplanares, a cada três não colineares, e as 6 retas que unem estes pontos. Os 4 pontos são denominados *vértices* e as 6 retas são os *lados* do quadrângulo. Dois lados são denominados *opostos* se o ponto comum entre eles não é um vértice e o ponto comum a dois lados opostos é chamado de *ponto diagonal*. Observe que um quadrângulo completo possui três pontos diagonais. Para mais informações veja as referências [1] e [4].

Figura 1: Quadrângulo completo de vértices  $A, B, C, D$ , e Conjunto Quadrangular.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Na figura [1] (à esquerda) está representado o quadrângulo completo de vértices  $A, B, C, D$ , com lados  $a = AB, b = AC, c = CD, d = BD, e = AD$  e  $f = BC$  e pontos diagonais  $P, Q$  e  $R$ . Os lados opostos são  $AB$  e  $CD$ ,  $AD$  e  $BC$ , e  $Bd$  e  $AC$ .

**Definição 2.** Sejam  $ABCD$  um quadrângulo completo e  $r$  uma reta não incidente a nenhum dos vértices desse quadrângulo. Denomina-se por *conjunto quadrangular* ao conjunto determinado por todos os pontos de incidência dos lados do quadrângulo com a reta  $r$  (ver figura [1], à direita)

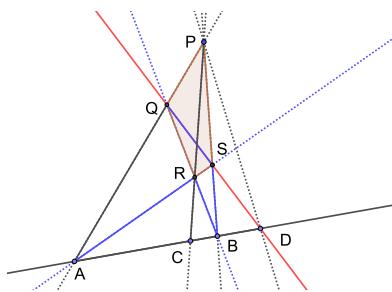
Observe que um conjunto quadrangular pode possuir 6, 5 ou 4 pontos de interseção com a reta  $r$ , nesse caso diz-se que o conjunto quadrangular possui 6 ou 5 ou 4 elementos.



**Definição 3.** Um *conjunto harmônico* é um conjunto quadrangular formado por 4 pontos.

Observe que, de acordo com a definição 3, um conjunto harmônico ocorre quando a reta  $r$  da definição 2 é incidente a 2 pontos diagonais de um quadrângulo. Sejam  $A, B, C$  e  $D$  os quatro pontos da definição 3. Denotaremos um tal conjunto harmônico por  $H(AB, CD)$ , indicando que: dois lados opostos incidem no ponto  $A$ , outros dois lados opostos incidem no ponto  $B$  e os dois lados opostos restantes incidem nos pontos  $C$  e  $D$  respectivamente. Ou seja,  $A$  e  $B$  são pontos diagonais e  $C$  e  $D$  são as interseções da reta  $r$  com as retas que determinam os lados do quadrângulo que passam sobre o terceiro ponto diagonal (veja figura (2)).

Figura 2: Conjunto harmônico  $H = (AB, CD)$ .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

**Observação 1.** Observe que,  $H(AB, CD)$  é equivalente a  $H(BA, CD)$  e também a  $H(AB, DC)$  e  $H(BA, DC)$ . Ou seja,  $H(AB, CD) \Leftrightarrow H(BA, CD) \Leftrightarrow H(AB, DC) \Leftrightarrow H(BA, DC)$

Observe que, com essa notação,  $A$  e  $C$  são pontos diagonais e  $B$  e  $D$  são incidentes aos lados que incidem simultaneamente sobre o 3º ponto diagonal.

Observe ainda que, no caso  $H(AB, CD)$ , o ponto  $C$  encontra-se entre o ponto  $A$  e o ponto  $B$ , e no caso  $H(AB, DC)$  o ponto  $D$  encontra-se entre o ponto  $A$  e o ponto  $B$ , de forma que se considerarmos o sentido de  $A$  para  $B$  da reta  $AB$ , o segmento  $BC$  ( $BD$  respec.) terá sinal oposto ao dos demais segmentos  $AC$ ,  $AD$  e  $BC$ . Isso será importante para o que vem a seguir.

## 2 razão cruzada (ou anharmônica)

Se  $A, B$  e  $C$  são três pontos distintos de uma reta, definimos a sua razão por  $(A, B, C) = \frac{AC}{BC}$ . Tal razão é dita positiva se as semi-retas  $AC$  e  $BC$  têm o mesmo sentido. Caso as duas semi-retas tenham sentidos opostos, dizemos que a razão é negativa.

Sejam agora  $A, B, C, D$  quatro pontos colineares distintos, denominase *razão cruzada* ou *razão anharmônica*, e denota-se por  $(A, B; C, D)$  ao número real  $r$  que satisfaz,

$$(A, B; C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD} = r \text{ ou } \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = r,$$

onde  $AC, BC, AD$  e  $BD$  são as medidas dos respectivos segmentos orientados.



Observe que, na definição acima, as direções opostas são representadas pelo sinal negativo, ou seja, se  $BA$  é a medida do segmento  $\overline{BA}$ , então  $-BA$  representa "a medida com sinal" do segmento  $\overline{AC}$ . Em geral, na maioria das vezes, considera-se o *módulo da razão cruzada*.

Para que a definição acima faça sentido no plano projetivo precisamos estendê-las para quaisquer quatro pontos ou retas no plano projetivo, incluindo assim os pontos ideais. Denotando por  $P_\infty$  o ponto no infinito da reta  $AB$ . Nesse caso escrevemos  $(A, B, C, P_\infty)$ , onde

$$(A, B, C, P_\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{AC}{BC} \div \frac{BX}{CX} = \frac{AC}{BC} \div \frac{BP_\infty}{CP_\infty} = \frac{AC}{BC}. \quad (1)$$

Vamos mostrar que  $\frac{XP_\infty}{YP_\infty} = 1$ . Para isso temos que lançar mão de ferramentas do *curso de análise na reta*.

Sejam  $A, B$  pontos ordinários (não ideais) da reta real com coordenadas  $a$  e  $b$  na reta real, respectivamente, tal que  $a < b$ . Seja  $\overline{AB}$  a medida do segmento  $AB$ . Assim  $\overline{AB} = \overline{BA} = |b - a| = b - a$ . Sejam ainda  $X$  um ponto ordinário arbitrário, com coordenada real  $x$  e  $P_\infty$  o *ponto ideal* (ou ponto no infinito) da reta  $AB$ .

Figura 3:  $X$  tende ao infinito.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Queremos mostrar que

$$\lim_{X \rightarrow P_\infty} \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = 1, \quad (2)$$

entendendo por  $X \rightarrow P_\infty$  que  $X$  é um ponto ordinário que se afasta cada vez mais tanto de  $A$ , quanto de  $B$ , de forma que podemos escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-a}{x-b} = 1$ , com  $x > a$  e  $x > b$ .

A ideia é aplicar a definição usual de limite de função real, como veremos a seguir.

Segue da relação biunívoca entre pontos da reta real e o conjunto dos números reais que, dado um número real  $r$  existe um ponto  $R$  da reta real, tal que  $r$  é a coordenada do ponto  $R$ . E segue da definição de limite (ver referência [3]) que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe um número real  $r$ , tal que se  $x > r$ , então

$$\left| \frac{x-a}{x-b} - 1 \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

Observe que a desigualdade [3] é satisfeita para  $r = \frac{b \cdot (\varepsilon+1) - a}{\varepsilon}$ .



Afirmamos que  $r > b$ , ou seja diferença  $r - b > 0$ . De fato,

$$r - b = \frac{b(\varepsilon + 1) - a}{\varepsilon} - b = \frac{b \cdot \varepsilon + b - a - b \cdot \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{b - a}{\varepsilon} > 0$$

Agora afirmamos que, se  $x > r$ , então  $\left| \frac{x-a}{x-b} - 1 \right| < \varepsilon$ . De fato,

$$\begin{aligned} x > r &\Rightarrow x > \frac{b \cdot (\varepsilon + 1) - a}{\varepsilon} \\ &\Rightarrow \varepsilon \cdot x > b \cdot \varepsilon + b - a \\ &\Rightarrow \varepsilon \cdot (x - b) > b - a \\ &\Rightarrow \frac{b - a}{x - b} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{b - a}{x - b} + 1 - 1 < \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{b - a + x - b}{x - b} - 1 < \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{x - a}{x - b} - 1 < \varepsilon, \text{ como afirmado.} \end{aligned}$$

Como  $AX > BX$ , tem-se que  $x - a > x - b$ , ou seja,  $\frac{x-a}{x-b} - 1 > 0$ , e, consequentemente,  $\left| \frac{x-a}{x-b} - 1 \right| < \varepsilon$ .

Podemos assim garantir a existência de um ponto  $R$  da reta  $AB$ , com coordenada  $r$ , tal que se  $x > r$  (ou seja, se  $X$  estiver à direita de  $R$ ) a razão das distâncias de  $X$  até  $A$  e  $X$  até  $B$  pode estar tão próxima do valor 1, quanto se deseje.

Procedendo da mesma forma quando  $X \rightarrow -\infty$  (com  $X$  à esquerda de  $R$  obtém-se o mesmo resultado, de forma que os limites laterais coincidem.

É imediato ver que

$$(A, B, C, D) = (B, A, D, C) = (D, C, B, A) = (C, D, A, B),$$

daí, tomamdo  $(A, B, C, D) = r$  é fácil mostrar que  $(A, B, D, C) = \frac{1}{r}$ , então, permutando a posição dos pontos obtém-se

$$(A, B, D, C) = (B, A, C, D) = (C, D, B, A) = (D, C, A, B) = \frac{1}{r}$$



Também,

$$(A, C, B, D) = (C, A, D, B) = (D, B, C, A) = (B, D, A, C) = 1 - r;$$

$$(A, C, D, B) = (C, A, B, D) = (B, D, C, A) = (D, B, A, C) = \frac{1}{1-r};$$

$$(A, D, C, B) = (D, A, B, C) = (B, C, D, A) = (C, B, A, D) = \frac{r}{r-1};$$

$$(A, D, B, C) = (D, A, C, B) = (C, B, D, A) = (B, C, A, D) = \frac{r-1}{r}.$$

Isso nos diz que as 24 combinações possíveis dos pontos  $A, B, C, D$  ficam reduzidas a 6 ou 4, no caso em que  $r = -1$ .

Podemos também pensar na razão cruzada do ponto de vista de um feixe de retas, como vemos a seguir.

Antes, vamos definir o que entendemos por ângulo entre duas retas em um plano projetivo, no nosso contexto, em que o feixe de retas de origem  $O$  é interceptado por uma reta  $t$ , incidente aos pontos  $A, B$ , de forma que a reta  $r_1$  é a reta  $OA$  e  $r_2$  é a reta  $OB$ ,  $A \neq B$ .

Então o ângulo entre sa reta  $r_1$  e  $r_2$  é o ângulo  $\hat{AOB}$ , tomado no sentido horário, relativo ao triângulo  $AOB$ .

Considere o feixe de retas de origem  $O$ , o qual é interceptado pela reta  $AB$ , incidente aos pontos  $A, B, C$ , de forma que a reta  $r_1$  é a reta  $OA$ ,  $r_2$  é a reta  $OB$ ,  $r_3$  é a reta  $OC$ , todas distintas e concorrentes no ponto  $O$ .

Então a razão dessas retas é definida por:

$$(r_1, r_2, r_3) = \frac{\sin \angle r_1 r_3}{\sin \angle r_2 r_3}.$$

Agora, se  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  são quatro retas concorrentes em um ponto  $O$ , com três dessas retas distintas, então defininimos sua razão cruzada por

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) = \frac{(r_1, r_2, r_3)}{(r_1, r_2, r_4)} = \frac{\sin \angle r_1 r_3}{\sin \angle r_1 r_3} \cdot \frac{\sin \angle r_2 r_4}{\sin \angle r_2 r_4}.$$

Qual é a importância da razão cruzada para a geometria projetiva? Para responder a essa pergunta primeiro precisamos fazer algumas considerações.

## 2.1 A razão cruzada é um invariante da geometria projetiva

**Teorema 1.** *A razão cruzada de quatro pontos é invariante sob projeções.*

O teorema I nos diz que se  $A, B, C, D$  e  $A, B, C, D$  são pontos correspondentes sobre duas retas relacionadas por uma projetividade, então tem-se a igualdade

$$\frac{CA}{CB} \div \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} \div \frac{DA}{DB}.$$

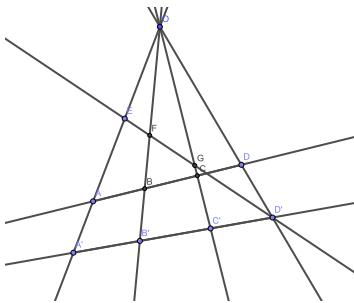


A demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência [2] p. 24.

Ou seja, qualquer feixe de retas, partindo de um ponto  $O$ , quando cortado por uma reta transversal, arbitrária, determina, nos pontos de incidência, a mesma *razão cruzada* (ver figura (2.1)).

No que se segue vamos utilizar a notação  $O(A, B, C, D)$  para indicar a razão cruzada de um feixe retas  $r_1, r_2, r_3, r_4$ , concorrentes no ponto  $O$ , incidentes à reta  $AB$  nos pontos  $A, B, C, D$ , respectivamente.

Figura 4: razão cruzada:  $AC/BC \div AD/BD = r$ ;  $A'C'/B'C' \div A'D'/B'D' = r$ ;  $(EG/FG)/(FD'/GD') = r$ .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

**Teorema 2.** Sejam  $A, B$  e  $C$  pontos distintos incidentes a uma reta  $t$ . Então, existe um único número real  $r$  tal que ponto tal que a razão cruzada  $(A, B, C, X) = r$ .

De fato,

$$(A, B, C, X) = (A, B, C, Y) \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} \frac{BX}{AX} = \frac{AC}{BC} \frac{BY}{AY} \Leftrightarrow \frac{BX}{AX} = \frac{BY}{AY}.$$

Portanto,  $r = (A, B, C, X) = (A, B, C, Y)$ , se, e somente se  $X = Y$ .

### 3 Razão harmônica

A *razão harmônica* é um caso particular da *razão cruzada*, sendo que ela ocorre quando a reta  $r$  contém dois pontos diagonais do conjunto quadrangular. Ou seja, o conjunto quadrangular é um conjunto harmônico. Veja novamente a figura (2).

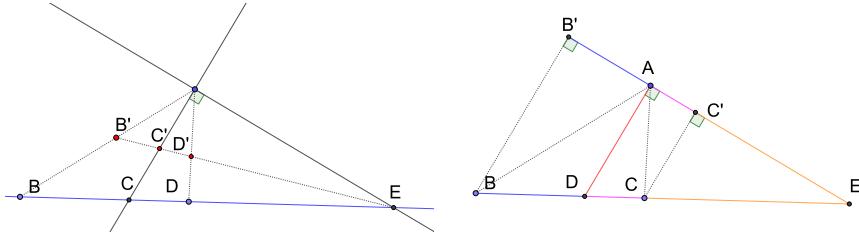
Par ajudar a enxergarmos que a razão harmônica pode ser vista como um conceito da geometria projetiva vamos considerar um *conjunto quadrangular* determinado por um *quadrângulo completo* de vértices  $A, F, G$  e  $P_\infty$  e uma reta  $r$ , não incidente a nenhum vértice do quadrângulo.

O teorema a seguir fornece uma importante ferramenta para o processo de entendimento do que ocorre nesse caso.

**Teorema 3.** Considere um triângulo  $ABC$  tal que a reta  $AD$  é a bisetriz interna e a reta  $AE$  é a bisetriz externa do ângulo  $C\hat{A}B$ . Nessas condições tem-se que  $\frac{DC}{AC} = \frac{CE}{BE} = \frac{BD}{AB}$ .



Figura 5:  $AD$  e  $AE$  são a bissetriz interna e externa, respectivamente, do ângulo  $B\hat{A}C$ .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

*Demonstração.* Sejam  $B'$  e  $C'$  as projeções ortogonais dos pontos  $B$  e  $C$  sobre a reta  $AE$ , respectivamente (ver figura 3). Observe que, desta forma, as retas  $CE$  e  $C'E$  são duas transversais cortadas pelas retas paralelas  $AD//BB'//CC'$ . Segue então do Teorema fundamental da proporcionalidade, que:

$$\frac{DC}{AC'} = \frac{BD}{B'A} = \frac{BE}{B'E} = \frac{CE}{C'E} = \frac{DE}{AE},$$

em particular,

$$\frac{DC}{BD} = \frac{C'A}{AB'} \quad (4)$$

Observe agora que o triângulo  $BB'A$  é retângulo em  $B'$  e o triângulo  $CC'A$ , é retângulo em  $C'$ . Como  $AD$  é a bissetriz do ângulo  $C\hat{A}B$ , segue que os ângulos  $B\hat{A}B'$  e  $C\hat{A}C'$  são congruentes, o que nos diz que os ângulos  $A\hat{B}B'$  e  $A\hat{C}C'$  também são congruentes. Ou seja, os triângulos  $BB'A$  e  $CC'A$  são semelhantes. Logo,

$$\frac{C'A}{AB'} = \frac{CC'}{BB'} = \frac{AC}{AB} \quad (5)$$

Segue portanto de (4) e (5), que:

$$\frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB} \quad (6)$$

e, de forma análoga, mostra-se que

$$\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB} \quad (7)$$

Ou seja,

$$\frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BE} \quad (8)$$

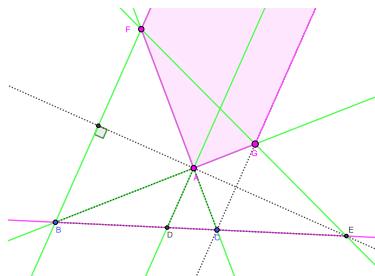
, como queríamos. □

Agora observe que o ponto  $D$  está entre os pontos  $B$  e  $C$ , logo  $CD$  tem sentido



oposto ao de  $AC$ , logo  $CD = -DC$  e, portanto,  $(B, C, D, E) = \frac{BD}{CD} \frac{CE}{BE} = \frac{BD}{CD} \frac{AC}{AB} = -1$ . Esse é um caso particular de conjunto harmônico, onde o ponto  $P_\infty$  de origem do feixe é um ponto ideal (no infinito) (veja figura (6)). Isso mostra que a razão harmônica é, também, um conceito projetivo.

Figura 6: Conjunto harmônico, com quadrângulo  $AFGP_\infty$ , com origem ideal  $P_\infty$ .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

**Lema 1.** Uma razão anharmônica  $(A, B; C, D) = 1$  se, e somente se,  $A = B$  ou  $C = D$ .

De fato, como  $(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} \frac{AD}{BD}$ , se, e somente se,  $\frac{(b-a)}{(c-b)} = \frac{(d-a)}{(b-d)} \Leftrightarrow (b-a)(d-c) = 0 \Leftrightarrow B = A$  ou  $C = D$ .

**Lema 2.** Se  $A \neq B$  e  $C \neq D$  e  $(A, B, C, D) = (A, B, D, C)$ , então  $(A, B, C, D) = -1$ .

De fato, sabemos que,

$(A, B, C, D) = (A, B, D, C) = \frac{1}{(A, B; C, D)}$ , logo,  $(A, B, C, D) = 1$  ou  $(A, B; C, D) = -1$  como,  $A \neq B$  e  $C \neq D$ , segue que  $(A, B; C, D) = -1$

#### 4 Conclusão

A princípio imagina-se que as razões cruzada e harmônica estejam definidas em termos da distância euclidiana, porém, como foi visto, ela pode ser naturalmente estendida a pontos ideais, o que mostra que podem ser, também, conceitos da geometria projetiva.

#### Referências

- [1] CASTRO, R. B. de. **Tópicos da geometria projetiva**. 2012. 94 f. Dissertação - (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012. Disponível em <<http://hdl.handle.net/11449/94354>>. Acesso em: 20 abr. 2022.
- [2] LIMA, H. P. de. **razão cruzada: dos clássicos aos contemporâneos**. Disponível em: <[https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/48964/1/Disserta% c3%a7%c3%a3o\\_Hellen.pdf](https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/48964/1/Disserta% c3%a7%c3%a3o_Hellen.pdf)>. Acesso em: 18 set. 2023.



- [3] LIMA, L. E; APLICADA, P. E. **Análise real**. Rio de Janeiro(Rj):Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009.
- [4] ROCHA, M. F. C., CARVALHO, T. M. M. **O conceito de dualidade na geometria projetiva plana**. Ituiutaba: Semana de Matemática do Pontal (SEMAP), 2022. Disponível em: [https://figshare.com/articles/book/XIII\\_Semana\\_de\\_Matem\\_tica\\_do\\_Pontal/22796003/3](https://figshare.com/articles/book/XIII_Semana_de_Matem_tica_do_Pontal/22796003/3). Acesso em: 12 out. 2023.



## XIV Semana de Matemática do Pontal

26 e 27 de outubro de 2023



# O Teorema do ponto fixo de Banach e suas aplicações no Google

Denilson Rodrigues Junior

Universidade Federal de Uberlândia

denilson.rodrigues@ufu.br

Valdair Bonfim

Universidade Federal de Uberlândia

valdair@ufu.br

**Resumo.** O teorema do ponto fixo de Banach para contrações é um importante resultado da teoria dos espaços métricos. O teorema abrange diversas áreas da matemática pura e aplicada, não se restringindo somente ao estudo de espaços métricos, como nas equações diferenciais, equações integrais e outros. Além de sua beleza intrínseca e natureza intuitiva, este teorema permite aplicações em áreas e contextos diversos, pois além de garantir existência e unicidade de ponto fixo para contrações, ele fornece um modo efetivo de encontrar aproximações deste ponto fixo por meio das iterações sucessivas da contração. Neste trabalho, exploramos o teorema do ponto fixo após um breve estudo do tópico de espaços métricos para então encontrar uma aplicação, não incluída nos exemplos clássicos mencionados, do teorema no ranqueamento de páginas utilizado pelo buscador Google. Estudamos essa aplicação sob o contexto do ponto fixo para provar a existência e unicidade do ranqueamento, e encontramos o ranqueamento utilizando o método iterativo exibido pelo teorema.

**Palavras-chave.** Ponto fixo; Banach; espaços métricos; pagerank; google.

## Introdução

O Teorema do Ponto Fixo de Banach é um importante resultado de espaços métricos com diversas aplicações nas mais variadas áreas de estudo. Usualmente, o teorema é aplicado para garantir a unicidade e existência de diversos objetos como no Teorema de Picard-Lindelöf para garantir a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, no estudo de equações integrais e outros.

Um ponto fixo  $x$  de uma função  $f$  é um ponto tal que sua imagem é igual ao próprio ponto, ou seja,  $f(x) = x$ . Os pontos fixos estão presentes em diversas situações, e



mesmo quando não estão presentes explicitamente, é possível interpretar outros problemas como problemas de ponto fixo. Por exemplo na busca de raízes de funções, um problema  $f(x) = 0$  pode ser reescrito como  $\phi(x) = x$  sendo  $\phi(x) = f(x) + x$ . Assim, a raiz da função passa a ser o ponto fixo dessa nova função.

Dada a importância e abrangência desse teorema, buscaremos neste trabalho uma aplicação além das mencionadas anteriormente. Essa aplicação se dá no modelo de ranqueamento de buscas do Google utilizando como referência o artigo original publicado na criação da ferramenta [1]. Outra referência que aborda o método de buscas do Google é [4], embora sua abordagem não esteja focada no teorema de ponto fixo. Desta forma, utilizamos a referência [2] que possui um foco maior no Teorema de Banach. Por fim, [3] como referência para a seção de espaços métricos, onde também pode ser encontrado as demonstrações e definições relevantes ao assunto.

Iniciaremos com uma breve introdução de espaços métricos e do Teorema do Ponto Fixo na seção 1. Na seção 2, iniciamos com o método de ranqueamento do Google, onde escreveremos o problema de ranqueamento como um problema de ponto fixo para então aplicar os conceitos de espaço métrico introduzidos na seção 1.

## 1 Desenvolvimento

### 1.1 Espaços Métricos

O Teorema do Ponto Fixo de Banach surge do estudo de espaços métricos. Desta forma, introduziremos alguns conceitos básicos necessários para a compreensão deste teorema.

**Definição 1.** Uma *métrica* é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  que associa um par de elementos de  $M$  a um número real que denominaremos de distância. A métrica deve satisfazer as seguintes propriedades para quaisquer  $x, y, z \in M$ :

1.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
2.  $d(x, y) = d(y, x);$
3.  $d(x, y) \geq 0;$
4.  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$

**Definição 2.** Denominamos *espaço métrico* um conjunto  $M$  com uma métrica  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ . Pode ser denotado pelo par  $(M, d)$ .

**Exemplo 1.** Dados  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  a função  $d(x, y) = [\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$ , também conhecida como *métrica euclidiana*, é talvez o exemplo mais conhecido de métrica em  $\mathbb{R}^n$ .



**Exemplo 2.** A função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  onde, para  $x, y \in M$ :  $d(x, y) = 0$  se  $x = y$  e  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$  é conhecida como métrica zero-um, e é uma métrica pela definição 1.

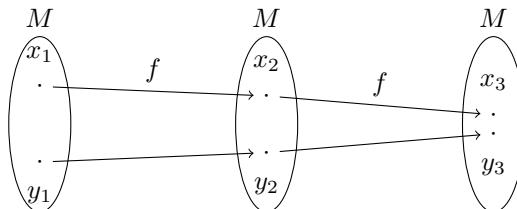
**Exemplo 3.** Se  $|\cdot|$  é uma norma no espaço vetorial  $V$ , então a expressão  $d(x, y) = |x - y|$  define uma métrica em  $V$  que satisfaz os axiomas da Definição 1. Essa métrica é chamada de métrica induzida por  $|\cdot|$ .

**Definição 3.** Sejam  $M, N$  espaços métricos. Uma função  $f : M \rightarrow N$  é chamada de *Lipschitziana* se existir  $\lambda > 0$  tal que,  $\forall x, y \in M$ , tem-se:

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y)$$

**Definição 4.**  $f : M \rightarrow N$  é uma contração se for *lipschitziana* com a constante  $0 \leq \lambda < 1$ .

Figura 1: Pontos se aproximando em uma contração.



Fonte: elaborado pelo autor (2023)

Uma contração pode ser interpretada ao analisar a imagem da função, vemos na Figura 1 que dois pontos quaisquer se aproximam nas aplicações sucessivas da função  $f$ . Esta interpretação ficará mais clara com o resultado do teorema seguinte, desde que sejam satisfeitas algumas condições.

**Definição 5.** Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço métrico  $M$  é chamada de *sequência de Cauchy* quando  $\forall \epsilon > 0$  dado existir  $n_0 \in M$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, d_n) < \epsilon$ .

**Definição 6.** Um espaço métrico  $(M, d)$  é dito completo quando toda sequência de Cauchy em  $M$  converge.

**Exemplo 4.** A reta  $\mathbb{R}$ , o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  e o espaço vetorial normado  $\mathbb{R}^n$  são completos. Ver [3].

**Teorema 1** (Teorema do Ponto Fixo de Banach). Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico completo e  $f : M \rightarrow M$  uma contração. Então  $f$  possui um único ponto fixo  $\bar{x} \in M$  ( $f(\bar{x}) = \bar{x}$ ). Além disso,  $\bar{x}$  é o limite da sequência  $x_{n+1} = f(x_n)$  para um  $x_0 \in M$  qualquer.



**Demonstração.** Mostraremos a unicidade do ponto fixo. Assuma que existam dois pontos fixos  $a \in M$  e  $b \in M$ . Como  $f$  é uma contração,  $d(f(a), f(b)) \leq \lambda d(a, b)$ . Já que  $a$  e  $b$  são pontos fixos,  $f(a) = a$  e  $f(b) = b$ , então  $d(a, b) \leq \lambda d(a, b) \Rightarrow (1 - \lambda)d(a, b) \leq 0$ . Como  $1 - \lambda > 0$  necessariamente  $d(a, b) = 0$ , isso implica que  $a = b$ . Logo há somente um ponto fixo.

A demonstração da existência pode ser encontrada em [3]. □

Nem sempre será possível encontrar uma função  $f$  que seja contração em todo o espaço métrico  $M$ . Nesses casos podemos limitar a função para um subconjunto fechado de  $M$ , tal que  $f(M) \subset M$ , em que  $f$  é contração. Veja [3].

**Exemplo 5.** A função  $f(x) = \cos x$  possui um único ponto fixo. Considere o espaço métrico da reta  $\mathbb{R}$  com a métrica usual. Isso pode ser facilmente verificado pelo Teorema do Valor Médio, temos então que para um intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , existe um  $c \in [a, b]$  tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

A derivada de  $f$  dada por  $f'(x) = -\sin(x)$  é limitada, obtemos disso que  $\forall c \in [0, 1]$   $|f'(c)| < 1$ . Logo para quaisquer pontos  $a, b \in [0, 1]$ :

$$f(b) - f(a) < (b - a)$$

Logo  $f$  é uma contração em  $[0, 1]$ , então existe um único ponto fixo que pode ser obtido por iterações sucessivas de cossenos. Tomando  $x_0 = 0$ , após várias iterações obtemos o ponto fixo aproximado  $x = 0.7391$ .

Ou seja, o Teorema do Ponto Fixo de Banach nos garante não só a existência e unicidade do ponto fixo, mas também exibe uma maneira de encontrá-lo por meio de iterações em um ponto qualquer do espaço métrico.

**Exemplo 6.** Podemos ainda encontrar alguns resultados interessantes ao considerar a seguinte situação: digamos que seja colocado um mapa da cidade em uma sala, consideramos uma aplicação  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow A$  que leva um ponto localizado na cidade para o ponto no mapa que o representa. Consideraremos  $A$  uma região fechada delimitada pela fronteira da cidade.

Nessa situação hipotética, considerando  $A$  com a métrica euclidiana, temos um espaço métrico completo. É simples verificar que  $f$  é uma contração, utilizando a escala do mapa temos que para dois pontos  $a, b \in A$ ,  $d(f(a), f(b)) = e \cdot d(a, b)$  sendo  $0 < e < 1$  a escala do mapa.

Pelo Teorema do Ponto Fixo, existe um único ponto fixo  $\bar{x}$  na aplicação  $f$ . A interpretação desse resultado é de que existe um ponto físico na cidade em que sua representação no mapa coincide com a sua posição. Além disso, é possível encontrar esse ponto aplicando iterativamente a função  $f$  sobre um ponto qualquer.



## 1.2 Aplicação no buscador Google

Publicado em 1998 por Brin e Page, o PageRank é um modelo utilizado pelo buscador Google para ranquear os resultados a serem exibidos na busca do usuário.

Nesse modelo, o ranqueamento das páginas é dado de acordo com a sua importância, que por sua vez é determinada pelas conexões da página com outras. A intuição é de que uma página importante receberia mais citações de páginas também importantes, o que é similar à importância dada para artigos científicos com muitas citações.

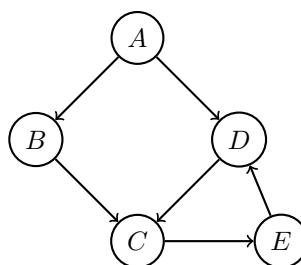
As conexões entre páginas são identificadas por meio de *hyperlinks*. Parte do processo do buscador Google é de navegar pela web e encontrar essas conexões o que é detalhado em [II].

O ranqueamento Pagerank foi descrito por Brin e Page [I] considerando as conexões das páginas entre si. Sejam  $x_1 \dots x_n$  páginas de websites,  $C(x_i)$  o número de conexões que saem da página  $x_i$  e  $0 \leq d < 1$  uma constante. Temos que o Pagerank  $PR(x_i)$  de uma página  $x_i$ , em termo do Pagerank das outras páginas que estão conectadas a ela, é dado por:

$$PR(x_i) = (1 - d) + d \left( \frac{PR(x_1)}{C(x_1)} + \dots + \frac{PR(x_n)}{C(x_n)} \right) \quad (1)$$

As conexões podem ser visualizadas por um grafo como o da Figura 2 abaixo. Uma página  $A$ , representada por um vértice, que cita outra página  $B$  possuirá uma aresta direcionada de  $A$  até  $B$ . Não serão consideradas múltiplas citações entre uma mesma página a outra única página.

Figura 2: Grafo de um conjunto de websites.



Fonte: elaborado pelo autor (2023)

Assim, o Pagerank de cada página é influenciado pelo Pagerank das páginas que a citam. Entretanto, o quanto a influência de uma página contribui com o Pagerank de outra depende de quantas conexões essa página tem, por isso normalizamos pelo número de conexões da página ao dividir por  $C(x_i)$ .

A constante  $d$  em [I] representa um fator de amortecimento que analisaremos posteriormente, por enquanto consideraremos um caso mais simples sem esse fator, onde:



$$PR(x_i) = \frac{PR(x_1)}{C(x_1)} + \cdots + \frac{PR(x_n)}{C(x_n)} \quad (2)$$

Chamaremos de  $x_i$  o Pagerank da página  $i$ , temos então que cada  $x_i$  depende linearmente dos ranques das outras páginas. Caso uma página  $x_j$  não possua conexões com  $x_i$ , sua influência será 0. Caso possua uma conexão, sua influência será a descrita em 2.

Definimos então a matriz  $A$  com entradas  $a_{ij}$  tal que, caso  $x_j$  esteja conectado a  $x_i$ ,  $a_{ij} = \frac{1}{C(x_j)}$ , caso contrário  $a_{ij} = 0$ . Essa matriz será utilizada pelo restante do trabalho para encontrar o Pagerank.

Então para  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ , reescrevemos 2 como o sistema  $Ax = x$ .

**Exemplo 7.** O sistema com a matriz  $A$  associado às conexões das páginas da Figura 2 é dado por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \\ x_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \\ x_E \end{bmatrix}$$

Esse sistema tem solução trivial  $x = [0, 0, 0, 0, 0]$ , o que não nos fornece informações sobre o ranqueamento das páginas. Corrigiremos esse problema posteriormente.

Sendo  $A$  a matriz dos coeficientes desse sistema linear e  $X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ , transformamos o processo de ranqueamento em um problema de ponto fixo. Onde queremos encontrar o ponto fixo da transformação  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  onde  $T(x) = Ax$ .

Além disso, a matriz  $A$  é uma matriz estocástica, em particular, a soma das entradas de uma coluna é sempre 1. Ou seja, essa matriz descreve um usuário navegando pelas páginas aleatoriamente, sempre clicando em uma página citada por seu site atual.

Assim, na coluna  $j$  da matriz  $A$ , é descrita a probabilidade do usuário, que está na página  $x_j$ , clicar na página da linha  $i$  ( $x_i$ ), por isso sua soma é sempre 1. Essa abordagem de matriz estocásticas não está no objetivo no trabalho, e pode ser encontrada com mais detalhes em 4. Descreveremos essa propriedade das colunas na seguinte proposição que será útil posteriormente.

**Proposição 1.** Seja  $A$  a matriz definida anteriormente, dada uma coluna  $j$ ,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$$

Como visto no Exemplo 7 é necessária uma correção ao modelo. Por isso, utiliza-se o fator de correção  $d$  da Equação 1. Esse fator  $d$  representará a probabilidade do usuário



escolher navegar para outra página ou reiniciar a busca em outra página. Assim temos o novo Pagerank descrito por:

$$x = (1 - d)q + dAx, \quad (3)$$

onde  $q$  será um vetor que representa os gostos do usuário, quando ele optar por não continuar navegando pelas páginas, o usuário reinicia a busca para uma página de sua preferência. Utilizaremos um vetor  $q \in \mathbb{R}^n$  tal que  $q = [\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]$ , neste caso o usuário retorna a uma página aleatória já que não sabemos os seus gostos.

Obtemos então um novo problema de ponto fixo, de [3] definimos uma aplicação  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  onde  $T(x) = q(1 - d) + dAx$ , a solução  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  em  $T(x) = x$  que representa o ranqueamento das páginas é um ponto fixo de  $T$ . Sendo assim, podemos tentar aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach [1] para garantir a existência dessa solução.

Antes de analisar se  $T$  é uma contração, é necessário definir uma métrica para o espaço métrico  $\mathbb{R}^n$ . Como mencionado no Exemplo [4], o espaço vetorial normado  $\mathbb{R}^n$  é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma. Precisamos então de uma norma vetorial para garantir uma métrica.

**Definição 7.** Seja  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Definimos a seguinte norma:

$$|x| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Assim, podemos definir o espaço métrico  $\mathbb{R}^n$  com a métrica induzida pela norma da definição [7], onde para  $x, y \in \mathbb{R}^n$  a métrica é definida por  $d(x, y) = |x - y|$ .

**Proposição 2.** Seja  $T(x) = (1 - d)q + dAx$  para um  $d \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq d < 1$ , sendo  $A$  a matriz das conexões das páginas, com a métrica induzida da norma na Definição [7] no espaço de vetores  $\mathbb{R}^n$ .  $T$  possui um único ponto fixo em  $\mathbb{R}^n$ .

**Demonstração.** Primeiramente, mostraremos que  $T$  é uma contração, assim pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach [1],  $T$  possuirá um único ponto fixo em  $\mathbb{R}^n$ .

Sejam  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , queremos analisar a distância entre as imagens desses dois pontos  $(T(x), T(y))$ , pela métrica descrita:

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= |dA(x - y)| = d|A(x - y)| = d \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j) \right| \\ &\leq d \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}(x_j - y_j)| = d \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}|x_j - y_j| \\ &= d \sum_{j=1}^n \left( |x_j - y_j| \sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \end{aligned}$$



Como observado anteriormente, a soma dos valores de uma coluna  $j$  da matriz  $A$  é sempre 1, ou seja  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ . Temos então que

$$\begin{aligned} d \sum_{j=1}^n \left( |x_j - y_j| \sum_{i=1}^n a_{ij} \right) &= d \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| = d|x - y| \\ \therefore |T(x) - T(y)| &\leq d|x - y| \end{aligned}$$

Então, para  $0 \leq d < 1$  temos que  $T$  é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo [\[1\]](#),  $T$  possui um único ponto fixo.  $\square$

Por conta da unicidade do ponto fixo, o Pagerank está bem definido. Perceba que para  $d = 0$ ,  $T(x) = q$ , onde temos um único ponto fixo  $q$ . No artigo original por Brin e Page, veja [\[2\]](#), usualmente utilizavam  $d = 0.85$ .

Além de garantir a existência do ranqueamento, é exibida uma maneira de encontrá-lo por meio do método das iterações sucessivas. Aplicaremos esse método para encontrar o ranqueamento das páginas da Figura [\[2\]](#).

**Exemplo 8.** Utilizaremos um fator de amortecimento  $d = 0.85$ , o vetor dos gostos  $q = [\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$  e a matriz  $A$  obtida no Exemplo [\[7\]](#). Partindo de um  $x_0$  qualquer, nesse caso escolheremos  $x_0 = q$ , após aplicar sucessivas iterações sobre  $x$ , obteremos o ponto fixo de  $T$  como mostrado na Proposição [\[2\]](#). Esse ponto fixo será o vetor que representa o ranqueamento das páginas.

Por meio do software Octave, obtemos ao iterar o ponto inicial  $x_0$  o seguinte ponto fixo:

$$\bar{x} = [0.030000, 0.042750, 0.322255, 0.301079, 0.303916]$$

Vemos que a página  $C$  possui o maior ranqueamento, seguido das páginas  $D$  e  $E$  com ranqueamentos próximos. A página  $C$  e  $D$  possuem muitas citações, o que as garante um ranqueamento maior. Já a página  $E$  é citada por somente uma página, porém como essa é citada pela  $C$ , a maior em ranqueamento, isso influencia com maior peso o ranqueamento de  $E$ . Em último lugar está  $A$  que não é citada por nenhuma página, e em penúltimo está a página  $B$  que é citada somente pela página  $A$ .

## 2 Conclusão

Obtemos após o estudo do Teorema do Ponto Fixo de Banach, uma aplicação do mesmo em um grande modelo de buscas da internet. Sendo assim, vemos que esse é um teorema versátil e importante que abrange além da teoria dos espaços métricos. Somente utilizando o teorema do ponto fixo, analisamos o modelo e garantimos sua validade pela



unicidade e existência do ponto fixo. E por fim, além da teoria, conseguimos exibir o resultado do ranqueamento por meio do método iterativo exibido pelo teorema.

## Referências

- [1] BRIN S., PAGE L. The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine. **Computer Networks**, v. 30, p. 107-117, 1998.
- [2] EISERMANN,M. Comment fonctionne Google?. **Magazine de mathématiques pures et épicées**, v. 68, p. 15-22, 2008.
- [3] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 1 ed., Rio de Janeiro: IMPA - Coleção Projeto Euclides, 2014. v. 1.
- [4] How Google works. In: Klein Project. Disponível em: <http://blog.kleinproject.org/?p=280>. Acesso em: 27 set. 2023.



## XIV Semana de Matemática do Pontal

26 e 27 de outubro de 2023



### Teorema das Quatro Cores e a História da Demonstração

Matheus Henrique Silva do Nascimento

Universidade Federal de Uberlândia

[matheushns2@gmail.com](mailto:matheushns2@gmail.com)

Evaneide Alves Carneiro

Universidade Federal de Uberlândia

[eva.ac@ufu.br](mailto:eva.ac@ufu.br)

**Resumo.** Neste trabalho aborda-se um pouco sobre o Teorema das Quatro Cores. Durante algum tempo popularmente conhecido como “Problema das Quatro Cores”, por ainda não haver uma demonstração, ele determina que são necessárias quatro cores para se colorir um mapa, seja de regiões, estados e países reais ou imaginários, tendo como critério essencial que países vizinhos sejam pintados com cores diferentes. Trata-se de um problema simples, belo e útil, porém sua solução não é trivial. O estudo de tal problema proporciona a oportunidade de observar que mesmo os problemas de mais simples compreensão podem exigir anos de estudo para serem resolvidos, e mesmo que sem validação ainda podem gerar contribuições de grande valor para a sociedade, sejam elas práticas ou teóricas. Para dar base a isso, é feito um aprofundamento sobre a História da Matemática e seu surgimento como um instrumento de investigação das práticas matemáticas já nas antigas civilizações e que vêm se desenvolvendo até os dias atuais.

**Palavras-chave.** Problema das Quatro Cores, coloração mínima de mapas, contribuições para a vida moderna.

### Introdução

A Matemática foi, por muito tempo, associada a números, grandezas e formas. Nesse sentido, raramente procurava-se associar seus vestígios com acontecimentos históricos e não se levava em consideração o vínculo da Matemática com as atividades humanas. Por esta razão, Boyer e Merzbach (2019 p. 25) afirmam que aqueles que procuram os primeiros exemplos de atividade matemática apontarão para resquícios arqueológicos que refletem a consciência humana das operações numéricas. Nesse contexto, a História da Matemática manifesta-se como um instrumento de investigação das práticas matemáticas que surgiram com as antigas civilizações e vêm se desenvolvendo até os dias atuais. Com



isso, a História da Matemática constitui um dos capítulos mais interessantes do conhecimento. Permite compreender a origem das ideias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento: enxergar os homens que criaram essas ideias e estudar as circunstâncias em que elas se desenvolveram. Assim, esta História é um valioso instrumento para o ensino e aprendizagem da própria Matemática. Podemos entender por que cada conceito foi introduzido nesta ciência e por que, no fundo, ele sempre era algo natural no seu momento. (FARAGO, 2003 p.17) [3]. Partindo do pressuposto de que a construção histórica aponta uma evolução dos conceitos matemáticos, o presente trabalho tem por objetivo, a partir de pesquisas bibliográficas, discorrer um pouco sobre a História do Teorema das Quatro Cores e sua evolução, partindo do seu surgimento, a divulgação do problema, alguns dos indivíduos envolvidos no processo de tentativa de demonstração, exemplos de colorações mínimas de mapas, e ainda suas diversas contribuições para a vida moderna.

## 1 O surgimento do problema e da demonstração

O Teorema das Quatro Cores surgiu em 1852, quando Francis Guthrie (1831-1899) tentou colorir um mapa dos condados da Inglaterra e algo lhe chamou a atenção. O matemático conseguiu pintar todo o mapa com apenas quatro cores garantindo que dois condados vizinhos não seriam pintados com a mesma cor e, ao ver que isso se repetia para outros mapas, iniciou sua busca para responder à seguinte questão: “É possível colorir um mapa, plano ou sobre uma superfície esférica, (respeitado o critério imposto) com apenas quatro cores?”

Naquela época Francis dedicou-se à tentativa de demonstrar o teorema. O inglês tentou pintar outros mapas com apenas quatro cores na busca de validar sua hipótese e, mesmo almejando provar sua veracidade, não conseguiu formular uma demonstração para esse problema. Nesse sentido, Francis apresentou-o para seu irmão mais novo, Frederick Guthrie (1833-1866). Frederick, que era aluno de Augustus De Morgan (1806-1871), apresentou o problema para o professor, a pedido de seu irmão e este se encantou com a ideia e decidiu prosseguir em busca de sua comprovação. De Morgan foi quem deu visibilidade ao Problema das Quatro Cores, apresentando-o para a comunidade científica e conseguindo avanços consideráveis rumo à sua demonstração. O professor observou que, seguindo os critérios estabelecidos, alguns mapas não seriam possíveis de colorir com menos de quatro cores, ou seja, aqueles que continham quatro “condados” que faziam fronteira entre si, não poderiam ser pintados com apenas três cores. Era necessário, no mínimo, o uso de quatro cores. Além disso, De Morgan tentou encontrar um mapa que necessariamente utilizasse pelo menos cinco cores, entretanto não encontrou nenhum contraexemplo para o problema de Guthrie. Sendo assim, De Morgan apresentou a conjectura para o matemático Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), que não apresentou interesse e relatou estar

Figura 1: Mapa dos condados da Inglaterra em Preto e Branco.

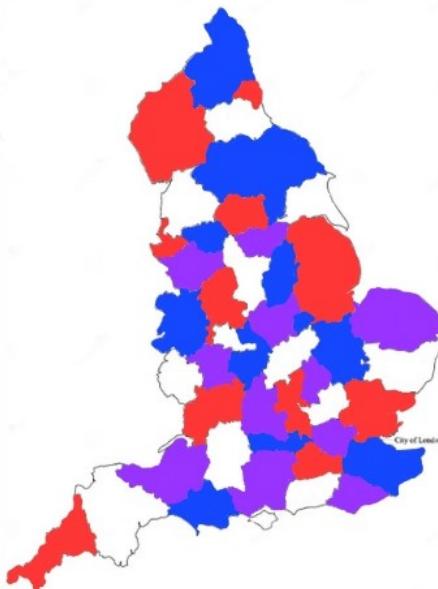


Fonte: Site dreamstime, 2023 [2].

sem tempo para dedicar-se ao problema. Logo, o professor colocou essa questão para outros matemáticos. Após esse período, o interesse pelo teorema caiu demasiadamente, ou ao menos não se tem notícias de trabalhos sobre o tema.

Em 1878 houve alguns questionamentos em revista se já existia comprovação para o Problema das Quatro Cores, mas somente em 1879 foi realizada a publicação de uma “demonstração” no American Journal of Mathematics, elaborada por Alfred Bray Kempe (1849-1922). Tal demonstração foi estudada por diversos matemáticos renomados e que sugeriram alguns ajustes para sua melhoria e, até então, estabeleceu-se definitivamente a Teoria das Quatro Cores. A calmaria gerada por Kempe, que conclui a busca pela demonstração, não durou muito, pois em 1890 Percy John Heawood (1861-1955) provou que Kempe estava errado através de um contraexemplo, criando um mapa não passível de coloração de acordo com os passos da demonstração de Kempe. Lima (2016, p.71) [5] afirma que o “(...) contraexemplo de Heawood foi uma forma de mostrar que a estratégia de Kempe não é válida para provar o Teorema das Quatro Cores, mas não que o teorema em si não é válido.” Nesse sentido, Heawood não conseguiu nenhuma demonstração alternativa para esse teorema, todavia provou o Teorema das Cinco Cores, ou seja, ele

Figura 2: Mapa dos condados da Inglaterra colorido de acordo com o critério do Teorema das Quatro Cores.



Fonte: Colorido pelo autor, 2023.

conseguiu demonstrar que, para colorir qualquer mapa, seguindo o critério imposto por Francis, são necessárias no máximo cinco cores.

Depois de muitos anos, vários matemáticos e suas diversas tentativas de demonstração, foi apresentada em 1976, por Wolfgang Haken (nascido em 1928) e Kenneth Appel (1932-2013), em um artigo de 139 páginas, a demonstração do Teorema das Quatro Cores, 124 anos após o surgimento do problema. O ponto chave na comprovação apresentada por eles foi o uso de computadores de grande porte, os quais realizaram cálculos por, aproximadamente, 1200 horas. Ao mesmo tempo que essa descoberta gerou euforia, o entusiasmo esmoreceu devido ao extenso tempo de demonstração e ao uso dos computadores. Muitos matemáticos não se sentiam à vontade com o uso de computadores, pois estes poderiam gerar erros que comprometessem a validade da demonstração.

Por fim, em 1993, foi apresentada uma nova demonstração para o Teorema, sendo ela “mais simples” que a anterior, pois é passível de verificação em, aproximadamente 24h, todavia ainda envolvendo o uso de computadores. Até os dias atuais não se tem notícias de uma demonstração que não envolva o uso de computadores, mas espera-se que se torne cada vez mais rápida a verificação da demonstração, devido ao aumento na velocidade de processamentos dos equipamentos utilizados.

1850

1976





## 2 Observações históricas sobre a demonstração do Teorema

A estratégia geral da prova do teorema das quatro cores não difere muito daquela adotada por Kempe em seu artigo de 1879, sendo feita por indução no número de vértices. O primeiro passo da indução é observar que qualquer grafo com no máximo quatro vértices pode ser colorido com 4 cores. A prova geral consiste em remover um vértice de um dado grafo, reduzindo assim a um caso menor, que pela hipótese de indução pode ser colorido com 4 cores. O problema então consiste em estender a coloração para incluir o vértice extra, ou mais geralmente, encontrar uma maneira de mudar a coloração de forma que ela possa ser estendida para o vértice extra. De acordo com Robert Wilson ([7], 2002, p.31-37), se o vértice tiver grau menor que 4, então a coloração se estende de maneira direta, enquanto se tiver grau 4, podemos alterar a coloração usando um argumento conhecido como cadeias de Kempe de forma que a nova coloração se estenda para o vértice extra. Em linguagem moderna, dizemos que um vértice de grau no máximo 4 é redutível, ou que qualquer grafo contendo um vértice de grau no máximo 4 é redutível.

A outra parte do problema é mostrar que todo grafo planar contém uma configuração redutível. Kempe usou a fórmula de Euler para mostrar que todo grafo planar contém um vértice de grau no máximo 5. Em outras palavras, o grafo não pode “evitar” ter um vértice de grau 5 ou menos. Dizemos que esse conjunto de configurações é inevitável, pois todo grafo planar contém pelo menos um deles.

A razão pela qual a tentativa de prova de Kempe falha é porque o conjunto inevitável, caso possua um vértice de grau 5 não é um subconjunto do conjunto redutível. Se pudéssemos de alguma forma encontrar um conjunto inevitável consistindo apenas de configurações redutíveis, teríamos concluído a prova do teorema das quatro cores.

Historicamente, a tentativa de demonstração foi perseguida de ambos os lados simultaneamente, de modo que melhorias foram feitas tanto nos conjuntos inevitáveis quanto nos argumentos de redutibilidade. Ficou imediatamente claro que era necessário olhar não apenas para vértices individuais e seus graus, mas para configurações maiores de vértices adjacentes.

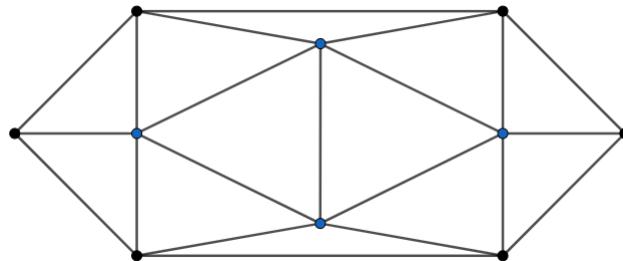
O primeiro resultado nessa direção foi a prova de Wernicke em 1904 de que o vértice de grau 5 pode ser substituído por um par de vértices adjacentes, um de grau 5 e o outro de grau 5 ou 6. Isso fornece informações extras sobre a vizinhança do vértice de grau 5, o que pode ajudar quando tentamos provar redutibilidade. No entanto, descobriu-se que essa informação não era útil para o propósito.

Birkhoff em 1913 abordou o problema de outra direção e mostrou que um vértice de grau 5 com três vizinhos consecutivos de grau 5 é redutível. Ficou claro, porém, que ainda havia uma enorme lacuna entre o conjunto de configurações redutíveis conhecidas e um conjunto inevitável. No entanto, houve um progresso constante de ambas as direções.

Em 1922, Franklin, um aluno de Birkhoff, melhorou o resultado de Wernicke mos-



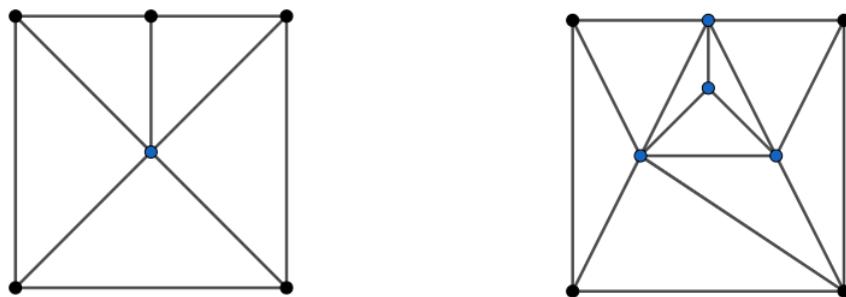
Figura 3: Resultado de Birkhoff



Fonte: Elaborado pelo autor no software Geogebra (2023)

trando que o vértice de grau 5 no conjunto inevitável poderia ser substituído por um vértice de grau 5 com dois vizinhos de grau 5 ou 6. Ao mesmo tempo, ele mostrou que um vértice de grau 6 com três vizinhos consecutivos de grau 5 é redutível. Autores posteriores provaram a redutibilidade de cada vez mais configurações desse tipo.

Figura 4: Resultado de Franklin



Fonte: Elaborado pelo autor no software Geogebra (2023)

Uma ideia chave para a demonstração é a de “descarga”, que de acordo com Júnior (2007) [4] foi introduzida por Heesch em 1969, e consiste em associar uma carga de magnitude  $6 - d(v)$ , a cada vértice  $v$  (sendo  $d(v)$  o grau de  $v$ ) e, em seguida, criar um método (chamado de “algoritmo de descarga”) para espalhar a carga de um vértice para seus vizinhos, de tal forma que cargas positivas só surgem sob certas condições restritas (onde há muitos vértices de grau 5 próximos). Essas condições restritas constituem então o “conjunto inevitável”. A maneira como Appel e Haken conseguiram provar o teorema das quatro cores foi modificando sucessivamente o algoritmo de descarga para produzir um conjunto inevitável melhor a cada vez. A essa altura, Heesch desenvolveu uma ideia de que tipo de configurações provavelmente seriam problemáticas e, portanto, sabia o que procurar ao buscar conjuntos inevitáveis. Usando essa intuição, Appel e Haken examinaram as configurações do conjunto inevitável que pareciam difíceis de reduzir. Em seguida, eles redesenharam o algoritmo de descarga para eliminar esses casos particulares. Ao repetir esse procedimento, eles finalmente encontraram um algoritmo de descarga que produziu um conjunto inevitável de 1936 configurações que eles acreditavam poder provar que eram redutíveis. De fato, com a ajuda de um computador que foi programado por



Koch para procurar as extensões de coloração necessárias, provou-se que tais configurações eram redutíveis. A prova foi concluída em 1976.

Logo ficou claro que nem todas as 1936 configurações eram distintas - algumas eram repetidas e outras eram subconfigurações de outras maiores - e demonstrou-se que “apenas” 1834 eram realmente necessárias na prova.

Um pouco mais tarde, novas melhorias na prova de inevitabilidade resultaram em outras 352 configurações sendo declaradas redundantes, deixando apenas 1482 configurações no conjunto inevitável.

Mais recentemente (em 1997), uma versão simplificada da prova de Appel-Haken foi publicada por Robertson, Sanders, Seymour e Thomas ([\[6\]](#)). Ela ainda depende de cálculos de computador, mas o número de configurações inevitáveis foi reduzido para 633, que são explicitamente desenhadas nas últimas 9 páginas do artigo, e o “algoritmo de descarga” usado para produzir o conjunto inevitável de configurações é bastante simplificado. Além disso, o artigo é bem mais curto, com 43 páginas ao invés de 139, o que pode ser um indício que estamos mais próximos de fornecer uma prova que possa ser verificada por um humano suficientemente determinado, sem a dependência dos computadores.

### 3 Considerações Finais

Vimos na seção anterior que a primeira demonstração válida do Teorema das Quatro Cores, a prova de Appel e Haken, basicamente envolve duas etapas principais:

- (i) a construção de um conjunto inevitável de configurações;
- (ii) a prova de que todas essas configurações são redutíveis.

A interação entre entre essas duas etapas é sofisticada, e aí reside a contribuição qualitativa (e não apenas quantitativa) do trabalho de Appel e Haken.

Onde o computador se encaixa? Appel e Haken utilizaram ideias probabilísticas para determinar se uma certa combinação teria chances de ser redutível. Utilizando o computador eles listaram possíveis esquemas de cores e calcularam a proporção de cores que seriam consideradas “boas”. Chegaram às seguintes conclusões: se a proporção for menor que 10% , então a configuração quase não tem chance de ser redutível, com 20% havia grandes chances de ser, e se fosse superior a 30% a redutibilidade era quase certa.

Assim, após um processo que durou mais de um ano, com tentativas, erros e auxílio de computadores, foi obtido um conjunto inicial inevitável de configurações redutíveis. Neste processo, Appel e Haken desenvolveram tamanha percepção do que provavelmente funcionaria para a resolução do problema, que foram capazes de realizar o processo de descarga manualmente e assim construir o conjunto final inevitável sem utilizar o computador. Tal detalhe se torna o ponto crucial da demonstração, pois até aquele momento



já haviam sido construídos conjuntos inevitáveis e já existiam configurações comprovadamente redutíveis, mas ninguém havia sido capaz de completar a tarefa admirável de construir um conjunto inevitável de configurações redutíveis.

## Referências

- [1] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. História da matemática. **Editora Blucher**, 2019.
- [2] DREAMSTIME. *In:* Figuras dos Condados da Inglaterra. Disponível em: [https://pt.dreamstime.com/mapa-dos-condados-cerimoniais-da-inglaterra-brancos-do-pa\\_%\\_C3%ADS-europeu-image177564312](https://pt.dreamstime.com/mapa-dos-condados-cerimoniais-da-inglaterra-brancos-do-pa_%_C3%ADS-europeu-image177564312). Acesso em: 20 out. 2020.
- [3] FARAGO, Jorge Luiz. **Do ensino da história da matemática a sua contextualização para uma aprendizagem significativa**. Dissertação de Mestrado. Florianópolis: UFSC, 2003
- [4] JÚNIOR, D. O. M. **O método de distribuição de cargas**. 2007.
- [5] LIMA, C. L. G. de. **Um estudo sobre teoria dos grafos e o teorema das quatro cores**. 2016. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.
- [6] ROBERTSON, Neil et al. **The four-colour theorem**. journal of combinatorial theory, Series B, v. 70, n. 1, p. 2-44, 1997.
- [7] WILSON, Robert A. **Graphs, colourings and the four-colour theorem**. OUP Oxford, 2002.



## XIV Semana de Matemática do Pontal

26 e 27 de outubro de 2023



# Um resumo da teoria de álgebra linear que pode ser aplicada no controle de um braço robótico

Vitor Hugo Leite Caetano

Universidade Federal de Uberlândia

vitor.caetano@ufu.br

Luciana Aparecida Alves

Universidade Federal de Uberlândia

luciana.alves@ufu.br

**Resumo.** O presente trabalho visa apresentar a importância da álgebra linear na robótica, mais precisamente matrizes de rotação, onde se destacam transformações lineares ortogonais e suas propriedades geométricas. Serão apresentados exemplos, com matrizes e operadores ortogonais em espaços vetoriais. O estudo inclui uma seção prática sobre o controle de braços robóticos, abordando rotações em  $\mathbb{R}^3$ , translações e matrizes homogêneas, além de incluir uma seção voltada à teoria a respeito dos ângulos de Euler. O trabalho fornece uma visão abrangente do conteúdo, combinando teoria e prática.

**Palavras-chave.** Álgebra linear, matrizes de rotação, robótica.

## 1 Introdução

A álgebra linear é uma ferramenta essencial na robótica moderna, permitindo o controle de braços robóticos e outras aplicações diversas, como manufatura, automação e exploração espacial. Um exemplo importante do uso de matrizes nesse caso são as matrizes de rotação, amplamente utilizadas para controlar a posição e orientação de braços robóticos.

Além disso, vale destacar que em aplicações mais avançadas, como a representação da orientação tridimensional de objetos, os ângulos de Euler oferecem uma descrição intuitiva das rotações, enquanto os quatérnios, também desempenham um papel crucial no contexto de rotações, proporcionando uma representação eficiente, otimizada e livre de singularidades para rotações em espaços tridimensionais, sendo cada vez mais adotados em sistemas de controle e simulação na robótica.

Neste trabalho, caracterizaremos as matrizes de rotação e as aplicaremos no controle de juntas robóticas, além de definir a teoria acerca dos ângulos de Euler.



## 2 Transformações ortogonais

Nesta seção vamos abordar alguns exemplos de como inserir citações, definições, teoremas, corolários, demonstrações, exemplos, figuras, tabelas, etc.

**Definição 1.** (a) Considere  $M(m, n)$  o espaço das matrizes reais com  $m$  linhas e  $n$  colunas. Uma matriz  $A \in M(m, n)$  é ortogonal se  $A^t A = I_n$ , onde  $I_n$  denota a matriz identidade de ordem  $n$ .

(b) Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais de dimensão finita munidos de produto interno. Uma transformação linear  $T : V \rightarrow W$  é dita ortogonal quando  $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ , para todo  $u, v \in V$ .

Observe que a igualdade  $A^t A = I_n$  significa que as colunas da matriz  $A$  formam um conjunto de  $m$  vetores ortonormais em  $\mathbb{R}^n$ . Além disso, no caso das matrizes quadradas ortogonais, temos que  $A^{-1} = A^t$ .

As transformações ortogonais possuem diversas propriedades geométricas interessantes, muitas das quais estão contidas no seguinte resultado.

**Teorema 1.** Seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear entre espaços vetoriais reais de dimensão finita providos de produto interno. As seguintes afirmações são equivalentes:

- a.  $T$  é transformação linear ortogonal;
- b.  $T$  preserva norma, isto é,  $\|T(u)\| = \|u\|$ , para todo  $u \in V$ ;
- c.  $T$  preserva distância, isto é,  $\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|$ , para todo  $u, v \in V$ ;
- d. A matriz da transformação  $T$  relativa a qualquer par de bases ortonormais de  $V$  e  $W$  é uma matriz ortogonal;
- e. A transformação  $T$  transforma conjuntos ortonormais de  $V$  em conjuntos ortonormais de  $W$ .

*Demonstração.* Veja [2], Teorema 14.1, pag. 184. □

No presente estudo, trabalharemos apenas com as matrizes quadradas ortogonais. O próximo exemplo caracteriza todas as matrizes quadradas de ordem 2.

**Exemplo 1.** Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

uma matriz ortogonal  $2 \times 2$ . Seja  $u_1 = (a, c) \in \mathbb{R}^2$  um vetor unitário de  $\mathbb{R}^2$ , logo existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $a = \cos \theta$ ,  $c = \sin \theta$ . Temos que  $u_2 = (b, d)$  é um vetor unitário perpendicular a  $u_1$ , assim:  $u_2 = \pm(-\sin \theta, \cos \theta)$ . Logo, existem duas possibilidades para a matriz  $A$ :



$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

No primeiro caso, observe que o polinômio característico de  $A$  é dado por  $p(\lambda) = \lambda^2 - (2 \cos \theta)\lambda + 1$ , o qual não possui raízes reais salvo se  $\theta = 0^\circ$  ou  $= 180^\circ$ , ou seja,  $A = \pm I_2$ . Além disso, no caso no qual a matriz não possui autovalores reais, ela representa a rotação de um ângulo  $\theta$ .

Para o segundo caso, temos  $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$  que possui raízes  $\pm 1$ . Então, dado o operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuja matriz na base canônica é  $A$ , temos que  $T$  admite autovetores  $v_1, v_2$  com  $T(v_1) = v_1$  e  $T(v_2) = -v_2$ . Nesse caso, a matriz  $A$  representa uma reflexão em torno do eixo que contém  $v_1$ , paralelamente a  $v_2$ .

De forma geral, os operadores ortogonais podem ser caracterizados da seguinte forma.

**Teorema 2.** Seja  $A : E \rightarrow E$  um operador ortogonal num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno. Existe uma base ortogonal de  $E$  relativamente a qual a matriz  $A$  tem a forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ & & & & & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \cos \alpha_k & \sin \alpha_k \\ & & & & & & & -\sin \alpha_k & \cos \alpha_k \end{bmatrix}$$

*Demonstração.* Veja [2], Teorema 14.3, pag. 189. □

### 3 Exemplo aplicado

Tomando como base para o estudo, usaremos um exemplo retirado do artigo [1]. Seguindo nesse exemplo, entenderemos mais sobre as transformações lineares empregadas no controle de um braço robótico, o qual rotaciona em torno do próprio eixo  $z$ .



Para tanto, é essencial definir alguns tipos de junta, tais como a junta prismática ou linear, responsável por movimentos em linha reta, e a junta rotacional, que realiza movimentos circulares em torno do seu próprio eixo.

### 3.1 Rotação em $\mathbb{R}^3$

As rotações de um ângulo  $\theta$  em  $\mathbb{R}^3$  podem ser descritas pelas matrizes:

$$R_x = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad R_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Denotaremos por  $R_{01}$  a rotação do sistema 0 para o sistema 1. logo, a posição de um determinado ponto  $p_0$  relativo ao referencial 1 é dada por:

$$R_{01} \cdot p_0 = p_1.$$

A rotação inversa do sistema 1 para o sistema 0 pode ser obtida por:  $p_0 = (R_{01})^t \cdot p_1$ . Agora se o referencial sofrer uma sequência finita de rotações, essa sequência pode ser representada por:  $R_{01} \cdot R_{12} \dots R_{n,n-1}$ .

### 3.2 Translação

A translação de um ponto por uma dada distância é definida por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + D_{01} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{x0} \\ d_{y0} \\ d_{z0} \end{bmatrix}.$$

Define-se a *matriz homogênea* de ordem 4 da seguinte forma:

$$T_{01} = \begin{bmatrix} R_{01} & D_{01} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo  $D_{01}$  a matriz de translação e  $R_{01}$  a matriz de rotação. Note que a linha inferior da matriz não oferece nenhuma informação, já que não foram consideradas perspectiva e escala.

### 3.3 Controle do braço robótico

Considere o problema de descrever o movimento de um braço robótico cuja base gira em torno do eixo  $z$ . A distância do referencial fixo 0 para o referencial 1 é de uma unidade ao longo do eixo  $z$ .



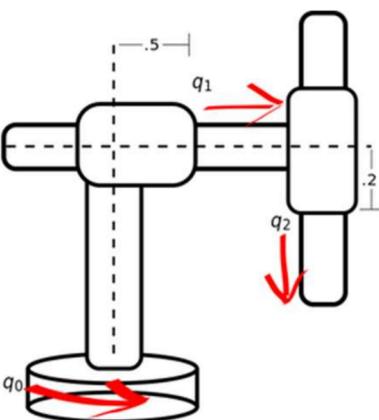
Podemos descrever o movimento da garra através de uma função com parâmetro nas coordenadas das juntas  $q$ , ou seja,

$$u = f(q),$$

onde

- $u$  vetor que permite descrever a posição da garra;
- $q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ , vetor das variáveis das juntas, sendo  $q_i = \theta_i$  para uma junta rotativa e  $q_i = d_i$  para uma junta prismática.

Figura 1: Esquema de um braço robótico.



Fonte [\[1\]](#)

A matriz rotação do referencial fixo 0 para o referencial 1 é dada por:

$$R_{01} = \begin{bmatrix} \cos(q_0) & -\sin(q_0) & 0 \\ \sin(q_0) & \cos(q_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtém-se, assim, a matriz transformação homogênea do referencial fixo 0 para o referencial 1:

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos(q_0) & -\sin(q_0) & 0 & 0 \\ \sin(q_0) & \cos(q_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Quanto à transformação do referencial 1 para o referencial 2, não se verifica rotação (é uma junta prismática), ocorrendo uma translação de  $0,5 + q_1$  ao longo do eixo  $y$  do referencial 1. Deste modo, a matriz transformação é dada por:

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 + q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A última transformação (do referencial 2 para o referencial da garra) obtém-se da translação ao longo do eixo  $z$ :

$$T_{2F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2 - q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a transformação do referencial fixo 0 para o referencial da garra  $F$  obtém-se através da composição das transformações anteriormente enunciadas, isto é:

$$T_{0F} = T_{01}T_{12}T_{2F} = \begin{bmatrix} \cos(q_0) & -\sin(q_0) & 0 & -\sin(q_0)(0,5 + q_1) \\ \sin(q_0) & \cos(q_0) & 0 & \cos(q_0)(0,5 + q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 1,8 - q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, é possível calcular a posição de qualquer ponto da garra relativamente ao referencial fixo 0. Por exemplo, tomando  $p_0 = (0, 0, 0, 1)$  e  $q = (\pi/3, 0.3, 0.4)$ , temos que

$$T_{0F} \cdot p_0 = \begin{bmatrix} -0.693 \\ 0.4 \\ 1.4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

## 4 Ângulos de Euler

Um corpo rígido pode ser descrito no espaço de acordo com sua posição e orientação em relação a um referencial. Seja  $O - xyz$  um referencial ortogonal, onde  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  definem os vetores unitários dos eixos. A posição de um dado ponto  $O'$  em relação ao referencial  $O - xyz$  pode ser expressa da seguinte forma,

$$O' = O'_x \mathbf{x} + O'_y \mathbf{y} + O'_z \mathbf{z}.$$

A descrição da orientação dada por meio de três parâmetros independentes constitui uma representação mínima. De fato, para representar o grupo especial ortonormal  $SO(m)$ ,



são necessários  $m(m - 1)/2$  parâmetros (visto que  $\dim SO(m) = m(m - 1)/2$ ) e, assim, três parâmetros são suficientes para parametrizar  $SO(3)$ , enquanto apenas um é necessário para uma rotação planar  $SO(2)$ .

Tal orientação pode ser alcançada utilizando um conjunto de três ângulos  $\Phi = (\phi, v, \psi)$ . Considere a matriz de rotação que expressa uma rotação elementar em torno de um dos eixos coordenados em função de um único ângulo. Em seguida, uma matriz de rotação genérica pode ser obtida combinando uma sequência apropriada de três rotações elementares, garantindo que duas rotações sucessivas não ocorram em torno de eixos paralelos. Isso implica que existem 12 conjuntos distintos de ângulos permitidos entre todas as 27 combinações possíveis, sendo cada conjunto representativo de um *tripeto de ângulos de Euler*. A seguir, um conjunto de ângulos de Euler será examinado.

#### 4.1 ZYX (ou Roll?Pitch?Yaw).

*ZYX* ou *Roll?Pitch?Yaw* é originalmente derivado do campo aeronáutico, comumente utilizados para denotar as mudanças de altitude de uma aeronave. O ângulo  $\Phi = (\phi, v, \psi)$  representa a rotação em relação a uma estrutura fixa ao centro de massa da mesma, resultando em uma composta de três rotações em sequência, na qual a matriz resultante será obtida seguindo os seguintes passos:

- Gire o referencial pelo ângulo  $\psi$  em torno do eixo  $x$  (*yaw*); essa rotação é descrita pela matriz  $R_x(\psi)$ , formalmente definida na Seção 3.1;
- Gire o referencial pelo ângulo  $v$  em torno do eixo  $y$  (*pitch*); essa rotação é descrita pela matriz  $R_y(v)$ , formalmente definida na Seção 3.1;
- Gire o referencial pelo ângulo  $\phi$  em torno do eixo  $z$  (*roll*); essa rotação é descrita pela matriz  $R_z(\phi)$ , formalmente definida na Seção 3.1.

Dessa forma, temos que,

$$R(\Phi) = R_z(\phi)R_y(v)R_x(\psi). \text{ Ou seja,}$$

$$R(\Phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos v & \cos \phi \sin v \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \sin v \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \sin \phi \cos v & \sin \phi \sin v \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin v \cos \psi - \cos \phi \sin \psi \\ -\sin v & \cos v \sin \psi & \cos v \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Resolver o problema inverso também é importante, isto é determinar os ângulos de Euler associados a uma dada matriz. Considere a seguinte matriz

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}.$$



As seguintes relações podem ser obtidas ao analisar  $R(\Phi)$ , para  $v$  no intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$

$$\phi = \arctan\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right), v = \arctan\left(\frac{-r_{31}}{\sqrt{r_{31}^2 + r_{33}^2}}\right), \psi = \arctan\left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right).$$

É importante destacar que existe uma solução equivalente, para  $v$  no intervalo  $(\pi/2, 3\pi/2)$

$$\phi = \arctan\left(\frac{-r_{21}}{-r_{11}}\right), v = \arctan\left(\frac{-r_{31}}{-\sqrt{r_{31}^2 + r_{33}^2}}\right), \psi = \arctan\left(\frac{-r_{32}}{-r_{33}}\right).$$

## 5 Conclusão

Neste trabalho apresentamos a teoria acerca das transformações lineares ortogonais, as quais podem ser aplicadas no controle de um braço robótico, utilizando matrizes de rotação para descrever posições e orientações em um espaço 3D. Falamos sobre os ângulos de Euler, essenciais para descrever a orientação de objetos em espaços tridimensionais, sendo amplamente empregados em diversas áreas, como matemática, física e engenharia. A compreensão dessas técnicas é crucial para o desenvolvimento de sistemas robóticos cada vez mais precisos e eficientes, com aplicações na automação industrial, manufatura, exploração espacial, etc.

## Referências

- [1] COSTA, A. L. da S.. **Álgebra linear aplicada no controlo de um braço robótico**. 2020. Disponível em :[https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1126518382274862/AL\\_Ana.pdf](https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1126518382274862/AL_Ana.pdf). Acesso em 02 de maio de 2023.
- [2] LIMA, E. L. **Álgebra linear**. Coleção Matemática Universitária. 3<sup>a</sup> Edição. Rio de Janeiro: SBM, 1999.
- [3] SICILIANO, Bruno [et al.]. **Robotics: Modelling, Planning and Control**. 9 ed. Itália: Springer, 2009. ISBN 978-1-84628-641-4.



## XIV Semana de Matemática do Pontal

26 e 27 de outubro de 2023

---

### O problema da Basíleia

Silas Silveira Campos

Universidade Federal de Uberlândia

[silas.campos@ufu.br](mailto:silas.campos@ufu.br)

Evaneide Alves Carneiro

Universidade Federal de Uberlândia

[eva.ac@ufu.br](mailto:eva.ac@ufu.br)

**Resumo.** O Problema da Basíleia é um famoso problema da Teoria dos Números proposto pela primeira vez por Pietro Mengoli e resolvido por Leonhard Euler em 1735. Ele consiste em encontrar a soma exata dos inversos dos quadrados dos inteiros positivos, ou seja, a soma de uma série infinita. Durante um longo período, a demonstração de Euler continha um trecho considerado como incorreto. Contudo, após o desenvolvimento do Teorema da Fatoração de Weierstrass o problema foi finalmente validado. Diante do contexto apresentado, a partir de uma revisão bibliográfica, o presente trabalho tem como objetivo detalhar a demonstração devida do Problema da Basíleia do matemático Tom Mike Apostol. É apresentada também a prova da divergência da série harmônica, considerada essencial para a solução do Problema da Basíleia, a convergência da soma dos inversos dos quadrados perfeitos e uma breve explicação da demonstração de Euler.

**Palavras-chave.** Problema da Basíleia; demonstração; Leonhard Euler.

### Introdução

O problema que levou Leonhard Euler à fama foi inicialmente proposto pelo matemático italiano Pietro Mengoli, e ficou conhecido como Problema da Basíleia. Apesar dos esforços dos principais matemáticos da época, a solução ainda não havia sido encontrada, o que gerou um mistério em torno do problema. Entre as grandes mentes que tentaram resolvê-lo estavam Gottfried Wilhelm Leibniz, John Wallis, Henry Oldenburg e os matemáticos da família Bernoulli [2].

Por um período, Jakob Bernoulli tentou abordar o problema, mas sem sucesso, embora tenha publicado algo sobre o assunto em 1689. Com a morte de Jakob, seu irmão Johann Bernoulli assumiu seu cargo de professor na Universidade de Basileia, na Suíça, onde teve Leonhard Euler como um de seus alunos [2]. Provavelmente, foi Johann quem



apresentou o problema a Euler, que na época era apenas um aluno brilhante. Após resolver o problema, Euler chamou a atenção não somente de seus professores na Universidade, mas de toda a comunidade acadêmica da época.

O nome Problema da Basileia se deve ao fato de Euler ter nascido, se formado e o ter resolvido nesta cidade. Ele consiste em encontrar a soma dos inversos dos quadrados perfeitos, ou seja, a soma exata da série infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Tal problema foi um grande desafio ao longo do tempo, no qual apareceram diferentes resoluções de matemáticos, inclusive a de Euler, que continha uma imprecisão. O objetivo do presente trabalho é detalhar a demonstração do Problema da Basileia apresentada por Apostol [I]. Começaremos vendo a prova da divergência da série harmônica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

e a seguir mostraremos a convergência, para o valor de  $\frac{\pi^2}{6}$ , da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

## 1 Divergência da série harmônica

A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  é chamada **série harmônica**. Ela é divergente, mas isto não segue do teste do  $n$ -ésimo termo, pois  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ . A divergência ocorre porque não há limitante superior para suas somas parciais.

A soma parcial  $s_{2^n}$  pode ser escrita da seguinte forma (Veja [3]):

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)}_{>2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right)}_{>4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left( \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} \right)}_{>8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots \\ &\quad \dots + \underbrace{\left( \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)}_{>2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + n \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Portanto, a série diverge. A divergência da série harmônica nos leva a questionar o que acontece se, ao invés de somarmos os inversos dos inteiros positivos, somarmos os quadrados dos inversos. Neste caso, como veremos a seguir, a série converge.



## 2 Convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Agora mostraremos o que acontece com a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k \cdot k} &< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(k-1)k} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{k} < 1. \end{aligned}$$

Quando  $k$  tende ao infinito, temos  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{k}\right] = 1$ . Assim,

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k \cdot k} < 1,$$

e portanto,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k \cdot k} < \frac{1}{1^2} + 1$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} < 2.$$

Logo, a sequência das somas parciais da série analisada é crescente e limitada superiormente, logo é convergente.

## 3 A soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

### 3.1 Prova de Euler

Em 1735, mais de 90 anos após o lançamento da questão, Leonhard Euler apresentou uma “demonstração” que  $\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , descrita a seguir, e que na época surpreendeu a todos devido à sua originalidade.

**Passos da demonstração.** Para a demonstração completa, veja [\[2\]](#).



- Considera-se a série de Maclaurin da função seno,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

- Dividindo por  $x$  de ambos os lados da igualdade, e substituindo  $x$  por  $\sqrt{x}$ , obtém-se:

$$\frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \dots$$

- Os zeros da função  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$  são  $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, 16\pi^2, \dots$
- Já era conhecido na época de Euler que todo polinômio  $p(x)$  com raízes  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , pode ser escrito como um produto envolvendo suas raízes.
- Assumindo que esta propriedade dos polinômios continua valendo para séries de potências e aplicando-a à função  $f(x)$ , conclui-se que:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \dots$$

- Multiplicando ambos os lados por  $\pi^2$  chega-se ao resultado desejado:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

□

O problema na resolução de Euler está em generalizar a propriedade de polinômios para uma série de potências, o que nem sempre é válido.

## 3.2 Prova de Apostol

A demonstração de Apostol faz uso de integrais duplas.

Consideremos a integral:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy.$$

Expandindo o integrando em uma série geométrica e calculando a integral termo a termo, obtemos:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n dx dy = \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2). \end{aligned}$$



Calculando a integral de outra forma, mostraremos que  $I = \frac{\pi^2}{6}$ . Utilizaremos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x = \frac{u - v}{\sqrt{2}}; \\ y = \frac{u + v}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (1)$$

Fazendo  $x = 0$  e  $x = 1$  em (1) obtemos, respectivamente:

$$\frac{u - v}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v,$$

$$\frac{u - v}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow u - v = \sqrt{2} \Rightarrow u = \sqrt{2} + v.$$

Agora, fazendo  $y = 0$  e  $y = 0$  em (1), obtemos:

$$\frac{u + v}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow u + v = 0 \Rightarrow u = -v,$$

$$\frac{u + v}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow u + v = \sqrt{2} \Rightarrow v = \sqrt{2} - u.$$

Calculando o jacobiano da mudança de variáveis acima, temos:

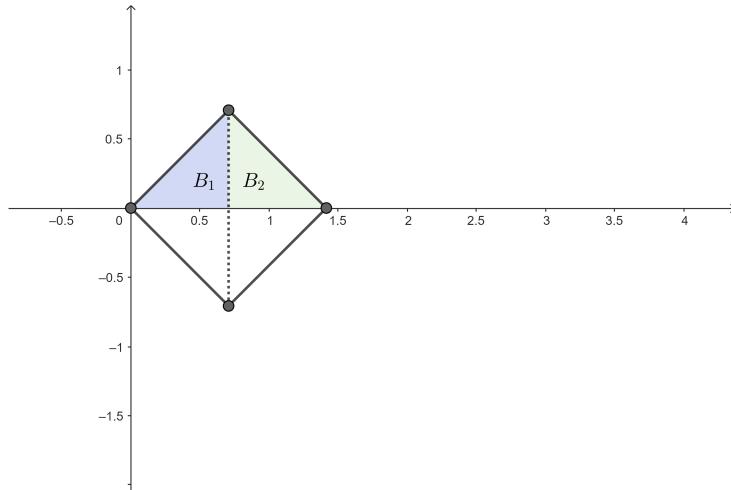
$$\begin{aligned} J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

A nossa nova região de integração no plano uv será:

$$A = \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \frac{u - v}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow u = v \\ x = 1 \Rightarrow \frac{u - v}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow u = \sqrt{2} + v \\ y = 0 \Rightarrow \frac{u + v}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow u = -v \\ y = 1 \Rightarrow \frac{u + v}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow u = \sqrt{2} - v \end{cases}$$



Figura 1: Região de integração



Fonte: O Autor.

Além disso,

$$1 - xy = 1 - \left( \frac{u - v}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{u + v}{\sqrt{2}} \right) = 1 - \frac{(u^2 - v^2)}{2} = \frac{2 - u^2 + v^2}{2}.$$

Sendo assim, a integral fica:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} dx dy = \iint_A \frac{2}{2 - u^2 + v^2} dA = 2 \iint_A \frac{1}{2 - u^2 + v^2} dudv.$$

E como podemos perceber na figura (1), a região  $A$  é simétrica em relação ao eixo  $u$ , pois todos os pontos acima do eixo das abscissas, são reflexos na parte de baixo. Além disso, a função a ser integrada é par na variável  $u$ . Portanto,

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_A \frac{1}{2 - u^2 + v^2} dudv = 2 \cdot 2 \iint_B \frac{1}{2 - u^2 + v^2} dudv \\ &= 4 \left[ \iint_{B_1} \frac{1}{2 - u^2 + v^2} dudv + \iint_{B_2} \frac{1}{2 - u^2 + v^2} dudv \right] \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_0^u \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} \right) du + 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}-u} \left( \int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} \right) du. \end{aligned}$$

Notemos que:



$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{a^2 + t^2} dt &= \int_0^x \frac{1}{a^2 \left(1 + \frac{t^2}{a^2}\right)} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^x \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} dt \\ &= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right) \Big|_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right).\end{aligned}$$

Dessa forma, fazendo a substituição  $a^2 = 2 - u^2$  (logo,  $a = \sqrt{2 - u^2}$ ), ficamos com:

$$\int_0^u \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} = \frac{1}{\sqrt{2 - u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2 - u^2}}\right)$$

e

$$\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} = \frac{1}{\sqrt{2 - u^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2} - u}{\sqrt{2 - u^2}}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}I &= 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2 - u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2 - u^2}}\right) du + 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2 - u^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2} - u}{\sqrt{2 - u^2}}\right) du \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Calcularemos as integrais utilizando substituições trigonométricas. Temos:

$$I_1 = 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2 - u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2 - u^2}}\right) du \stackrel{(2)}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = 4 \left[ \frac{\theta^2}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{6}} = 2 \left[ \frac{\pi}{6} \right]^2.$$

### Substituição

$$\begin{aligned}u &= \sqrt{2} \sin(\theta) \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = \sqrt{2} \cos(\theta) \Rightarrow du = \sqrt{2} \cos(\theta) d\theta \\ u &= 0 \Rightarrow 0 = \sin(\theta) \Rightarrow \theta = 0, \\ u &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \sin(\theta) \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin(\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad (2) \\ \sqrt{2 - u^2} &= \sqrt{2 - 2 \sin^2(\theta)} = \sqrt{2} \cos(\theta) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2 - u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2 - u^2}}\right) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cos(\theta)} \arctan\left(\frac{\sqrt{2} \sin(\theta)}{\sqrt{2} \cos(\theta)}\right) \sqrt{2} \cos(\theta) d\theta = \theta d\theta\end{aligned}$$



Além disso, temos:

$$I_2 = 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \left( \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} \right) du \stackrel{(3)}{=} 8 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = 8 \left[ \frac{\theta^2}{2} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{6}} \right] = 4 \cdot \left( \frac{\pi}{6} \right)^2.$$

A substituição e as relações utilizadas nessa última integral estão descritas a seguir.

### Substituição

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2} \cos(2\theta) \Rightarrow du = -2\sqrt{2} \sin(2\theta) d\theta \\ u &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cos(2\theta) \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos(2\theta) \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \\ u &= \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2} \cos(2\theta) \Rightarrow 1 = \cos(2\theta) \Rightarrow 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \quad (3) \\ \sqrt{2-u^2} &= \sqrt{2-2\cos^2(2\theta)} = \sqrt{2}\sin(2\theta) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \left( \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} \right) du = \\ &= \frac{-2}{\sqrt{2}\sin(2\theta)} \arctan \left( \frac{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}{\sqrt{2}\sin(2\theta)} \right) \sqrt{2}\sin(2\theta) d\theta = \\ &\stackrel{(4)}{=} -2 \arctan(\tan(\theta)) = -2\theta d\theta \end{aligned}$$

A penúltima igualdade do quadro acima se justifica pelo seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos(2\theta)}{\sqrt{2-\sqrt{2^2}\cos^2(2\theta)}} = \frac{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}{\sqrt{2-2\cos^2(2\theta)}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}{\sqrt{[\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos(2\theta)][\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos(2\theta)]}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}{\sqrt{\sqrt{2}(1+\cos(2\theta)) \cdot \sqrt{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}}} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}{\sqrt{2}(1+\cos(2\theta))}} \\ &= \sqrt{\frac{2\sin^2(\theta)}{2\cos^2(\theta)}} = \tan(\theta). \quad (4) \end{aligned}$$

## 4 Conclusão

No presente trabalho, a partir de uma revisão bibliográfica, foi feito o detalhamento da demonstração do Problema da Basiléia apresentada por Apostol [4]. Inicialmente a prova realizada por Euler continha algumas incertezas que matemáticos buscaram solu-



cionar ao longo do tempo. Assim, abordamos a demonstração de Euler, a divergência da série harmônica, e a convergência da soma dos inversos dos quadrados perfeitos.

## Referências

- [1] APOSTOL, T. M. A proof that Euler Missed: Evaluating  $\zeta(2)$  the Easy Way. **The Mathematical Intelligencer**, v. 5, n. 3, Springer-Verlag New York, 1983. Disponível em: <<https://fermatslibrary.com/s/a-proof-that-euler-missed>>. Acesso em: 11 out. 2023.
- [2] GAYO, J., PROBST, R. O problema que tornou Euler famoso. **Ciência e Natura**, v. 37, p. 342-355, 2015.
- [3] ZAHN, M. **Sequências e séries**. [s.l.]: [s.n.], 2017. Disponível em: <[https://wp.ufpel.edu.br/zahn/files/2017/04/seq\\_ser.pdf](https://wp.ufpel.edu.br/zahn/files/2017/04/seq_ser.pdf)>. Acesso em: 11 out. 2023.