



Anais da XIV Mostra IC 2025

PET Matemática



Apresentação

A Mostra de Iniciação Científica é constituída principalmente por apresentações orais de alunos de Ensino Médio e Graduação que são orientados por professores do IME/UFU e de alunos de graduação de cursos de Matemática das faculdades da região. O evento conta ainda com palestras e mesa redonda, na forma virtual, abordando temas de Matemática Pura, Matemática Aplicada, Educação Matemática e Estatística, ministradas por docentes convidados.

Esta é a 14ª edição da Mostra de Iniciação Científica. É um evento organizado pelos integrantes do PET Matemática da UFU Campus Santa Mônica, com apoio da Coordenação do Curso de Matemática e de docentes do IME/UFU.

A publicação Anais da Mostra IC tem periodicidade anual. Cada edição é publicada após a realização do evento que, em geral, ocorre entre os meses de maio e julho. Para este, são aceitos artigos apenas na língua portuguesa.

EDITORES

Gabriel Melo Gomes Pereira
Joangelo Marins Alves
Lorena Bezerra de Almeida
Marcus Augusto Bronzi

RESPONSÁVEL PELA PUBLICAÇÃO

Marcus Augusto Bronzi
Avenida João Naves de Ávila, 2121 Bloco 1F - Sala 1F120 - Santa Mônica, Uberlândia - MG

COMISSÃO ORGANIZADORA

PET Matemática UFU - Campus Santa Mônica

PETIANOS E PETIANAS

Amanda Florentino de Araujo
Carolina Silva Alves
Elmira Rosa Silva de Melo
Enrique Barbosa Oliveira
Gabriel Melo Gomes Pereira
Gabriela Alonso Pereira Badglian
Gustavo Zago Barbosa
Inaya Faria Nomura
Joangelo Marins Alves
Kaic Porfírio Almeida
Lorena Bezerra de Almeida
Robert Vieira de Araújo
Thamires Sartori Pereira
Theo Marques Rodrigues Teófilo

TUTOR

Marcus Augusto Bronzi

COMITÊ CIENTÍFICO

Douglas Marin (Educação Matemática)
Josuel Kruppa Rogenski (Matemática Aplicada)
Patrícia Viana da Silva (Estatística)
Sarah Faria Monteiro Mazzini Costa (Matemática Pura)

Copyright©2025. Todos os direitos reservados aos autores e autoras e ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia. Qualquer parte desta publicação pode ser reproduzida, desde que atribuídos os devidos créditos de autoria.

Essa obra é pública e gratuita, não sendo permitida nenhuma forma de alteração ou a sua utilização para fins comerciais. Os conteúdos das partes são de responsabilidade dos seus autores.

Sumário

A Transição da Matemática Antiga	7
<i>Enrique Barbosa Oliveira, Hernán Roberto Montúfar López</i>	
Análise das diferentes métricas em \mathbb{R}^n e suas implicações	15
<i>Joangelo Marins Alves, Ana Paula Tremura Galves</i>	
Cadeias Infinitas de Semigrupos Numéricos	23
<i>Israel Mendonça Gonçalves, Alonso Sepúlveda Castellanos</i>	
Cálculo Fracionário e suas Aplicações	28
<i>Henrique Lima Betti, Elisa Regina dos Santos</i>	
Caoticidade de operadores do tipo shift em espaços de sequências	36
<i>Denilson Rodrigues Junior, Vinícius Vieira Fávaro</i>	
Cinemática Inversa com Referências Relativa e Global: Uma Implementação em Unity com HLSL e C#	44
<i>Enrique Barbosa Oliveira, Luis Florial Espinoza Sánchez, Santos Alberto Enriquez Remigio</i>	
Comparando Restos de Anéis Quocientes	52
<i>Robert Vieira de Araujo, Victor Gonzalo Lopez Neumann</i>	
Contribuições Matemáticas da Grécia Antiga - Linhas de pensamento Secundárias	60
<i>Giovanna Soares Vieira, Hernan Roberto Montufar Lopez</i>	
Contagem de pontos periódicos de um subshift caótico e uma sequência do tipo Tribonacci	68
<i>Gabriel Freitas Costantin, Jean Venato Santos</i>	
Definição, Construção e Propriedades do Produto Tensorial entre Espaços Vetoriais . . .	76
<i>Daniel Barreto de Oliveira, Neiton Pereira da Silva</i>	
Desvendando o Termo Geral de uma Progressão Geométrica	84
<i>Carolina Silva Alves, Herick José Rodrigues Chaveiro, Ana Claudia Molina Zaqueu Xavier</i>	
Do batimento ao gráfico: uma experiência Interdisciplinar no Ensino de Frequência Cardíaca, Matemática e Física	91
<i>Bianca Sacoman de Moura, Muriel Francisco da Costa, Arlindo José de Souza Junior</i>	
Dos Logaritmos às Engrenagens: Uma Jornada Histórica no Mundo dos Cálculos	99

Gabriel Melo Gomes Pereira, Hernán Roberto Montúfar López

Entre Documentos e Relatos: Um Estudo Historiográfico sobre o Laboratório de Ensino de Matemática	107
<i>Higor Eduardo Soares da Silva, Ana Cláudia Molina Zaqueu Xavier</i>	
Espaços de Riesz e Reticulados de Banach	112
<i>Lorena Bezerra de Almeida, Elisa Regina dos Santos</i>	
Euclides de Alexandria: uma breve exposição de suas Obras no cenário da História da Matemática	120
<i>Bianca Sacoman de Moura, Hernán Roberto Montúfar López</i>	
Funções aritméticas: Uma relação entre a função totiente de Euler $\varphi(n)$ e a função de Möbius $\mu(n)$	128
<i>Joangelo Marins Alves, Josimar Joao Ramirez Aguirre</i>	
Funções contínuas sem derivada em nenhum ponto	136
<i>Elmira Rosa Silva de Melo, Elisa Regina dos Santos</i>	
Identificando Raízes de Polinômios Irredutíveis sobre Corpos Finitos	144
<i>Caio Alvarenga Marcondes, Victor Gonzalo Lopez Neumann</i>	
O Legado Geométrico de Apolônio de Perga	152
<i>Lorena Bezerra de Almeida, Hernán Roberto Montúfar López</i>	
O Ocidente Latino	160
<i>Gabriel Henrique de Oliveira, Hernán Roberto Montúfar López</i>	
O Problema de Napoleão com Números Complexos	168
<i>Elizeu Gonçalves Muniz Neto, Guilherme Chaud Tizziotti</i>	
Os três famosos problemas da Grécia Antiga	175
<i>Oscar Hailuo Liu Zhang, Hernán Roberto Montúfar López</i>	
Possibilidades metodológicas na pesquisa em Educação Matemática: a revisão sistemática de literatura	183
<i>Matheus Carvalho Carrijo Silveira, Fabiana Fiorezi de Marco</i>	
Representações de álgebras de Lie	190
<i>Theo Marques Rodrigues Teófilo, Luciana Aparecida Alves</i>	
SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO UNIDIMENSIONAIS COM TERMO FONTE SINGULAR VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS E REFINAMENTO LOCAL DE MALHA	198
<i>Gabriel Melo Gomes Pereira, Santos Alberto Enriquez Remigio</i>	
Sobre Arquimedes de Siracusa	206
<i>Jackson Johnson Cunha Silva, Hernán Roberto Montúfar López</i>	

Transformação de Equações em Problemas de Mínimo e sua Solução com Gradiente Descendente	214
<i>Thamires Sartori Pereira, Santos Alberto Enriquez Remigio</i>	
Trabalhando com números na China Antiga	222
<i>Robert Vieira de Araujo, Hernán Roberto Montúfar López</i>	
O uso do ChatGPT para trabalhar o erro no Ensino de Matemática	228
<i>Gabriela Alonso Pereira Badiglian, Ana Claudia Molina Zaqueu Xavier</i>	



A Transição da Matemática Antiga

Enrique Barbosa Oliveira

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
enriboliveira@ufu.br

Hernán Roberto Montúfar López

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
montufar@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

História da matemática.
Matemática Grega.
Trigonometria.

Este trabalho aborda a transição da matemática antiga no período de 300 a.C. a 529 d.C., destacando o declínio da tradição matemática grega e a influência crescente de outras civilizações, como a bizantina. São exploradas as contribuições de figuras importantes, como Nicômaco de Gerasa, Diofante de Alexandria e Pappus de Alexandria, que influenciaram o desenvolvimento da teoria dos números, da álgebra e da geometria. Além disso, discute-se o papel de Boécio na preservação do conhecimento matemático clássico e a continuidade desse legado no Império Bizantino, que desempenhou um papel crucial na transmissão da matemática grega para o mundo islâmico e, posteriormente, para a Europa medieval.

1 Introdução

A transição da matemática antiga, compreendida entre 300 a.C. e 529 d.C., marca um período de declínio da matemática grega e de influência crescente de outras civilizações, como a bizantina. Apesar das dificuldades, avanços importantes ocorreram, especialmente na teoria dos números e na trigonometria.

A matemática grega entrou em declínio entre os períodos de Hiparco e Ptolomeu, com a predominância da matemática aplicada em astronomia, óptica e geografia. A trigonometria foi o principal campo de avanço. Apesar da influência romana e da limitação da álgebra geométrica grega, o conhecimento foi preservado e transmitido para o mundo árabe e hindu, [1].

2 Nicômaco de Gerasa e a Teoria dos Números

Nicômaco (c. 60 - 120 d.C.) trouxe contribuições à teoria dos números, vendo-os como entidades com propriedades próprias. Ele considerava os números como expressões de harmonia universal, influenciando profundamente a tradição pitagórica. Sua obra principal, *Introdução à Aritmética*, foi um dos primeiros tratados sistemáticos sobre a teoria dos números, abordando conceitos como números perfeitos, amigáveis e figurados.

Seu teorema principal estabelece que a soma de grupos sucessivos de ímpares resulta nos cubos dos inteiros:

$$\begin{array}{ccccccc} 1; & 3+5; & 7+9+11; & 13+15+17+19; & \dots \\ 1^3; & 2^3; & 3^3; & 4^3; & \dots \end{array}$$

Essa relação conecta-se à observação pitagórica de que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2 :

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

Conclui-se que a soma dos n primeiros cubos perfeitos é igual ao quadrado da soma dos n primeiros inteiros:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 &= \sum_{k=1}^6 (2k-1) = 6^2 = (1+2+3)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= \sum_{k=1}^{10} (2k-1) = 10^2 = (1+2+3+4)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= \sum_{k=1}^{15} (2k-1) = 15^2 = (1+2+3+4+5)^2 \end{aligned}$$

Nicômaco também explorou propriedades dos números triangulares e quadrados, relacionando-os às séries aritméticas. Apesar de sua abordagem mais filosófica do que algébrica, suas ideias influenciaram matemáticos posteriores, como Boécio e os pensadores medievais islâmicos e europeus.

3 Diofante de Alexandria e a Arithmetica

Diofante (c. 200 - 284 d.C.) é considerado o "pai da álgebra". Sua obra *Arithmetica* introduziu um novo ramo da matemática, afastado da geometria grega e mais próximo da álgebra babilônica. Seu trabalho focava na solução exata de equações determinadas e indeterminadas, dando origem à análise diofantina. Diofante, destacou-se pelo uso inovador de notação algébrica, embora sua abordagem não fosse sistemática. Sua obra *Arithmetica* consiste em cerca de 150 problemas resolvidos numericamente, sem uma exposição formal de conceitos algébricos ou métodos gerais. Ele não distinguia claramente problemas determinados e indeterminados, muitas vezes oferecendo apenas uma solução específica, mesmo quando infinitas soluções eram possíveis.

Em um de seus problemas, Diofante busca dois números x e y tais que, ao somar cada um ao quadrado do outro, o resultado seja um quadrado perfeito. Ele define os números como x e $2x + 1$, logo:

- Primeiramente, $x^2 + (2x + 1) = (x + 1)^2$ fornecendo um quadrado perfeito qualquer que seja o valor de x escolhido.
- Seguidamente, exige-se também que $(2x + 1)^2 + x$ seja um quadrado perfeito. Diofante escolhe um caso particular de quadrado perfeito, $(2x - 2)^2$. De modo que:

$$(2x + 1)^2 + x = (2x - 2)^2$$

Expandindo ambos os lados: $4x^2 + 4x + 1 + x = 4x^2 - 8x + 4 \Rightarrow 13x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{13}$.

Substituindo x na expressão $2x + 1$ temos: $y = 2 \times \frac{3}{13} + 1 \Rightarrow y = \frac{19}{13}$.

Esse método ilustra a abordagem de Diofante, que escolhia um caso particular para transformar um problema complexo em uma equação linear solucionável. Embora essa técnica não generalize todas as soluções possíveis, ela reflete o pensamento algébrico pioneiro de Diofante na busca de soluções racionais.

4 Papus de Alexandria e a Geometria Grega

Papus de Alexandria (c. 300 d.C.) foi um dos últimos grandes matemáticos da Grécia Antiga e desempenhou um papel fundamental na preservação e desenvolvimento da geometria clássica. Sua principal obra, *Coleção Matemática*, compila e expande conhecimentos geométricos anteriores, além de apresentar novas descobertas.

4.1 A Trisseccção de um Ângulo segundo Papus

No livro IV de sua obra, Papus enfatiza a importância de utilizar construções geométricas apropriadas para cada tipo de problema. Ele argumenta que não se deve resolver problemas sólidos utilizando

apenas lugares geométricos lineares, assim como problemas planos não devem ser solucionados com métodos sólidos ou lineares. Com base nesse princípio, ele propõe uma abordagem específica para a trissecção de um ângulo, utilizando secções cônicas.

Papus considera um ângulo AOB inserido em um círculo com centro O . Na Figura 1 ele traça OC como a bissetriz do ângulo e constrói uma hipérbole com A como um dos focos e OC como a diretriz correspondente, assumindo uma excentricidade igual a 2. O ponto T onde essa hipérbole intercepta a circunferência do círculo possui a propriedade de que o ângulo é um terço do ângulo. Dessa forma, a trissecção do ângulo é obtida geometricamente.

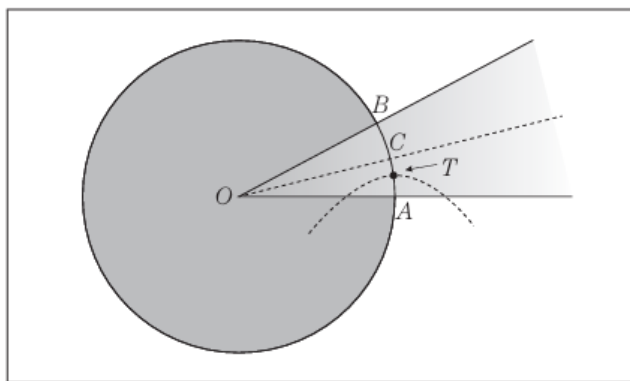


Figura 1: Trissecção de um Ângulo

A abordagem de Papus contrasta com os métodos anteriores de Arquimedes, que utilizou a neusis (uma construção baseada em régua móvel) e a espiral para resolver o problema. A utilização das cônicas para a trissecção do ângulo reflete o aprofundamento do estudo das curvas geométricas na matemática helenística e influenciou desenvolvimentos posteriores na geometria analítica.

Papus contribuiu significativamente para a teoria das secções cônicas ao empregar propriedades dessas curvas para resolver problemas clássicos da geometria. Seu método de trissecção demonstra a sofisticação dos matemáticos alexandrinos e seu compromisso com a busca por construções matematicamente rigorosas e apropriadas ao problema em questão.

4.2 Papus e as Médias Aritmética, Geométrica e Harmônica

Papus de Alexandria, um dos últimos grandes matemáticos da antiguidade, contribuiu significativamente para a geometria e teoria das proporções. Em um de seus estudos sobre médias matemáticas, ele apresentou uma demonstração que generalizava conhecimentos anteriores sobre a relação entre as médias aritmética, geométrica e harmônica.

No semicírculo ADC com centro em O Figura 2, como mostrado na figura correspondente, considere $DB \perp AC$ e $BF \perp OD$. Papus demonstra que DO representa a média aritmética entre os segmentos AB e BC , DB é a média geométrica, e DF é a média harmônica dessas grandezas. A construção desse resultado é feita através de considerações geométricas sobre retas perpendiculares e relações de proporcionalidade, alinhadas com a tradição matemática grega.

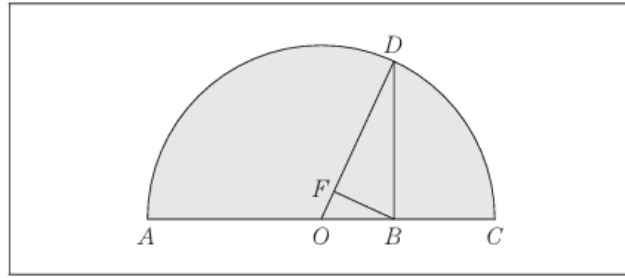


Figura 2: Médias Aritmética, Geométrica e Harmônica

Papus menciona que foi o autor apenas da demonstração, atribuindo a construção original a um geômetra cujo nome não foi citado. Esse resultado exemplifica a abordagem grega de interligar conceitos algébricos e geométricos, consolidando o estudo das médias matemáticas dentro da tradição clássica.

4.3 O Teorema de Papus

O teorema de Papus pode ser visto como uma generalização do teorema de Pitágoras. *Se ABC é qualquer triângulo, Figura 3, e se $ABDE$ e $CBGF$ são quaisquer paralelogramos construídos sobre dois dos lados, então Papus constrói sobre o lado AC um terceiro paralelogramo $ACKL$ igual à soma dos dois outros.*

Isso se faz facilmente, prolongando os lados FG e ED até se encontrarem em H , depois traçando HB e prolongando-o até encontrar o lado AC em J , e finalmente traçando AL e CK paralelos a HBJ .

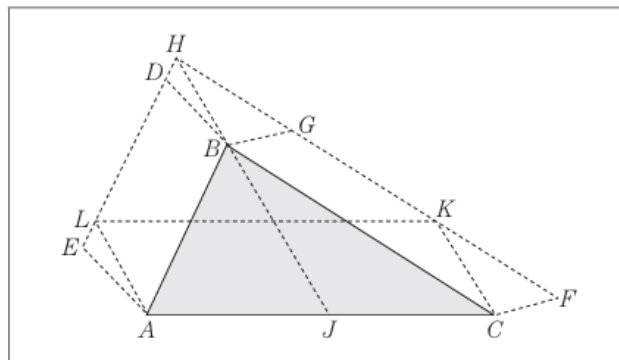


Figura 3: Generalização do teorema de Pitágoras

R será o ponto de intersecção de LK com HJ . Os paralelogramos $ABDE$ e $ABHL$ possuem a mesma área, devido ao fato de terem o mesmo comprimento de base e altura. O mesmo argumento se aplica aos paralelogramos $BCFG$ e $BCKH$. Analogamente para os paralelogramos $ABHL$ e $AJRL$, como também para $BCKH$ e $JCKR$. Isso já nos fornece o resultado desejado, pois temos:

$$A_{ABDE} + A_{BCFG} = A_{ABHL} + A_{BCKH}$$

$$\begin{aligned}
 &= A_{AJRL} + A_{JCKR} \\
 &= A_{ACKL}
 \end{aligned}$$

Esse teorema mostra uma relação fundamental entre figuras geométricas associadas a um triângulo, demonstrando que a soma das áreas dos dois primeiros paralelogramos pode ser transferida para um único paralelogramo construído sobre o terceiro lado. Embora seja conhecido como Teorema de Papus, há indícios de que Heron de Alexandria já tivesse conhecimento dessa propriedade anteriormente.

4.4 O Teorema das Tangências de Papus

Outro exemplo de generalização encontrada no Livro IV da *Coleção Matemática*, que também leva o nome de Papus, estende teoremas de Arquimedes sobre a "faca do sapateiro" (Figura 4). O teorema afirma que, se uma sequência de círculos $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_n, \dots$ for inscrita dentro da região cinza sucessivamente, todos sendo tangentes aos semicírculos construídos sobre os segmentos AB e AC , e se cada novo círculo for tangente ao anterior, então a distância perpendicular do centro do n -ésimo círculo à base da configuração é igual a n vezes o diâmetro do n -ésimo círculo.

Esse resultado demonstra uma progressão geométrica na disposição dos círculos inscritos, o que revela uma importante propriedade de alinhamento e distribuição geométrica dentro de uma construção baseada em tangências sucessivas. Essa propriedade foi essencial para os desenvolvimentos posteriores da geometria das tangências e da teoria das cadeias de círculos.

O estudo das tangências desempenhou um papel crucial no desenvolvimento da matemática, influenciando as investigações sobre configurações geométricas complexas. Esse teorema de Papus serviu como base para avanços na teoria dos círculos e influenciou a matemática islâmica medieval, sendo retomado posteriormente por matemáticos como Descartes, na formulação de relações algébricas envolvendo círculos tangentes.

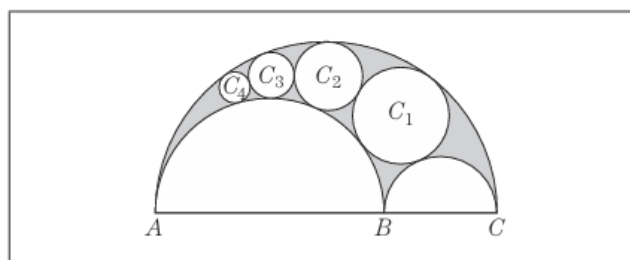


Figura 4: Extensão do teorema de Arquimedes sobre a faca do sapateiro, por Papus

5 O Papel de Boécio e o Fim da Matemática Antiga

A transição da matemática antiga para a era medieval foi marcada pelo declínio da tradição matemática greco-romana e pela preservação desse conhecimento em obras selecionadas. Entre os

personagens fundamentais desse período está Anício Mânlio Torquato Severino Boécio (c. 480 – 524 d.C.), um filósofo e matemático romano cuja influência perdurou durante a Idade Média.

Boécio desempenhou um papel essencial na transmissão do conhecimento matemático clássico para o Ocidente medieval. Seu objetivo era traduzir e comentar obras matemáticas e filosóficas gregas para o latim, permitindo a continuidade desse conhecimento dentro do mundo latino-cristão. Embora tenha traduzido algumas obras de Euclides e Nicômaco de Gerasa, sua maior contribuição foi a sistematização da teoria dos números e da música dentro do quadrivium, conjunto das quatro artes matemáticas (aritmética, geometria, música e astronomia) que estruturaram o ensino medieval.

A obra matemática mais influente de Boécio foi o tratado *De Institutione Arithmetica*, baseado nas ideias de Nicômaco de Gerasa. Esse trabalho apresentou conceitos fundamentais de teoria dos números, incluindo proporções, progressões e propriedades dos números figurados. No entanto, diferentemente dos matemáticos gregos, Boécio não se preocupou com demonstrações rigorosas, o que caracterizou a matemática medieval como uma disciplina mais teórica e especulativa do que aplicada.

O fim da matemática antiga ocorreu com o fechamento da Academia de Platão em 529 d.C. pelo imperador Justiniano. Esse evento simbolizou a ruptura entre a tradição matemática clássica e a nova era medieval, onde a matemática passou a ser preservada quase exclusivamente pelos estudiosos cristãos e posteriormente pelos matemáticos islâmicos. Sem a produção de novos tratados significativos no Ocidente, a matemática grega perdeu seu dinamismo, sendo retomada apenas séculos depois, com a redescoberta dos textos antigos e sua reintrodução na Europa através do contato com o mundo islâmico.

Assim, Boécio representa a última figura significativa da matemática clássica no Ocidente latino antes do declínio do pensamento matemático greco-romano. Sua obra garantiu que os conceitos fundamentais da matemática antiga sobrevivessem até a redescoberta renascentista, influenciando séculos de ensino e estudo matemático na Europa.

6 O Legado da Matemática Grega e a Influência Bizantina

A matemática grega, embora tenha declinado no Ocidente após o fechamento da Academia de Platão, continuou a influenciar o pensamento matemático no Império Bizantino. Os estudiosos bizantinos preservaram e comentaram as obras clássicas, garantindo a transmissão desse conhecimento para as gerações futuras.

Durante o período bizantino, matemáticos como Teão de Alexandria e sua filha Hipátia desempenharam um papel fundamental na conservação das ideias de Euclides, Diofanto e Ptolomeu. Comentários detalhados foram escritos sobre esses textos, assegurando que suas teorias e métodos não fossem perdidos.

Um dos mais importantes matemáticos bizantinos foi Miguel Pselo, que viveu no século XI. Ele estudou e comentou extensivamente as obras matemáticas gregas, além de contribuir para a reintrodução do conhecimento clássico no mundo ocidental durante o Renascimento.

A influência bizantina na matemática se deu principalmente através da preservação de manuscritos

e da disseminação desse conhecimento para o mundo islâmico, que por sua vez o aprimorou e reintroduziu na Europa séculos depois. A continuidade da tradição matemática grega dentro do Império Bizantino foi essencial para a recuperação e o avanço do pensamento matemático durante o Renascimento.

Referências

- [1] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012.



Análise das diferentes métricas em \mathbb{R}^n e suas implicações

Joangelo Marins Alves

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brasil
joangelo@ufu.br

Ana Paula Tremura Galves

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brasil
ana.galves@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Espaço métrico
Métricas em \mathbb{R}^n
Bola aberta

Os espaços métricos são fundamentais na matemática e suas aplicações, fornecendo uma estrutura formal para medir distâncias. Neste trabalho, apresentamos a definição de espaço métrico e exploramos três métricas no \mathbb{R}^n : a euclidiana, a do táxi e a do máximo. Discutimos as relações entre essas métricas e analisamos a forma das bolas métricas associadas. Por fim, destacamos aplicações dessas métricas em diversas áreas. Para maiores detalhes sobre espaços métricos, pode-se consultar a referência [1], e para mais informações sobre as métricas no \mathbb{R}^n e suas aplicações, consultar a referência [2].

1 Introdução

Os espaços métricos são uma ferramenta essencial na matemática, permitindo a formalização do conceito de distância em diferentes contextos. Em particular, no espaço \mathbb{R}^n , diversas métricas podem ser definidas, influenciando a forma como a proximidade entre pontos é medida. Neste trabalho, apresentamos a definição de espaço métrico e exploramos três métricas no \mathbb{R}^n : a euclidiana, a do táxi e a do máximo. Além de compararmos suas propriedades, analisamos a estrutura das bolas métricas associadas e discutimos aplicações dessas métricas em diferentes áreas da matemática e da ciência.

2 Espaços métricos: definição e exemplos em \mathbb{R}^n

O conceito de espaço métrico é fundamental na matemática e em diversas áreas aplicadas. Em termos gerais, um espaço métrico é um conjunto equipado com uma função distância, chamada métrica, que satisfaz certas propriedades fundamentais. Formalmente:

Definição 2.1. Um espaço métrico é um par (M, d) , onde M é um conjunto não vazio e $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função que associa a cada par ordenado de elementos $(x, y) \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado distância de x a y , que satisfaz as seguintes condições para $x, y, z \in M$:

$$(M_1) \quad d(x, x) = 0;$$

$$(M_2) \quad \text{se } x \neq y, \text{ então } d(x, y) > 0;$$

$$(M_3) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetria)};$$

$$(M_4) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (desigualdade triangular)}.$$

Diremos apenas "espaço métrico M ", pressupondo a métrica d a ser considerada. Existem diversos exemplos de métricas, mas, neste trabalho, estamos interessados em estudar três métricas no \mathbb{R}^n , cujas propriedades serão apresentadas e demonstradas nas seções a seguir.

3 Métricas em \mathbb{R}^n

O conjunto \mathbb{R}^n consiste em todas as n -uplas (x_1, x_2, \dots, x_n) , onde $x_i \in \mathbb{R}$. Existem três métricas importantes sobre \mathbb{R}^n , ou seja, três maneiras diferentes de definir distância entre dois pontos em \mathbb{R}^n , as quais serão definidas a seguir. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ pontos arbitrários de \mathbb{R}^n . Definimos:

- $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$;
- $d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$;
- $d_3(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$.

Nas subseções a seguir, verificamos que d_1 , d_2 e d_3 são métricas no \mathbb{R}^n e discutimos suas aplicações.

3.1 Métrica d_1

A métrica d_1 , conhecida como métrica euclidiana, é a mais intuitiva e amplamente utilizada para medir distâncias no \mathbb{R}^n . Ela corresponde à noção usual de distância em linha reta entre dois pontos e é aplicada em diversas áreas, como física, engenharia, computação gráfica e aprendizado de máquina, onde a distância real entre pontos no espaço é relevante.

Verificamos que d_1 é métrica.

Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$, temos:

$$(M_1) \quad d_1(x, x) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + \dots + (x_n - x_n)^2} = \sqrt{0 + \dots + 0} = 0.$$

$$(M_2) \quad \text{Se } x \neq y \text{ então } d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} = |x_i - y_i| > 0, \\ \text{com } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

$$(M_3) \quad d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = d_1(y, x).$$

$$(M_4) \quad d_1(x, z) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2}. \text{ Agora,}$$

$$\begin{aligned} [d_1(x, z)]^2 &= (x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2 = (x_1 - y_1 + y_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - y_n + y_n - z_n)^2 \\ &= (x_1 - y_1)^2 + 2(x_1 - y_1)(y_1 - z_1) + (y_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 + 2(x_n - y_n)(y_n - z_n) + \\ &+ (y_n - z_n)^2 \leq (x_1 - y_1)^2 + 2(\sqrt{x_1 - y_1})^2(\sqrt{y_1 - z_1})^2 + (y_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 + \\ &+ 2(\sqrt{x_n - y_n})^2(\sqrt{y_n - z_n})^2 + (y_n - z_n)^2 \\ &= [d_1(x, y) + d_1(y, z)]^2. \end{aligned}$$

A desigualdade da expressão acima acontece graças à desigualdade de Cauchy-Schwarz (a demonstração dessa desigualdade você encontra no Teorema 1.7 do Capítulo 1 de [2]). Assim, obtemos $[d_1(x, z)]^2 \leq [d_1(x, y) + d_1(y, z)]^2$. Como $d_1(x, z)$, $d_1(x, y)$ e $d_1(y, z)$ pertencem a \mathbb{R}_+ , segue que $d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z)$.

Também é possível demonstrar essa desigualdade triangular utilizando espaços vetoriais normados, associando a métrica d_1 a um espaço com produto interno. A definição e as propriedades desses espaços métricos podem ser encontradas no Capítulo 2, entre as páginas 41 e 44 de [1].

3.2 Métrica d_2

A métrica d_2 , quando aplicada em \mathbb{R}^2 , é conhecida como distância do táxi, também chamada de métrica Manhattan ou L_1 . Ela mede a distância como a soma dos deslocamentos absolutos em cada eixo, semelhante ao percurso de um táxi em ruas organizadas em uma grade ortogonal. Essa métrica é amplamente utilizada em problemas de otimização e roteamento, como no planejamento de rotas em cidades com estrutura em grade.

Verificamos que d_2 satisfaz as propriedades de uma métrica.

$$(M_1) \quad d_2(x, x) = |x_1 - x_1| + \dots + |x_n - x_n| = |0| + \dots + |0| = 0.$$

$$(M_2) \quad d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \geq |x_i - y_i| > 0, \text{ com } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

$$(M_3) \quad d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = |y_1 - x_1| + \dots + |y_n - x_n| = d_2(y, x).$$

$$(M_4) \quad d_2(x, z) = |x_1 - z_1| + \dots + |x_n - z_n| = |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + \dots + |x_n - y_n + y_n - z_n| \leq \\ \leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + \dots + |x_n - y_n| + |y_n - z_n| = d_2(x, y) + d_2(y, z),$$

A desigualdade na expressão acima decorre da desigualdade triangular, que afirma que $|x + y| \leq |x| + |y|$ (cuja demonstração pode ser encontrada no Teorema 1.6 do Capítulo 1 de [2]). Assim, obtemos $d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z)$.

3.3 Métrica d_3

A métrica d_3 , conhecida como métrica do máximo, também chamada de métrica suprema ou L_∞ , mede a distância como a maior diferença em qualquer coordenada entre dois pontos. Ela tem diversas aplicações, aparecendo em análises de supremos e ínfimos, além de ser útil em problemas que envolvem limites máximos entre coordenadas.

Verificamos que d_3 satisfaz as propriedades de uma métrica.

$$(M_1) \quad d_3(x, x) = \max \{|x_1 - x_1|, \dots, |x_n - x_n|\} = \max\{|0|, \dots, |0|\} = \max\{0, \dots, 0\} = 0.$$

$$(M_2) \quad d_3(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} \geq |x_i - y_i| > 0, \text{ com } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

$$(M_3) \quad d_3(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max \{|y_1 - x_1|, \dots, |y_n - x_n|\} = d_3(y, x).$$

$$(M_4) \quad |x_i - y_i| = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = d_3(x, y), \text{ para algum } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$|y_j - z_j| = \max \{|y_1 - z_1|, \dots, |y_n - z_n|\} = d_3(y, z), \text{ para algum } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$|x_k - z_k| = \max \{|x_1 - z_1|, \dots, |x_n - z_n|\} = d_3(x, z), \text{ para algum } k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\text{Assim, } d_3(x, z) = \max \{|x_1 - z_1|, \dots, |x_n - z_n|\} = |x_k - z_k| = |x_k - y_k + y_k + z_k|.$$

Utilizando a desigualdade triangular, temos:

$$d_3(x, z) \leq |x_k - y_k| + |y_k + z_k| \leq |x_i - y_i| + |y_j + z_j| = d_3(x, y) + d_3(y, z).$$

4 Relação entre as métricas d_1 , d_2 e d_3

As métricas d_1 , d_2 e d_3 , no espaço \mathbb{R}^n , satisfazem a seguinte desigualdade para quaisquer pontos $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$:

$$d_3(x, y) \leq d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq n \cdot d_3(x, y).$$

A seguir, provamos cada uma dessas desigualdades separadamente.

• **Primeira desigualdade:** $d_3(x, y) \leq d_1(x, y)$

Por definição, a métrica $d_1(x, y)$ é dada por $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ ou, equivalentemente, $[d_1(x, y)]^2 = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$.

Para a métrica d_3 , existe um índice $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que

$$d_3(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = |x_j - y_j|.$$

Consequentemente, temos $[d_3(x, y)]^2 = |x_j - y_j|^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = [d_1(x, y)]^2$.

Como $d_1(x, y)$ e $d_3(x, y)$ pertencem a \mathbb{R}_+ , podemos extrair a raiz quadrada em ambos os lados, obtendo a desigualdade desejada: $d_3(x, y) \leq d_1(x, y)$.

• **Segunda desigualdade:** $d_1(x, y) \leq d_2(x, y)$

Consideramos $a_i = |x_i - y_i|$, com $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ e $i = \{1, 2, \dots, n\}$. Pela Proposição 1.15 do Capítulo 1 de [2], temos que:

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 + 2 \cdot \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^n |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j| \right] = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right)^2.$$

Como

$$\left[\sum_{\substack{i=1 \\ j=2}}^n |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j| \right] \geq 0$$

temos que

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 + 2 \cdot \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^n |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j| \right].$$

Assim, temos:

$$[d_1(x, y)]^2 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 + 2 \cdot \left[\sum_{\substack{i=1 \\ j=2}}^n |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j| \right] = \left[\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right]^2 = [d_2(x, y)]^2.$$

Como $d_1(x, y)$ e $d_2(x, y)$ pertencem a \mathbb{R}_+ , podemos extrair a raiz quadrada em ambos os lados, obtendo $d_1(x, y) \leq d_2(x, y)$.

• **Terceira desigualdade:** $d_2(x, y) \leq n \cdot d_3(x, y)$

Sabemos que $d_3(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = |x_j - y_j|$, para algum $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ou seja, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que $|x_j - y_j| \geq |x_i - y_i|$. Logo,

$$d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \leq n \cdot |x_j - y_j| = n \cdot d_3(x, y).$$

Concluimos que $d_2(x, y) \leq n \cdot d_3(x, y)$.

Assim, todas as desigualdades foram demonstradas, evidenciando a relação entre as métricas d_1 , d_2 e d_3 no espaço \mathbb{R}^n . Isso significa que, embora as métricas possam fornecer diferentes valores numéricos para a distância entre dois pontos, elas induzem a mesma topologia em \mathbb{R}^n . Em outras

palavras, uma sequência de pontos que converge em uma dessas métricas também converge nas outras.

5 Bolas e esferas

Definição 5.1. *Seja a um ponto no espaço métrico (M, d) , e $r > 0$ um número real. Definimos:*

- *Bola aberta:* $B(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\}$.
- *Bola fechada:* $B(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) \leq r\}$.
- *Esfera* $S(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) = r\}$.

As bolas são subconjuntos fundamentais em um espaço métrico, definidos por um centro e um raio, com formas que variam conforme a métrica utilizada. A seguir, exploraremos as bolas e esferas associadas às métricas d_1 , d_2 e d_3 no espaço \mathbb{R}^2 , que oferecem uma representação visualmente mais acessível do que em dimensões superiores.

5.1 Bola e esfera na métrica euclidiana d_1

Considerando o centro $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, pela métrica d_1 temos:

$$B(a; r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d_1((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r\}, \text{ ou seja,}$$

$$d_1((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r \iff \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r \iff (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2.$$

É fácil notar que essa inequação representa o interior de uma circunferência de centro a e raio r , ou seja, a bola aberta na métrica euclidiana.

A bola fechada na métrica euclidiana d_1 representa o círculo (a união da circunferência e de seu interior) de centro $a = (a_1, a_2)$ e raio r no \mathbb{R}^2 . Graficamente, a esfera associada à métrica d_1 representa a circunferência de centro $a = (a_1, a_2)$ e raio r no plano \mathbb{R}^2 .

5.2 Bola e esfera na métrica do táxi d_2

Considerando o centro $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, pela métrica d_2 temos:

$$B(a; r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d_2((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r\}, \text{ ou seja}$$

$$d_2((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r \iff |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r.$$

Fazendo o estudo da equação $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r$, temos:

$$|x_1 - a_1| = \begin{cases} x_1 - a_1, & \text{se } x_1 \geq a_1 \\ -x_1 + a_1, & \text{se } x_1 < a_1 \end{cases}$$

$$|x_2 - a_2| = \begin{cases} x_2 - a_2, & \text{se } x_2 \geq a_2 \\ -x_2 + a_2, & \text{se } x_2 < a_2. \end{cases}$$

Portanto, devemos analisar as seguintes situações:

(i) se $x_1 \geq a_1$ e $x_2 \geq a_2$ então

$$|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r \Leftrightarrow x_1 - a_1 + x_2 - a_2 = r \Leftrightarrow x_2 = -x_1 + a_1 + a_2 + r;$$

(ii) se $x_1 \geq a_1$ e $x_2 < a_2$ então

$$|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r \Leftrightarrow x_1 - a_1 - x_2 + a_2 = r \Leftrightarrow x_2 = x_1 - a_1 + a_2 - r;$$

(iii) se $x_1 < a_1$ e $x_2 \geq a_2$ então

$$|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r \Leftrightarrow -x_1 + a_1 + x_2 - a_2 = r \Leftrightarrow x_2 = x_1 - a_1 + a_2 + r;$$

(iv) se $x_1 < a_1$ e $x_2 < a_2$ então

$$|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r \Leftrightarrow -x_1 + a_1 - x_2 + a_2 = r \Leftrightarrow x_2 = -x_1 + a_1 + a_2 - r.$$

Note que as equações das retas possuem coeficiente angular igual a 1 nas situações (ii) e (iii). Ou seja, essas retas são paralelas. Por outro lado, nas situações (i) e (iv), o coeficiente angular é igual a -1 , o que também indica que essas retas são paralelas. Além disso, as retas das situações (i) e (iv) são perpendiculares às retas das situações (ii) e (iii).

Igualando as equações das retas perpendiculares, podemos encontrar os pontos de interseção

$$(a_1 + r, a_2), (a_1, a_2 + r), (a_1 - r, a_2), (a_1, a_2 - r).$$

Dada a equação $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r$, podemos concluir que a esfera $S(a; r)$ na métrica do táxi d_2 é representada geometricamente pelos lados de um quadrado cujas diagonais medem $2r$, sendo paralelas aos eixos coordenados. O centro desse quadrado está em $a = (a_1, a_2)$, e seus vértices estão localizados nos pontos $(a_1 + r, a_2)$, $(a_1, a_2 + r)$, $(a_1 - r, a_2)$ e $(a_1, a_2 - r)$. Além disso, a bola aberta é representada pelo interior desse quadrado, enquanto a bola fechada na métrica do táxi é representada pelo quadrado completo, incluindo seu interior e bordas, com centro em $a = (a_1, a_2)$, e diagonais de comprimento $2r$, também paralelas aos eixos coordenados.

5.3 Bola e esfera na métrica do máximo d_3

De maneira análoga à explicação anterior, vamos determinar a esfera $S(a; r)$ considerando o centro $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, pela métrica d_3 . Assim, temos:

$$S(a; r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d_3((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r\}, \text{ ou seja,}$$

$$d_3((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r \Leftrightarrow \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} = r \Leftrightarrow \begin{cases} |x_1 - a_1| = r \text{ e } |x_2 - a_2| \leq r, \\ \text{ou} \\ |x_1 - a_1| \leq r \text{ e } |x_2 - a_2| = r. \end{cases}$$

• Situação 1: $|x_1 - a_1| = r$ e $|x_2 - a_2| \leq r$:

$$|x_2 - a_2| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x_2 - a_2 \leq r \Leftrightarrow a_2 - r \leq x_2 \leq a_2 + r.$$

Como devemos ter, simultaneamente, $|x_1 - a_1| = r$ e $|x_2 - a_2| \leq r$, a região será representado por $|x_1 - a_1| = r$ no intervalo $[a_2 - r, a_2 + r]$, ou seja:

$$\text{— se } x_1 \geq a_1 \Rightarrow |x_1 - a_1| = r \Leftrightarrow x_1 - a_1 = r \Leftrightarrow x_1 = a_1 + r;$$

$$\text{— se } x_1 < a_1 \Rightarrow |x_1 - a_1| = r \Leftrightarrow -x_1 + a_1 = r \Leftrightarrow x_1 = a_1 - r.$$

- Situação 2: $|x_1 - a_1| \leq r$ e $|x_2 - a_2| = r$:

$$|x_1 - a_1| \leq r \iff -r \leq x_1 - a_1 \leq r \iff a_1 - r \leq x_1 \leq a_1 + r.$$

Como devemos ter, simultaneamente, $|x_1 - a_1| \leq r$ e $|x_2 - a_2| = r$, a região será representada por $|x_2 - a_2| = r$ no intervalo $[a_1 - r, a_1 + r]$, ou seja:

- se $x_2 \geq a_2 \implies |x_2 - a_2| = r \iff x_2 - a_2 = r \iff x_2 = a_2 + r$;
- se $x_2 < a_2 \implies |x_2 - a_2| = r \iff -x_2 + a_2 = r \iff x_2 = a_2 - r$.

As equações geradas nas duas situações representam retas. As retas da primeira situação são paralelas ao eixo y , enquanto as da segunda são paralelas ao eixo x . As interseções dessas retas perpendiculares ocorrem nos extremos dos intervalos, nos pontos $(a_1 + r, a_2 + r)$, $(a_1 + r, a_2 - r)$, $(a_1 - r, a_2 + r)$ e $(a_1 - r, a_2 - r)$.

Portanto, a esfera $S(a; r)$ na métrica do máximo d_3 é representada geometricamente por um quadrado de centro $a = (a_1, a_2)$, com lados de comprimento $2r$ e vértices nos pontos $(a_1 + r, a_2 + r)$, $(a_1 + r, a_2 - r)$, $(a_1 - r, a_2 + r)$ e $(a_1 - r, a_2 - r)$.

A bola aberta na métrica do máximo é representada pelo interior desse quadrado, enquanto a bola fechada é representada pelo quadrado inteiro, incluindo as bordas.

6 Conclusão

A teoria dos espaços métricos fornece uma estrutura essencial para o estudo da distância e da convergência em diversos contextos matemáticos. No caso do espaço \mathbb{R}^n , métricas como a euclidiana, do táxi e do máximo fornecem diferentes maneiras de medir distâncias, cada uma com suas próprias propriedades e aplicações. Apesar de distintas, essas métricas preservam a mesma topologia, permitindo flexibilidade na escolha da mais adequada para um problema específico. A compreensão dessas métricas e de suas implicações geométricas é essencial para aplicações em análise, otimização, ciência da computação e inteligência artificial.

7 Agradecimento

Na condição de bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço pelo apoio e fomento recebidos.

Referências

- [1] DOMINGUES, Hygino H, *Espaços Métricos e introdução á topologia*, São Paulo: Atual, 1982
- [2] VIANA, Samir Borges, *Geometria do táxi versus geometria euclidiana: explorando as diferenças e aplicações na Educação Básica*, 2023. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.485>



Cadeias Infinitas de Semigrupos Numéricos

Israel Mendonça Gonçalves

UFU, Faculdade de Engenharia Mecânica - FEMEC, Uberlândia, MG, Brasil

israel.goncalves@ufu.com

Alonso Sepúlveda Castellanos

UFU, Instituto de Matemática e Estatística - IME, Uberlândia, MG, Brasil

alonso.castellanos@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Semigrupos numéricos
Número de Frobenius
Cadeias infinitas

Este trabalho tem como objetivo o estudo introdutório dos semigrupos numéricos, explorando suas propriedades fundamentais e sua relação com o Problema de Frobenius. Para isso, foi realizada uma revisão de artigos acadêmicos sobre o tema, com ênfase na estrutura e nas propriedades das cadeias infinitas de semigrupos numéricos. Essas cadeias são formadas a partir da remoção controlada de geradores minimais, criando sequências infinitas de semigrupos com características estruturais particulares. A análise permitiu compreender como essas cadeias preservam e modificam propriedades como gênero e conjunto de lacunas. Os resultados obtidos contribuíram para uma melhor compreensão dos padrões existentes na formação dessas cadeias e suas implicações dentro da teoria dos semigrupos numéricos. Conclui-se que o estudo dessas cadeias fornece uma ferramenta útil para a análise da estrutura dos semigrupos e pode ter aplicações em diferentes áreas da matemática.

1 Introdução

Seja \mathbb{N}_0 o conjunto dos inteiros não negativos. Dizemos que $S \subseteq \mathbb{N}_0$ é um **Semigrupo Numérico** se contém o zero, é fechado sob a adição e possui complementar finito, isto é, o conjunto $\mathbb{N}_0 \setminus S$ é finito. Eles aparecem naturalmente em diversas áreas da matemática, incluindo teoria de números, álgebra e geometria algébrica.

Um problema clássico associado aos semigrupos numéricos é o **Problema de Frobenius**, que busca determinar o maior número natural que não pode ser representado como combinação linear não negativa de um dado conjunto de geradores.

Por exemplo, suponha que, em um país fictício, as únicas cédulas disponíveis sejam de 4 e 5 unidades monetárias. O conjunto de valores que podem ser pagos exatamente com essas cédulas forma o semigrupo numérico $S = \langle 4, 5 \rangle$, composto por todas as combinações da forma $4a + 5b$, onde a, b são inteiros não negativos. O problema central de Frobenius consiste em determinar o maior valor que não pode ser obtido com essas notas. No caso de $S = \langle 4, 5 \rangle$, esse valor é 11, pois não há nenhuma combinação não negativa de 4 e 5 que resulte em 11, enquanto qualquer número maior pode ser representado.

Um tópico de particular interesse é a formação de *cadeias infinitas de semigrupos numéricos*, nas quais cada semigrupo "gera" o seguinte, formando uma sequência infinita de semigrupos. Essas cadeias permitem estudar propriedades fundamentais dos semigrupos numéricos, como seu gênero e número de lacunas.

2 Noções Básicas

Dado um conjunto finito $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}$, tal que o $\text{mdc}(a_1, \dots, a_n) = 1$, podemos definir o semigrupo numérico gerado por A da forma

$$S = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n \mid \lambda_i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Exemplo 2.1. Seja $g \in \mathbb{N}_0$. Então, definimos os semigrupos O_g e H_g da seguinte forma:

$$O_g = \{0, g+1, g+2, g+3, \dots\} = \langle g, g+1, \dots, 2g-1 \rangle$$

Note que $\mathbb{N}_0 \setminus O_g = \{1, 2, 3, \dots, g\}$. Este semigrupo é chamado de **Ordinário**.

$$H_g = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots, 2g-2, 2g, 2g+1, \dots\} = \langle 2, 2g+1 \rangle$$

Note que $\mathbb{N}_0 \setminus H_g = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2g-1\}$. Este semigrupo é chamado de **Hiperelíptico**.

A seguir, apresentaremos alguns invariantes dos semigrupos que nos ajudarão a estudar sua estrutura.

Definição 2.2. *Seja S um semigrupo numérico, então temos que*

- *O menor conjunto $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq S$ tal que $S = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ é chamado de **sistema minimal de geradores**, e sua cardinalidade, denotada por $e(S)$, é chamada de **dimensão** de S ;*
- *O conjunto de lacunas de S é o conjunto $G(S) = \mathbb{N}_0 \setminus S$;*
- *O gênero de um semigrupo é o número de lacunas que ele possui. Denotamos por $g(S) = \#G(S)$;*
- *A multiplicidade de um semigrupo é o menor elemento não nulo pertencente a S , e denotamos por $m(S) = \min(S \setminus \{0\})$;*
- *O maior número natural que não pertence a S é chamado de **número de Frobenius**. O denotamos por $F(S) = \max G(S)$;*
- *O condutor de um semigrupo é dado por $c(S) = F(S) + 1$;*
- *Os geradores minimais de S que são maiores que o condutor, são chamados de **geradores efetivos**. Os geradores minimais que são menores que o condutor são chamados de geradores à esquerda.*

Exemplo 2.3. *Seja o semigrupo numérico $O_g = \{0, g+1, g+2, g+3, \dots\}$, então temos que $G(O_g) = \{1, 2, \dots, g\}$, $g(O_g) = g$, $m(O_g) = g+1$, $F(O_g) = g$, $c(O_g) = g+1$.*

Exemplo 2.4. *Seja o semigrupo numérico $H_g = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2g, 2g+1, 2g+2, \dots\}$, então temos que $G(H_g) = \{1, 3, 5, \dots, 2g-1\}$, $g(H_g) = g$, $m(H_g) = 2$, $F(H_g) = 2g-1$, $c(H_g) = 2g$.*

3 Cadeias Infinitas

Nesta seção estudaremos as cadeias infinitas de semigrupos numéricos. O estudo de cadeias infinitas foi inicialmente estudado por Bras-Amorós e Bulygin em [2]. Um descendente de um semigrupo S é obtido de S tirando um a um seus geradores efetivos. Desta forma, podemos construir cadeias que, em alguns casos, são infinitas e, em outros, não.

A seguir apresentamos um resultado de M. Rosas-Ribeiro e M. Bras-Amorós [1, Teorema 3.4] que estabelece que o maior divisor comum das lacunas de um semigrupo numérico é crucial para determinar se o semigrupo pertence a uma cadeia infinita.

Teorema 3.1. *Seja Λ um semigrupo numérico não ordinário com enumeração λ , gênero g e condutor c , e seja d o máximo divisor comum de $\lambda_1, \dots, \lambda_{c-g-1}$. Então,*

- a. Um semigrupo Λ pertence a uma cadeia infinita se, e somente se, $d \neq 1$.*
- b. Se $d = 1$, então o descendente de Λ com maior gênero é gerado pelas lacunas de Λ .*

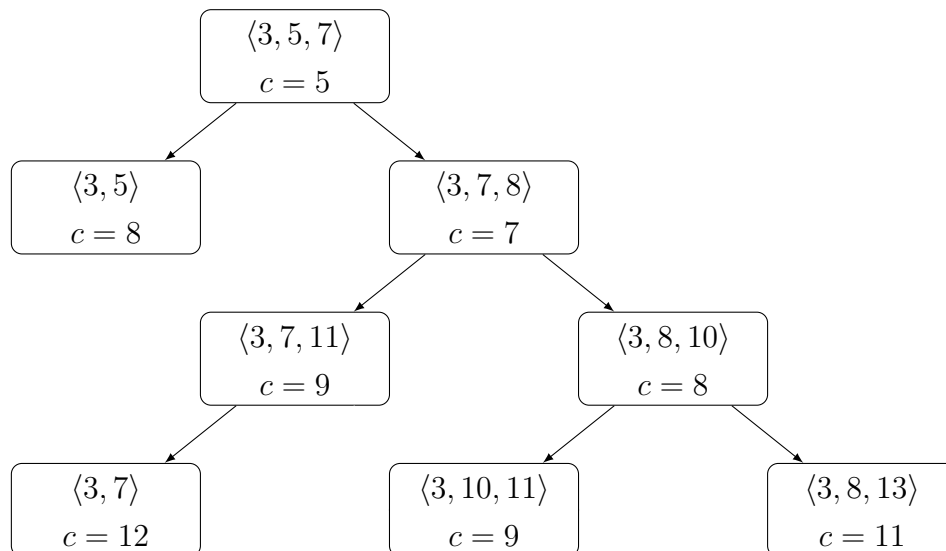
- c. Se $d \neq 1$ e d não é primo, Λ pertence a um número infinito de cadeias infinitas.
- d. Se d for primo, o número de cadeias infinitas a que Λ pertence é um mais o número de descendentes do semigrupo gerado pelas lacunas divididas por d .

Esses resultados fornecem uma caracterização profunda das cadeias infinitas e sua formação a partir das lacunas de semigrupos numéricos.

4 Exemplo de Cadeias Infinitas de Semigrupos Numéricos

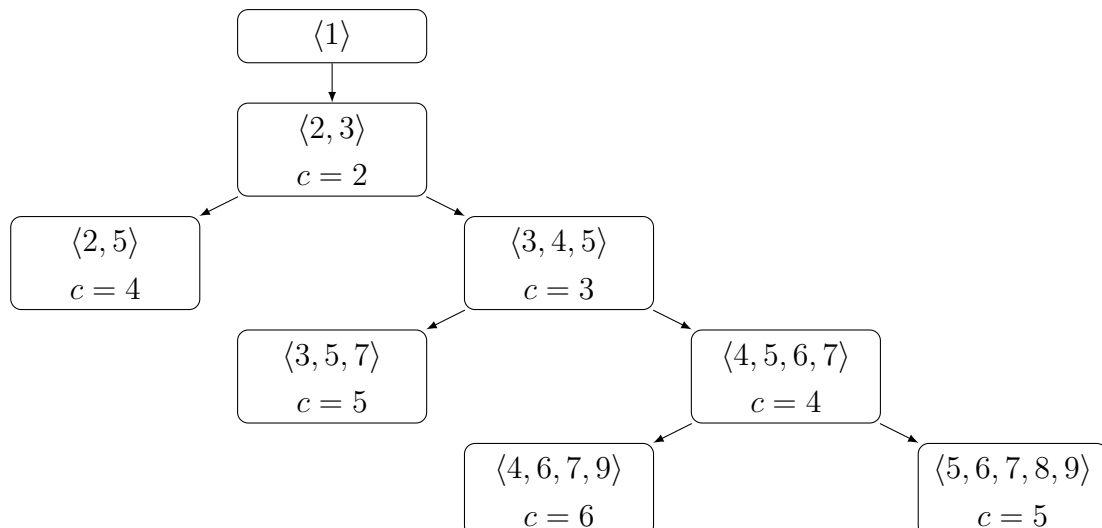
A seguir, mostramos alguns exemplos de cadeias infinitas de semigrupos numéricos seguindo o processo indicado:

Exemplo 4.1. Cadeia gerada pelo Semigrupo $\langle 3, 5, 7 \rangle$.

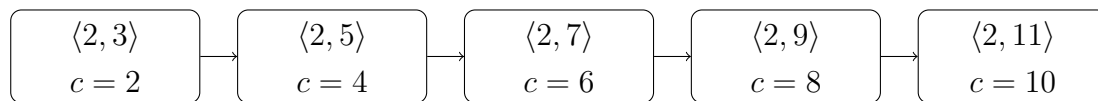


A sequência formada é uma representação de uma cadeia infinita de semigrupos numéricos.

Exemplo 4.2. Cadeia gerada pelos semigrupos ordinários.



Exemplo 4.3. *Cadeia gerada pelos semigrupos hiperelípticos.*



5 Considerações finais

O estudo de cadeias infinitas de semigrupos numéricos proporciona uma compreensão mais profunda das suas propriedades algébricas. Os exemplos apresentados ilustram como os semigrupos podem ser formados e como a estrutura de cadeias infinitas pode ser aplicada para analisar semigrupos numéricos em diferentes contextos.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PICME, agradeço ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq).

Referências

- [1] ROSAS-RIBEIRO, M.; BRAS-AMORÓS, M. Infinite Chains in the Tree of Numerical Semi-groups, **Semigroup Forum**. Springer, Accepted, ISSN: 0037-1912, 2025.
- [2] Bras-Amorós, M. and Bulygin S. Towards a better understanding of the semigroup tree, **Semigroup Forum** 79 (3), 561–574, 2009.



Cálculo Fracionário e suas Aplicações

Henrique Lima Betti

UFU, FEELT - Faculdade de Engenharia Elétrica, Uberlândia, MG, Brasil

henrique.betti@ufu.br

Elisa Regina dos Santos

UFU, IME - Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brasil

elisars@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Cálculo Fracionário.
Derivada Fracionária de Caputo.
Funções de Mittag-Leffler.

Este trabalho apresenta o Cálculo Fracionário de Caputo, destacando sua formulação matemática e aplicações práticas. A derivada fracionária de Caputo é definida via integração fracionária de derivadas inteiras, preservando condições iniciais fisicamente interpretáveis. Aliada à transformada de Laplace, simplifica a resolução de equações diferenciais fracionárias, convertendo operadores não locais em expressões algébricas. As funções de Mittag-Leffler, generalizações da exponencial, emergem como soluções fundamentais, capturando comportamentos de memória.

Essa técnica será aplicada ao Oscilador Harmônico Fracionário (ordem $1 < \alpha \leq 2$) e à Equação Logística Fracionária (ordem $0 < \alpha \leq 1$), onde a substituição da derivada clássica por uma derivada fracionária introduz efeitos de memória. Ambos os casos recuperam as soluções tradicionais quando α tende ao valor do caso inteiro, validando a consistência da abordagem.

1 Introdução

O Cálculo Fracionário representa uma extensão notável do cálculo tradicional, permitindo a generalização de operações de diferenciação e integração para ordens não inteiras. Essa área demonstra capacidade para modelar fenômenos complexos em diversos campos científicos, proporcionando modelos mais precisos na representação de processos com memória e comportamentos não locais.

A evolução histórica desse campo foi marcada por contribuições de diversos matemáticos que buscavam estender as noções de derivadas e integrais. Entre as formulações mais significativas do Cálculo Fracionário encontram-se as definições de Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Weyl, Riesz, e notadamente, a formulação de Caputo [3]. Cada uma dessas abordagens oferece perspectivas distintas sobre como generalizar as operações do cálculo para ordens arbitrárias, com vantagens específicas dependendo do contexto de aplicação.

O presente trabalho explora especificamente a formulação de Caputo e suas aplicações em modelos clássicos como o Oscilador Harmônico e a Equação Logística, evidenciando como essa abordagem amplia o poder descritivo da matemática para fenômenos naturais.

2 Definições e Resultados Preliminares

Nesta seção, estão contidas definições e resultados pertinentes que servirão de auxílio para definir o Cálculo Fracionário segundo Caputo e solucionar equações diferenciais fracionárias.

Definição 2.1. *Seja f uma função definida no intervalo $0 \leq t < \infty$. Chama-se **Transformada de Laplace** de f , denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$ ou $F(s)$, a função definida pela integral imprópria*

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \text{para } s > 0,$$

*se ela existir. Nesse caso, s é chamado de **parâmetro da transformada**.*

Teorema 2.2. *Seja f uma função tal que $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ são contínuas e $f^{(n)}$ é contínua por partes em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponha, além disso, que existem constantes K, a e M tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}, |f'(t)| \leq Ke^{at}, \dots, |f^{(n)}(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$. Então, $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]$ existe para $s > a$ e é dada por*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{(n-1)} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1], Corolário 6.2.2. ■

Teorema 2.3. *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções de ordem exponencial α e β , e com transformadas de Laplace $F(s)$ e $G(s)$, respectivamente, no intervalo $[0, \infty)$. A transformada de Laplace da convolução de f e g é dada por*

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(s)G(s).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1], Teorema 6.6.1. ■

A seguir, abordaremos a família de funções de Mittag-Leffler, que é um frequente conceito ao analisar modelos diferenciais de ordem não inteira.

Definição 2.4. Seja $\alpha > 0$. A **Função de Mittag-Leffler de um parâmetro** é dada pela série

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Teorema 2.5. Se $s^\alpha > |a|$, então

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\pm at^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp a}.$$

Demonstração. Da definição de Transformada de Laplace e da Função de Mittag-Leffler, segue que

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\pm at^\alpha)] = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^\infty t^{\alpha k} e^{-st} dt.$$

A integral dentro da soma é a Transformada de Laplace de $t^{\alpha k}$, que é dada por

$$\int_0^\infty t^{\alpha k} e^{-st} dt = \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{s^{\alpha k + 1}}.$$

Assim, obtemos

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\pm at^\alpha)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{s^{\alpha k + 1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^k}{s^{\alpha k + 1}} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pm a}{s^\alpha} \right)^k. \quad (1)$$

Essa é uma série geométrica com razão $\frac{\pm a}{s^\alpha}$. Se $|s^\alpha| > |a|$, a série converge para

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pm a}{s^\alpha} \right)^k = \frac{1}{1 \mp \frac{a}{s^\alpha}} = \frac{s^\alpha}{s^\alpha \mp a}.$$

Finalmente, substituindo esse resultado na Equação (1), obtemos

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\pm at^\alpha)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^\alpha}{s^\alpha \mp a} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp a}. \quad \blacksquare$$

3 Integral Fracionária de Riemann-Liouville

Com o objetivo de definir a integral de ordem não inteira segundo Riemann-Liouville, consideremos a seguinte integral

$$I = \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(t) dt \cdots dx_2 dx_1,$$

na qual f é uma função real e contínua no intervalo $[0, a]$, $a > x$ e $n \in \mathbb{N}$.

Segundo [3], é possível reescrever o lado direito da igualdade acima como

$$I = \int_0^x K_n(x, t) f(t) dt,$$

na qual o núcleo $K_n(x, t)$ é uma função de n , x e t dada por

$$K_n(x, t) = \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} = \frac{(x - t)^{n-1}}{\Gamma(n)}.$$

Observe que essa última expressão de $K_n(x, t)$ está bem definida para $n > 0$. Assim, podemos definir $J^\nu f(x)$, para todo ν tal que $\nu > 0$, por

$$J^\nu f(x) = \int_0^x K_\nu(x, t) f(t) dt. \quad (2)$$

Essa é chamada de **integral fracionária de Riemann-Liouville de f de ordem ν** , isto é

$$J^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x - t)^{\nu-1} f(t) dt.$$

4 Derivada Fracionária de Caputo

Tendo-se definida a integral fracionária de Riemann-Liouville, é possível introduzir a derivada fracionária de Caputo. Vale ressaltar que, embora existam diversas definições para integrais e derivadas fracionárias, veremos apenas a de Caputo aqui. Isso se dá pela maior simplicidade dos cálculos com Caputo ao resolver equações diferenciais fracionárias.

Definição 4.1. *Sejam $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta > 0$, n o menor inteiro maior que β e $\nu = n - \beta$, ou seja, $0 < \nu \leq 1$. Nessas condições, a derivada de ordem β de f , segundo Caputo, denotada por D_*^β , é definida como*

$$D_*^\beta f(t) = J^\nu [D^n f(t)],$$

onde D denota o operador derivação. Ainda, podemos escrever

$$D_*^\beta f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \int_0^t (t - x)^{n-\beta-1} f^{(n)}(x) dx, & n - 1 < \beta < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \beta = n. \end{cases} \quad (3)$$

É notável que essa definição recupera o caso inteiro quando $\beta = n$, ou seja, a derivada de ordem inteira está contida na derivada fracionária de Caputo. Além disso, essa definição requer integrabilidade da derivada de ordem n da função f . Essa hipótese será assumida como satisfeita sempre que o operador D_*^β for utilizado.

4.1 Transformada de Laplace

Agora, iremos calcular a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo, resultado que nos permitirá resolver equações diferenciais fracionárias com facilidade. Notemos inicialmente que a derivada de Caputo pode ser escrita como a convolução de duas funções, da seguinte forma:

$$D_*^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t (t-x)^{n-\beta-1} f^{(n)}(x) dx = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} (t^{n-\beta-1}) * (f^{(n)}(t)).$$

Pelo Teorema 2.3 e sabendo que $\mathcal{L}[t^{n-\beta-1}] = \frac{\Gamma(n-\beta)}{s^{n-\beta}}$, temos que

$$\mathcal{L}[D_*^\beta f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \mathcal{L}[t^{n-\beta-1}] \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = \frac{1}{s^{n-\beta}} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^{\beta-n} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)]. \quad (4)$$

5 Modelos de Equações Diferenciais Fracionárias

Nesta seção, serão apresentados modelos matemáticos em uma abordagem fracionária, com propósito de analisar e comparar os resultados com os modelos clássicos de ordem inteira.

5.1 Oscilador Harmônico

Utilizando a 2ª Lei do Movimento de Newton aplicada a sistemas cíclicos, tem-se que a equação

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \mu \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) = g(t)$$

descreve o deslocamento/alongamento de um corpo de massa m , desde a posição de equilíbrio até o instante t , com força elástica $-kx(t)$ (de acordo com a Lei de Hooke), força de amortecimento $-\mu \frac{d}{dt} x(t)$ e uma força externa $g(t)$, onde μ e k são constantes positivas, sendo k a constante elástica da mola.

Para o caso particular em que não há atrito ou forças externas, a equação pode ser escrita como

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (5)$$

onde ω_0^2 é a razão entre a constante elástica e a massa. As condições iniciais são $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

Substituindo em (5) a derivada de ordem 2 pela derivada fracionária de Caputo de ordem α , tal que $1 < \alpha \leq 2$, obtém-se a seguinte equação diferencial fracionária

$$D_*^\alpha x(t) + \omega^\alpha x(t) = 0,$$

onde $\omega_0^2 = \omega^\alpha$, mantendo-se as mesmas condições iniciais que (5). Agora, aplicando a Transformada de Laplace e dispondo de sua linearidade, segue que

$$\mathcal{L}[D_*^\alpha x(t)] + \omega^\alpha \mathcal{L}[x(t)] = 0.$$

Pelo resultado (4) e pelo Teorema 2.2, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= s^{\alpha-2} \mathcal{L}[D^2 x(t)] + \omega^\alpha \mathcal{L}[x(t)] = s^{\alpha-2} [s^2 \mathcal{L}[x(t)] - sx(0) - x'(0)] + \omega^\alpha \mathcal{L}[x(t)] \\ &= s^\alpha \mathcal{L}[x(t)] - s^{\alpha-1} x(0) - s^{\alpha-2} x'(0) + \omega^\alpha \mathcal{L}[x(t)]. \end{aligned}$$

Denotando $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e substituindo as condições iniciais, conclui-se que

$$X(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \omega^\alpha} x(0) + \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \omega^\alpha} x'(0) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \omega^\alpha} x_0.$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, temos que

$$x(t) = x_0 E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha).$$

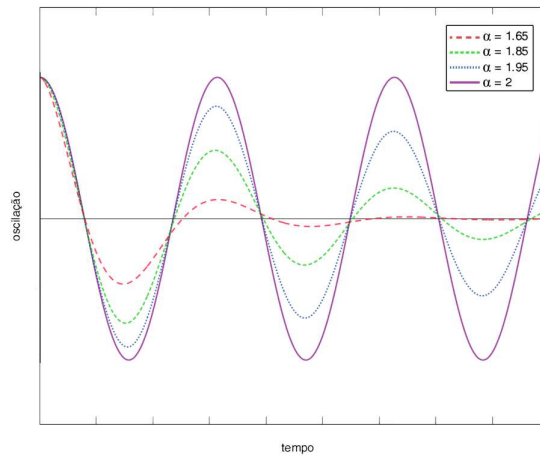


Figura 1: Curvas de $x(t)$ para $x_0 = 1$ e $\omega = 0.8$

Na Figura 1 estão contidos alguns gráficos de $x(t)$ para diferentes valores da ordem α . É possível verificar que quando α tende a 2, a solução do oscilador harmônico fracionário tende para a solução do oscilador harmônico simples. De fato, basta ver que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2} x(t) = x_0 E_2(-\omega^2 t^2) = x_0 \cos(\omega t).$$

Um fenômeno também observável pela Figura 1 é que ao diminuir a ordem da derivada fracionária, obtém-se como solução uma função com comportamento similar a um oscilador harmônico amortecido, ou seja, com atrito.

5.2 Equação Logística de Verhulst

A Equação Logística de Verhulst é um modelo matemático de crescimento populacional, com aplicação em ambientes restrito em recursos. Ele prevê um crescimento populacional limitado, uma vez

que, quando a população atinge a capacidade de suporte do ambiente, seu comportamento estabiliza.

O modelo logístico possui a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{d}{dt}v(t) = k \left(\frac{1}{r} - v(t) \right), \quad (6)$$

onde k é a taxa de crescimento populacional, r é a capacidade de suporte, e $N(t) = v^{-1}(t)$ representa o número de indivíduos.

Substituindo em (6) a derivada de ordem 1 pela derivada fracionária de Caputo de ordem α , tal que $0 < \alpha \leq 1$, obtém-se a equação do modelo logístico fracionário:

$$D_*^\alpha v(t) = k \left(\frac{1}{r} - v(t) \right). \quad (7)$$

Aplicando a transformada de Laplace e dispondo de sua linearidade, bem como do resultado (4) e do Teorema 2.2, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D_*^\alpha v(t)] &= \frac{k}{r} \mathcal{L}[1] - k \mathcal{L}[v(t)] \Rightarrow s^{\alpha-1} [sV(s) - v(0)] = k \left[\frac{1}{rs} - V(s) \right] \\ \Rightarrow V(s) &= \frac{1}{r} \left[\frac{ks^{-1}}{s^\alpha + k} \right] + v(0) \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k} \right] = \frac{1}{rs} + \left(v(0) - \frac{1}{r} \right) \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k} \right]. \end{aligned}$$

já que $k \frac{s^{-1}}{s^\alpha + k} = \frac{1}{s} - \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}$. Segue do Teorema 2.5 que a solução da equação diferencial fracionária (7) é

$$v(t) = \frac{1}{r} + \left[v(0) - \frac{1}{r} \right] E_\alpha(-kt^\alpha).$$

Portanto, o número de indivíduos em função do tempo é

$$N(t) = \frac{1}{\frac{1}{r} + \left[v(0) - \frac{1}{r} \right] E_\alpha(-kt^\alpha)}.$$

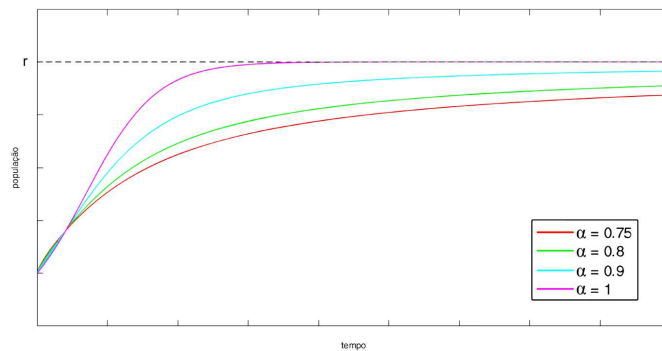


Figura 2: Curvas de $N(t)$ para $v(0) = 0.008$, $k = 0.8$ e $r = 1200$

Na Figura 2 estão retratados alguns gráficos de $N(t)$ para diferentes valores da ordem α . Note que, quando a ordem de α tende a 1, o caso inteiro é um caso particular do caso fracionário. De fato, basta ver que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} N(t) = \frac{1}{\frac{1}{r} + \left[v(0) - \frac{1}{r}\right] e^{-kt}},$$

uma vez que a função de Mittag-Leffler é uma generalização da função exponencial.

Outro fenômeno é que a modelagem fracionária apresenta o mesmo valor suporte que a modelagem usual de ordem inteira. É possível provar que, se $0 < \alpha \leq 1$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} E_{\alpha}(-kt^{\alpha}) = 0$ (ver [2], p. 35) e, portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = r,$$

ou seja, para qualquer valor de $0 < \alpha \leq 1$, todas as soluções convergem para o valor suporte r .

6 Considerações Finais

Em suma, este trabalho demonstrou a relevância do Cálculo Fracionário de Caputo como ferramenta para modelagem matemática. A aplicação da derivada de Caputo, aliada à transformada de Laplace e às funções de Mittag-Leffler, permitiu obter soluções analíticas para o Oscilador Harmônico e a Equação Logística, revelando comportamentos ausentes nos modelos clássicos. A metodologia apresentada abre portas para análises mais precisas de sistemas complexos com memória e não localidade, ampliando a capacidade descritiva em diversas áreas da ciência e engenharia.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME, agradeço ao CNPq pelo fomento.

Referências

- [1] BOYCE, W. E.; DI PRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro: LTC 2010.
- [2] PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Amsterdã: Elsevier Science, 1998.
- [3] CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. de; CHIACCHIO, A. O. *Cálculo Fracionário e Aplicações*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.



Caoticidade de operadores do tipo shift em espaços de sequências

Denilson Rodrigues Junior

IME, Instituto de Matemática e Estatística/UFU, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
denilson.rodriques@ufu.br

Vinícius Vieira Fávaro

IME, Instituto de Matemática e Estatística/UFU, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
vvfavaro@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

1. Dinâmica linear
2. Espaços de sequências
3. Caos de Devaney

A dinâmica linear é uma área da matemática que vem recebendo muita atenção nos últimos 40 anos. Podemos descrever a dinâmica linear como o ponto de encontro entre duas outras áreas: a Análise Funcional e os Sistemas Dinâmicos. Neste trabalho, exploraremos o conceito de caos de Devaney linear em uma classe operadores lineares definidos em espaços de sequências absolutamente p -somáveis, mais precisamente os operadores *shift* com peso variável. Para isso, enunciamos alguns resultados da teoria de Análise Funcional e Sistemas Dinâmicos e então obtemos que a existência de um ponto periódico não trivial é uma condição suficiente para a caoticidade desses operadores.

1 Introdução

Na dinâmica linear, buscamos estudar conceitos da teoria de Sistemas Dinâmicos em espaços vetoriais. Desta forma, trabalharemos com espaços vetoriais normados completos, conhecidos como espaços de Banach, sobre um corpo \mathbb{K} , onde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} . Primeiramente, vemos uma breve introdução sobre sistemas dinâmicos com foco no caos de Devaney no contexto da dinâmica linear. Em seguida, definimos uma generalização dos espaços clássicos de sequências ℓ_p e os operadores *shift* com peso variável. Em vez de demonstrar a caoticidade dos operadores *shift* com peso diretamente, provamos condições para o caos dos *shifts* sem peso em espaços de sequências com peso associados. Por fim, obtemos o resultado principal por meio de uma relação de equivalência que preserva a caoticidade desses operadores. O último resultado é enunciado em uma forma mais geral em [4]. Entretanto, nos restringimos aos espaços clássicos de sequências, assim como em [1].

2 Dinâmica linear

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos básicos de dinâmica linear necessários para o caos de Devaney.

Definição 2.1. Um sistema dinâmico linear é um par (X, T) onde X é um espaço de Banach separável e $T : X \rightarrow X$ é um operador linear contínuo. Por abuso de notação, nos referiremos ao sistema dinâmico pela aplicação $T : X \rightarrow X$ ou simplesmente T .

Definição 2.2. Um sistema dinâmico $T : X \rightarrow X$ é topologicamente transitivo se, dados quaisquer dois abertos não nulos $U, V \subseteq X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Definição 2.3. Seja $T : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico. Um ponto $x \in X$ é periódico se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x = x$.

Denotamos o conjunto de todos os pontos periódicos de $T : X \rightarrow X$ por $\text{Per}(T)$.

Enunciamos uma versão do caos de Devaney com base na dinâmica linear.

Definição 2.4 (Caos Linear de Devaney). Um sistema dinâmico linear $T : X \rightarrow X$ é caótico no sentido de Devaney se satisfaz as seguintes propriedades:

1. T é topologicamente transitivo;
2. o conjunto de pontos periódicos em T é denso em X .

Provaremos a caoticidade dos *shifts* utilizando uma conjugação, que é uma relação de equivalência entre sistemas dinâmicos.

Definição 2.5. *Dois sistemas dinâmicos $T : X \rightarrow X$ e $S : Y \rightarrow Y$ são conjugados se existe um homeomorfismo $\phi : Y \rightarrow X$ tal que $\phi \circ T = S \circ \phi$. Ou seja, o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{S} & Y \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

Dizemos que a conjugação preserva uma propriedade P se para todos os sistemas dinâmicos (X, T) e (Y, S) conjugados, se (Y, S) satisfaz a propriedade P , então (X, T) também a satisfaz.

Proposição 2.6. *As seguintes propriedades dinâmicas são preservadas por conjugações:*

1. transitividade topológica;
2. possuir um conjunto de pontos periódicos denso no espaço;
3. caos de Devaney.

Demonstração. Veja [4, Proposition 1.13, Proposition 1.25 e Proposition 1.31]. ■

3 Espaços de sequências

Definimos os espaços de sequências que serão utilizados neste trabalho.

Definição 3.1. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $(v_j)_j$ uma sequência positiva. O espaço de sequências absolutamente p -somáveis com peso é o conjunto*

$$\ell_p(v) = \left\{ x = (x_j)_j \subseteq \mathbb{K} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p v_j^p < \infty \right\}.$$

O espaço das sequências absolutamente p -somáveis (sem peso) ℓ_p é um caso particular dos espaços $\ell_p(v)$ quando v é a sequência constante igual a 1.

Definimos também um importante subconjunto de $\ell_p(v)$, o das sequências que são nulas a partir de um certo índice. Mais precisamente:

$$c_{00} = \{ (x_j)_j \subseteq \mathbb{K} : \exists j_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_j = 0, \forall j \geq j_0 \}.$$

Proposição 3.2. *Os espaços $\ell_p(v)$ são espaços normados com a norma*

$$\|x\|_{p,v} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j v_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $x = (x_j)_j \in \ell_p$. Além disso:

1. $\ell_p(v)$ é um espaço de Banach, ou seja, é completo com a norma $\|\cdot\|_{p,v}$;
2. $\ell_p(v)$ é separável e c_{00} é denso em $\ell_p(v)$.

Demonstração. Veja [5, Example 1.5-4] e [2, Exemplo 1.6.4]. ■

Uma hipótese importante para a caracterização de caos para os operadores *shifts* é a convergência incondicional da base canônica dos espaços de sequências. Vejamos a definição de base de Schauder em espaços de Banach e convergência incondicional.

Definição 3.3. *Seja X um espaço normado e $(x_j)_j \subset X$. Então a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge incondicionalmente se, para toda permutação $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, a série*

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_{\sigma(j)}$$

converge.

Definição 3.4. *Uma sequência $(e_n)_n \subseteq X$ é uma base de Schauder de um espaço de Banach X se todo elemento do espaço $x \in X$ é escrito de forma única por*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

onde $(a_n)_n \subseteq \mathbb{K}$. Se essa série converge incondicionalmente para todo $x \in X$, a base é dita incondicional.

Chamamos essa série de expansão de x na base $(e_n)_n$.

O seguinte teorema contém alguns resultados importantes que serão utilizados no resultado final.

Teorema 3.5. *Sejam X um espaço de Banach e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série convergente. Então são equivalentes:*

1. *A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente.*
2. *Para toda sequência $(\varepsilon_n)_n \subseteq \{0, 1\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varepsilon_n$ converge.*
3. *Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon,$$

para qualquer conjunto finito M de \mathbb{N} tal que $\min M > n_\varepsilon$.

4. *Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left\| \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} x_n \varepsilon_n \right\| < \varepsilon,$$

para qualquer sequência $(\varepsilon_n)_n \subseteq \{0, 1\}$.

Demonstração. Veja [2, Teorema 10.1.16]. ■

Proposição 3.6. Denotamos a sequência de vetores canônicos de $\ell_p(v)$ por $(e_n)_n \subset \ell_p(v)$ tal que $e_n = (\delta_{n,j})_{j \in \mathbb{N}}$, onde δ representa o delta de Kronecker. A sequência de vetores canônicos $(e_n)_n$ forma uma base incondicional de $\ell_p(v)$.

Demonstração. Veja [2, Exemplo 1.6.4]. ■

4 Shifts em espaços de sequências

Nesta seção, apresentamos os operadores *backward shift* com peso e provamos uma caracterização para a caoticidade desses operadores.

Definição 4.1. Seja $(w_j)_j$ uma sequência positiva e limitada. Definimos o operador backward shift com peso B_w em ℓ_p dado por

$$\begin{aligned} B_w : \ell_p &\rightarrow \ell_p \\ (x_1, x_2, \dots) &\mapsto (w_2 x_2, w_3 x_3, \dots). \end{aligned}$$

Analogamente definimos os shifts sem peso em $\ell_p(v)$ por $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ onde $B(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$.

É fácil verificar que B_w e B são lineares. Além disso $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$ está bem definido desde que a sequência de pesos w seja limitada. Assumimos por enquanto que o operador $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ está bem definido, ou seja, que $B(x) \in \ell_p(v)$ para todo $x \in \ell_p(v)$.

Proposição 4.2. O operador $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ é contínuo se, e somente se, B está bem definido.

Demonstração. Veja [3, Proposição 4.1.3]. ■

Provaremos agora uma caracterização para a caoticidade do operador $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$. Utilizaremos o seguinte teorema que mostra um critério para que B seja topologicamente transitivo.

Teorema 4.3. Sejam $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ um shift unilateral e $(e_n)_n$ a base canônica em $\ell_p(v)$. Então B é topologicamente transitivo, se e somente se, existe uma sequência crescente (n_k) tal que $e_{n_k} \rightarrow 0$.

Demonstração. Veja [4, Theorem 4.3]. ■

Teorema 4.4. Sejam $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ um shift unilateral em um espaço de sequências com peso e (e_n) a base canônica de $\ell_p(v)$. Então são equivalentes:

1. B é caótico;
2. $\sum_{j=1}^{\infty} e_n < \infty$;

3. A sequência $(1, 1, \dots)$ pertence a $\ell_p(v)$;

4. Existe um ponto periódico não trivial de B em $\ell_p(v)$.

Demonstração. A implicação $(1) \implies (4)$ é trivial.

$(4) \implies (3)$ Sejam $x = (x_j)_j \in \ell_p(v)$ um ponto periódico não trivial de B e n o seu período. Isto é, $B^n(x) = (x_{j+n})_j = (x_j)_j$.

Segue que, dado j , $x_{j+kn} = x_j$ para todo k natural. Ou seja, x é da forma:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots).$$

Como $x \neq 0$, existe um índice j_0 tal que $x_{j_0} \neq 0$. Tomaremos uma sequência $(\varepsilon_j)_j \subseteq \{0, 1\}$ onde $\varepsilon_{j_0+kn} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e 0 nos índices restantes.

Então, do fato de que $(e_n)_n$ é uma base incondicional, a sequência $(x_j \varepsilon_j)_j$ pertence a $\ell_p(v)$. O mesmo vale para a sequência $\left(\frac{x_j}{x_{j_0}} \varepsilon_j\right)_j$, que é a sequência

$$y = (0, \dots, \underbrace{1}_{j_0}, 0, \dots, \underbrace{1}_{j_0+kn}, 0, \dots).$$

Aplicando o *shift* nesse mesmo vetor, obtemos $\{y, By, B^2y, \dots, B^{n-1}y\}$, cuja soma resulta na sequência $(1)_j$ como queríamos.

$(3) \implies (2)$ Segue da hipótese de que $(e_n)_n$ é base. Como $(1)_j \in \ell_p(v)$, vemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} 1e_j < \infty.$$

$(2) \implies (1)$ Como $\sum_{j=1}^{\infty} e_j < \infty$, segue que $e_j \rightarrow 0$. Então pelo Teorema 4.3, B é topologicamente transitivo. Basta então verificar que o conjunto de pontos periódicos é denso no espaço.

Seja $(x_j)_j \in \ell_p(v)$. Dado $\varepsilon > 0$, pela incondicionalidade da base e o Teorema 3.5, podemos tomar n_0 e $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, 0, \dots) \in c_{00}$ tais que

$$\|x - \tilde{x}\|_{p,v} = \left(\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |x_j|^p v_j^p \right)^{1/p} = \left\| \sum_{j=n_0+1}^{\infty} x_j e_j \right\|_{p,v} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Utilizando novamente a incondicionalidade sobre a sequência $(1)_j$, é possível construir uma sequência periódica $y = (y_j)_j$ de período n_0 com os termos de \tilde{x} . De fato, as sequências que são 1 em $j + kn_0$ e 0 nas coordenadas restantes, ou seja

$$p_j = \sum_{k=1}^{\infty} e_{j+kn_0},$$

pertencem a $\ell_p(v)$ para todo j . Então

$$\sum_{j=1}^{n_0} x_j p_j = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_0} x_j e_{j+kn_0}$$

é um ponto periódico de B e pertence a $\ell_p(v)$.

Novamente pela incondicionalidade da base, para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe m tal que para qualquer sequência $(\varepsilon_j)_j \subseteq \{0, 1\}$ temos que

$$\left\| \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_0} x_j \varepsilon_{j+kn_0} e_{j+kn_0} \right\|_{p,v} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Tome uma nova sequência periódica

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_0} x_j e_{j+kmn_0}.$$

Escolha $(\varepsilon_j)_j$ de forma que $\varepsilon_j = 1$ se $1 + mnk \leq j \leq n_0 + mnk$, onde $k \in \mathbb{N}$, e 0 nos termos restantes. Pela desigualdade (1) e a sequência $(\varepsilon_j)_j$ tomada, obtemos que

$$\|z - \tilde{x}\|_{p,v} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_0} x_j \varepsilon_{j+kmn_0} e_{j+kmn_0} \right\|_{p,v} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por fim, pela desigualdade triangular, vemos que

$$\|x - z\|_{p,v} \leq \|x - \tilde{x}\|_{p,v} + \|z - \tilde{x}\|_{p,v} < \varepsilon.$$

Portanto o conjunto dos pontos periódicos é denso em $\ell_p(v)$ o que torna B caótico. ■

Retomamos o problema original: caracterizar a caoticidade do operador $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$. Basta provarmos que o *shift* B_w é conjugado ao *shift* sem peso B . Então B_w será caótico se, e somente se, B é caótico.

Proposição 4.5. *Seja $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$ um sistema dinâmico. Defina o peso $v = (v_j)_j$ tal que $w_j = \frac{v_j}{v_{j+1}}$. Então $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ está bem definido. Além disso, $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$ e $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ são conjugados pelo isomorfismo topológico*

$$\begin{aligned} \varphi : \ell_p(v) &\rightarrow \ell_p \\ (x_j)_j &\mapsto (x_j v_j)_j. \end{aligned}$$

Demonstração. Veja [3, Proposição 4.1.6, Proposição 4.1.7]. ■

Reescrevemos o Teorema 4.4 de acordo com a sequência de pesos w do *shift* com peso.

Corolário 4.6. *Seja $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$ um shift unilateral com peso e $w = (w_j)_j$ uma sequência positiva e limitada. Então são equivalentes:*

1. B_w é caótico;
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^j w_i^{-1} \right)^p < \infty$;
3. A sequência $(\prod_{i=1}^1 w_i^{-1}, \prod_{i=1}^2 w_i^{-1}, \dots)$ pertence a ℓ_p ;
4. Existe um ponto periódico não trivial de B_w em ℓ_p .

Demonstração. Segue do Teorema 4.3 e da conjugação da proposição anterior. Como $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$ e $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ são conjugados, B é caótico se, e somente se, B_w é caótico. Já na segunda equivalência, $\sum_{j=1}^{\infty} e_j \in \ell_p(v)$ se, e somente se,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |v_j|^p < \infty.$$

Mas como $v_j = \prod_{i=1}^j w_i^{-1}$, a condição é equivalente a (ii) e (iii). Por fim, é fácil ver que

$$\begin{aligned} x \in \text{Per}(B) &\iff B^n x = x \iff \varphi \circ B^n(x) = \varphi(x) \iff B_w^n(\varphi(x)) = \varphi(x) \\ &\iff \varphi(x) \in \text{Per}(B_w). \end{aligned}$$

Segue que $\varphi(x) \neq 0$ se $x \neq 0$ já que φ é um isomorfismo. Ou seja, B_w possui um ponto periódico não trivial se, e somente se, B também possui. ■

Referências

- [1] BAYART, F.; MATHERON, É. **Dynamics of Linear Operators**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [2] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [3] BRAZ, J. H. S. **Dinâmica de Operadores Lineares em Espaços de Frechét**. Dissertação (mestrado) - Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, 2017.
- [4] GROSSE-ERDMANN, K.; PERIS, A. M. **Linear Chaos**. London: Springer Verlag, 2011.
- [5] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.



Cinemática Inversa com Referências Relativa e Global: Uma Implementação em Unity com HLSL e C#

Enrique Barbosa Oliveira

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
enriboliveira@ufu.br

Luis Florial Espinoza Sánchez

UFU, Instituto de Matemática, Campus Monte Carmelo, Minas Gerais, Brasil
luis.sanchez@ufu.br

Santos Alberto Enriquez Remigio

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
santos.er@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Braço robótico.
Ângulos articulares.
Cinemática inversa.

Neste trabalho, exploramos a abordagem global para determinar os ângulos de rotação de dois braços robóticos conectados, baseada no estudo de cinemática inversa. Derivamos fórmulas para os ângulos articulares utilizando conceitos básicos de geometria plana. Além disso, implementamos uma representação gráfica das regiões de alcance e determinamos o domínio dos ângulos possíveis. Para otimização computacional, utilizamos o aplicativo Unity, a linguagem C# e HLSL para execução na placa de vídeo.

1 Introdução

A robótica tem se consolidado como um dos campos mais dinâmicos da ciência e tecnologia, impulsionando avanços significativos na automação, inteligência artificial e simulação computacional. Um dos desafios centrais na área é a determinação precisa dos ângulos articulares de um robô para alcançar posições e orientações desejadas, tarefa conhecida como cinemática inversa. Esse problema é fundamental para aplicações que vão desde a robótica industrial até animações em jogos digitais e animações em filmes, como podemos ver em [4, 2]. A cinemática inversa desempenha um papel essencial nesses contextos, permitindo movimentos realistas e precisos, otimizando o desempenho de sistemas automatizados. Além disso, é amplamente empregada em realidade virtual e em braços robóticos, demonstrando sua importância em áreas tecnológicas.

Neste contexto, este trabalho apresenta uma implementação computacional que permite visualizar e analisar as regiões de alcance do braço robótico, considerando diferentes restrições articulares. Os detalhes do código desenvolvido serão apresentados em uma seção posterior.

Além de explorar os fundamentos matemáticos da cinemática inversa, este estudo busca otimizar os cálculos computacionais por meio do processamento gráfico, tornando a simulação mais eficiente e aplicável em tempo real com o código desenvolvido. Os resultados obtidos contribuem tanto para o entendimento teórico do problema quanto para sua implementação prática em aplicações que exigem manipulação robótica precisa e responsiva.

2 Conceitos básicos de robótica

Na robótica manipuladora, a configuração espacial de um robô é descrita matematicamente por meio da álgebra linear, geometria computacional e cálculo diferencial. Para mais detalhes, ver referências [1, 3]. Entre os principais conceitos, destacam-se:

- **Cinemática Direta:** Relaciona os parâmetros articulares à posição e orientação do efetuador final.
- **Cinemática Inversa:** Determina os valores articulares para atingir uma posição desejada, podendo ter múltiplas ou nenhuma solução, conforme as restrições do sistema.

2.1 Cinemática direta

A cinemática direta se baseia em conceitos de geometria, trigonometria e álgebra linear. Em um manipulador robótico, cada junta fornece um grau de liberdade (DOF - Degree of Freedom), que pode ser de rotação ou translação. A configuração das juntas determina diretamente a posição e a orientação do efetuador final no espaço, ver [3, 6].

Para calcular a posição do efetuador final, utilizamos equações matemáticas que relacionam os comprimentos dos elos e os ângulos das juntas. Essas equações são derivadas da modelagem geométrica do robô e podem ser representadas por matrizes de transformação homogênea.

2.2 Modelagem Matemática da Cinemática direta

As equações que modelam a posição final do braço dependem dos comprimentos dos segmentos e dos ângulos de rotação. Dependendo do referencial adotado para medir esses ângulos, as equações podem ser ligeiramente diferentes, mas todas são equivalentes por meio de transformações lineares.

Existem duas abordagens amplamente utilizadas. A primeira, conhecida como referencial relativo, considera que o ângulo de rotação de cada segmento do braço é medido em relação ao segmento anterior. Ou seja, cada braço usa o braço anterior como eixo de referência para a medição do próximo ângulo. Veja a Figura 1. No caso de um sistema com dois braços, as equações são:

$$\begin{cases} x = L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_2 + \theta_1). \\ y = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2 + \theta_1). \end{cases} \quad (1)$$

Onde, L_1 e L_2 são os comprimentos dos elos; θ_1 e θ_2 são os ângulos das juntas em relação a um referencial relativos.

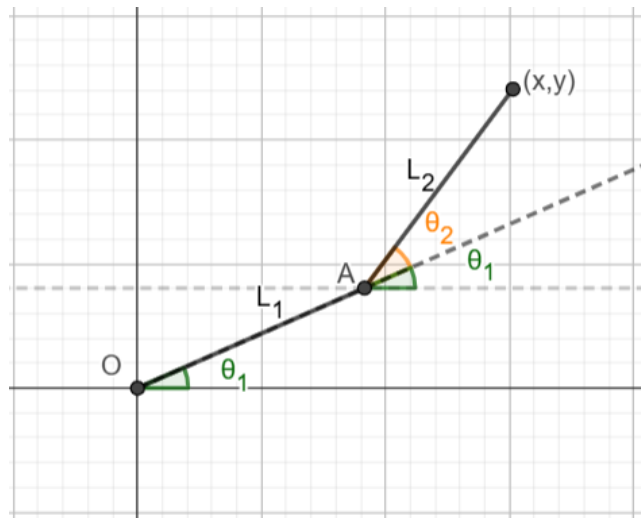


Figura 1: Orientação relativa.

A segunda abordagem, chamada de referencial global, mede os ângulos de rotação de cada braço em relação ao eixo x , como ilustrado na Figura 2. Nesse caso, as equações que modelam a posição final do sistema são:

$$\begin{cases} x = L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_2). \\ y = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2). \end{cases} \quad (2)$$

e os ângulo θ_1 e θ_2 serão os ângulo das juntas em relação a o eixo x .

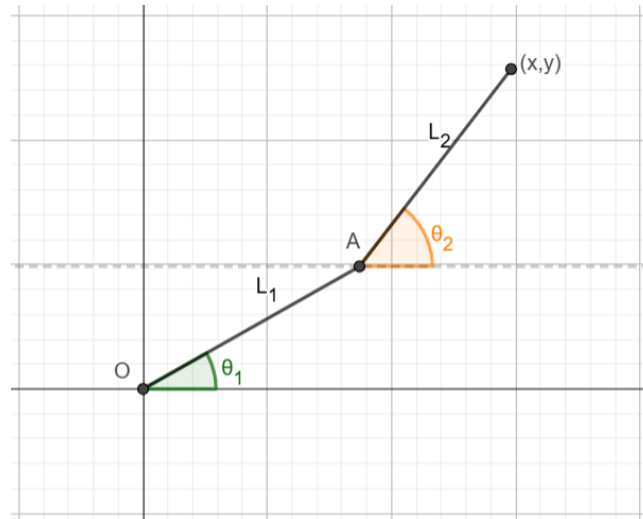


Figura 2: Orientação global.

Estamos interessados em aplicar as técnicas de braço robótico para implementar códigos na construção de jogos. Para termos modelos mais fieis com a realidade, iremos limitar os ângulos, pois um braço robótico tem suas limitações físicas. Em particular, vamos fixar duas amplitudes máximas ω_1 e ω_2 , e considerar $-\omega_1 \leq \theta_1 \leq \omega_1$ e $-\omega_2 \leq \theta_2 \leq \omega_2$. Na figura a seguir 3, representamos a orientação relativa e global para $\omega_1 = \omega_2 = \frac{\pi}{4}$, isto é, $-\frac{\pi}{4} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{4}$.

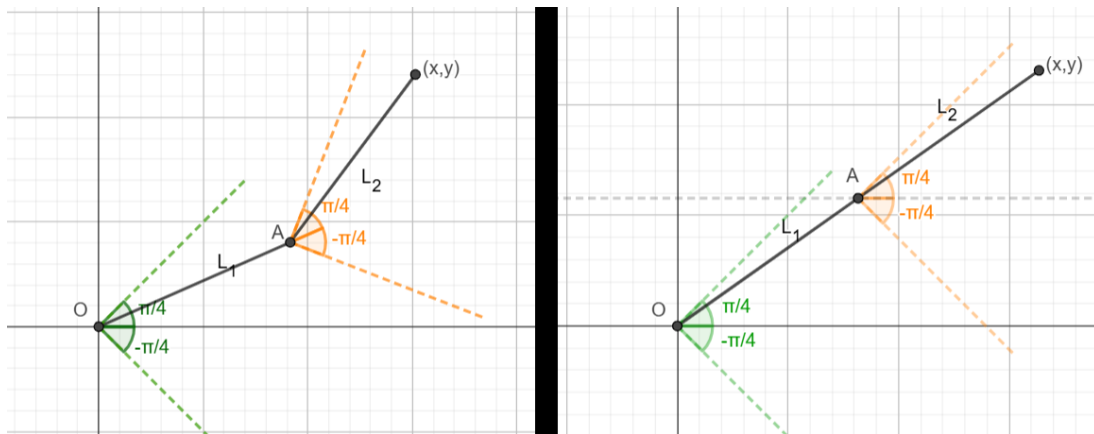


Figura 3: A esquerda Orientação relativa, e a direita Orientação global.

Em geral, dados L_1 e L_2 e um ponto $P(x, y)$ que é alcançado pelo par (θ_1, θ_2) , pode ser alcançado por outro par de ângulos, que chamaremos (θ'_1, θ'_2) . no caso especial que $L_1 = L_2$ é possível verificar que $\theta'_1 = \theta_2$ e $\theta'_2 = \theta_1$. Porém, devido às restrições impostas aos ângulos $-\omega_1 \leq \theta_1 \leq \omega_1$ e $-\omega_2 \leq \theta_2 \leq \omega_2$, pode ser que um ponto $P(x, y)$ seja alcançado uma única vez.

A seguir apresentamos algumas imagens (geradas usando o código desenvolvido) para ilustrar as regiões geradas quando utilizamos a orientação global e relativa. Definimos azul e vermelho para

regiões que são alcançadas apenas por um par de ângulos e magenta quando o ponto seja alcançado por dois pares de ângulos.

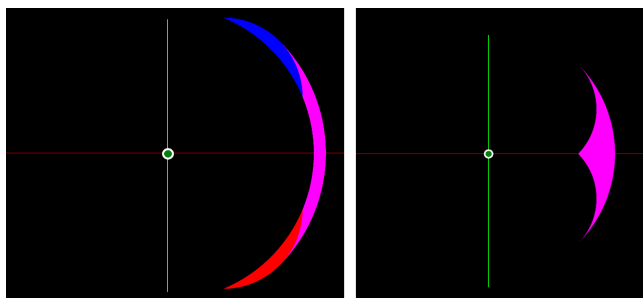


Figura 4: Região com orientação relativa e global, onde $L_1 = 1, L_2 = 1$ e $-\frac{\pi}{4} \leq \theta_1, \theta_2 \leq \frac{\pi}{4}$.

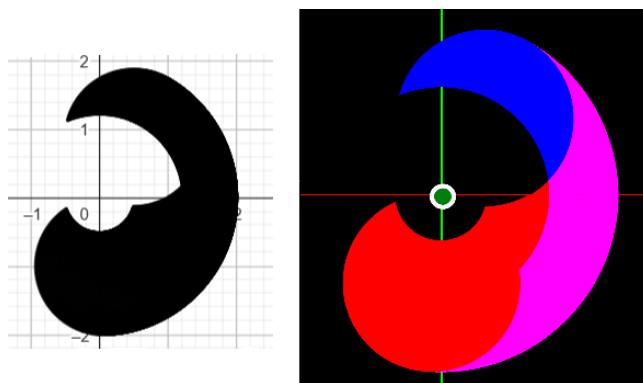


Figura 5: Região desenhada no Geogebra e no Código do autor com orientação relativa, $L_1 = 1, L_2 = 1$ e $-1.675 \leq \theta_1 \leq 1.05208; -2.62146 \leq \theta_2 \leq 1.82779$.

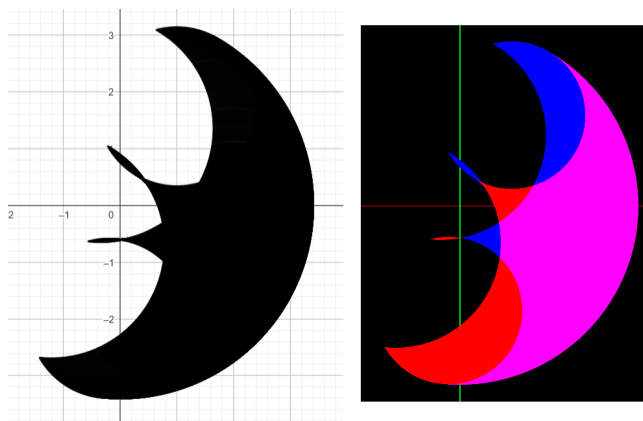


Figura 6: Região desenhada no Geogebra e no Código do autor com orientação global, $L_1 = 2, L_2 = 1.4$ e $-1.675 \leq \theta_1 \leq 1.05208; -2.62146 \leq \theta_2 \leq 1.82779$.

As imagens das regiões geradas pelo código do autor foram feitas com o software Unity [5] junto ao uso da placa de vídeo visando velocidade e geração em tempo real. O código utiliza o C# para armazenar as informações dos comprimentos e limites de ângulo de um braço robótico hipotético e pede para placa de vídeo, com a linguagem HLSL, que faça verificações com a cinemática inversa para cada pixel da tela e se caso ele esteja dentro da região, ele pintará com a respectiva cor.

2.3 Cinemática inversa

A cinemática inversa é o processo de determinar os ângulos das juntas de um robô para que seu efetuador final alcance uma posição desejada no espaço. A fórmula para encontrar os ângulos usando o referencial relativo é bem conhecida, ver [6]. Queremos encontrar os ângulos θ_1 e θ_2 de forma que o braço alcance o ponto $P(x, y)$ usando o referencial global para um braço robótico com dois segmentos de comprimentos L_1 e L_2 .

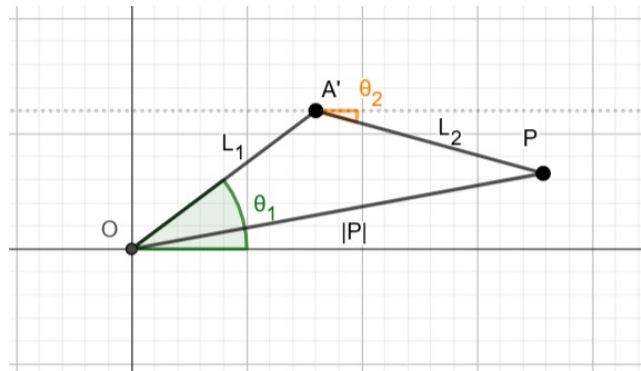


Figura 7: Ângulos θ_1 e θ_2 em Orientação Global.

Neste caso, o cálculo desses ângulos será feito no referencial global, como na Figura 7. Os dados disponíveis são os comprimentos, L_1 , L_2 e distância da origem O ao ponto P , denotada por $|P|$. Para isso, iremos criar um triângulo $OA'P$, como na Figura 8, com os comprimentos L_1 , L_2 e $|P|$.

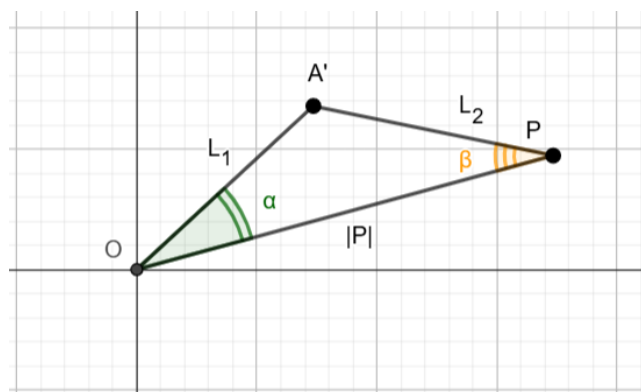


Figura 8: Triângulo formado pelos pontos O , A' e P .

Nomeando os ângulos orientados $\widehat{POA'} = \alpha : \alpha \in [0, \pi]$ e $\widehat{A'PO} = \beta : \beta \in [0, \pi]$ e podemos calcular estes ângulos usando a lei dos cossenos:

$$\begin{cases} L_1^2 + |P|^2 - 2|P|L_1 \cos(\alpha) = L_2^2 \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{L_1^2 + |P|^2 - L_2^2}{2|P|L_1}\right) \\ L_2^2 + |P|^2 - 2|P|L_2 \cos(\beta) = L_1^2 \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{L_2^2 + |P|^2 - L_1^2}{2|P|L_2}\right) \end{cases}$$

Notemos que a reta que passa por O e P determina duas regiões do plano. Se considerarmos o ponto A' acima da reta que passa por OP , teremos α e β positivos, porém se considerarmos o ponto A' abaixo da reta OP , como vemos na Figura 9, teremos que α e β serão negativos, isto é, $\widehat{POA'} = \alpha$ e $\widehat{A'PO} = \beta$ onde $-\alpha \in [0, \pi]$ e $-\beta \in [0, \pi]$.

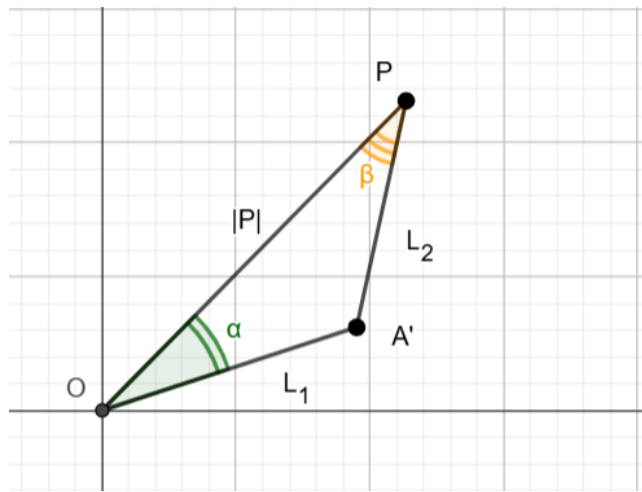


Figura 9: Triângulo $PA'O$

Tomando $\angle P = \gamma = \arccos\left(\frac{x}{|P|}\right) \frac{y}{|y|} : \gamma \in [-\pi, \pi[$ no caso do triângulo onde α e β são positivos:

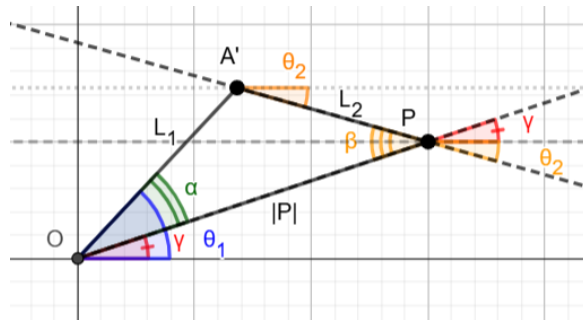


Figura 10: Representação dos ângulos calculados no triângulo $OA'P$

Notemos que trabalhamos com ângulos positivos e negativos, assim podemos ver na Figura 10, que $\theta_1 > 0$ e $\theta_2 < 0$, segue que $\theta_1 = \gamma + \alpha$ e $\beta = \gamma + (-\theta_2)$, e por tanto $\theta_1 = \gamma + \alpha$ e $\theta_2 = \gamma - \beta$.

Em geral, pode ser verificado que

$$\theta_1 = \gamma + \alpha \quad \text{e} \quad \theta_2 = \gamma - \beta$$

Por fim dando os limites para os ângulo, este ponto será alcançável caso $-\pi \leq -\omega_1 \leq \theta_1 \leq \omega_1 \leq \pi$ e $-\pi \leq -\omega_2 \leq \theta_2 \leq \omega_2 \leq \pi$.

3 Conclusão

A abordagem global apresentada neste trabalho se mostrou eficiente na determinação dos ângulos articulados de dois braços robóticos conectados. A formulação matemática baseada em geometria plana permitiu uma análise clara das possíveis configurações do sistema. A implementação computacional no Unity, com suporte de C# e HLSL, possibilitou a visualização das regiões de alcance e a otimização do cálculo dos ângulos viáveis. Esses resultados ressaltam a importância de métodos alternativos para a solução de problemas de cinemática inversa, abrindo caminho para futuras extensões a sistemas robóticos mais complexos e aplicações em tempo real.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

Referências

- [1] Bruno Siciliano, Oussama Khatib; Springer Handbook of Robotics. 2016.
- [2] Chuck Rose, Seth Rosenthal, John Pella; The Process of Motion Capture: Dealing with the Data. Microsoft Research, Disponível em: <<https://ai.stanford.edu/~latombe/cs99k/2000/capture.pdf>>.
- [3] M. John, D. Hayes; Introduction to Robotics, Disponível em: <<https://carleton.ca/johnhayes/wp-content/uploads/MECH4503.pdf>>. Acesso em: 23 de Jan. 2008
- [4] RSI Updates; Citizencon 2017: Teaching a character how to walk on any terrain. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=PryJ3CpHcXQ>>. Acesso em: 27 de out. de 2017;
- [5] Unity. Disponível em: <<https://unity.com/pt>>.
- [6] Yu Xiang; Inverse Kinematics. CS 6301 Special Topics: Introduction to Robot Manipulation and Navigation. The University of Texas at Dallas. Disponível em: <https://yuxng.github.io/Courses/CS6301Fall2024/lecture_18_inverse_kinematics.pdf>. Acesso em: 21 out. 2024.



Comparando Restos de Anéis Quocientes

Robert Vieira de Araujo

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
robert.araujo@ufu.br

Victor Gonzalo Lopez Neumann

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
victor.neumann@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Ideais.
Anel quociente.
Isomorfismo.

Este trabalho tem como objetivo analisar as relações entre diferentes anéis quocientes. Para isso, iniciamos com a definição da estrutura algébrica dos anéis e seus ideais, seguida da introdução ao conceito de homomorfismo de anéis. Em seguida, classificamos os elementos de um anel em relação a um ideal e construímos o anel quociente. Por fim, demonstramos a existência de uma bijeção entre um anel quocientado por vários ideais e uma coleção de anéis quocientes correspondentes, estabelecendo uma relação entre essas estruturas algébricas.

1 Introdução

A álgebra abstrata é um dos pilares da matemática moderna, fornecendo estruturas e ferramentas fundamentais para diversas áreas do conhecimento. Entre essas estruturas, os anéis desempenham um papel central, aparecendo naturalmente em contextos como a teoria dos números, a geometria algébrica e a matemática computacional, reforçando sua importância dentro e fora da matemática pura.

O estudo dos anéis envolve a análise de suas operações internas, propriedades estruturais e elementos notáveis, como os ideais. Essas propriedades permitem compreender não apenas os próprios anéis, mas também suas interações com outras estruturas algébricas, em particular, outros anéis.

Essas interações podem ser estudadas através dos homomorfismos de anéis, que são funções que preservam a estrutura algébrica entre anéis. Esses mapeamentos permitem a análise de relações entre diferentes anéis e são fundamentais para a compreensão de muitos resultados da álgebra.

Neste trabalho, discutiremos sobre a existência de uma bijeção entre um anel quocientado por vários ideais e uma coleção de anéis quocientes correspondentes, juntamente com exemplos para melhor estudo. Para isso, utilizaremos as referências [1], [2] e [3].

2 Anéis e Ideais

Definição 2.1. *Seja \mathcal{A} um conjunto não vazio no qual estão definidas duas operações, chamadas de Adição e Multiplicação, denotadas por $+$ e \cdot , respectivamente. \mathcal{A} é dito um **anel** e denotado por $(\mathcal{A}, +, \cdot)$, se para quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$, as seguintes condições são satisfeitas:*

A1) (Associatividade da adição) $a + (b + c) = (a + b) + c$;

A2) (Comutatividade da adição) $a + b = b + a$;

A3) (Existência do elemento neutro da adição) Existe $0 \in \mathcal{A}$ tal que $0 + a = a + 0 = a$;

A4) (Existência do inverso da adição) Para todo $a \in \mathcal{A}$, existe um único $-a \in \mathcal{A}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$;

M1) (Associatividade da multiplicação) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

AM) (Distributividade da multiplicação com respeito à adição) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$;

Para simplificar a escrita, denotaremos a multiplicação $a \cdot b$ simplesmente por ab .

Definição 2.2. *Um anel \mathcal{A} é dito **anel com unidade**, se existe $1 \in \mathcal{A}$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$.*

Definição 2.3. *Um anel \mathcal{A} é dito um **anel comutativo** se a operação de multiplicação é comutativa, ou seja, se $ab = ba$ para todos $a, b \in \mathcal{A}$.*

Neste trabalho, **anel** significará sempre anel comutativo com unidade, o que não exclui o anel nulo.

Exemplo 2.4. *O conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros é um anel comutativo e com unidade.*

Definição 2.5. Seja I um subconjunto não vazio de um anel \mathcal{A} . I é chamado de **ideal** de \mathcal{A} , se as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} x + y &\in I, \text{ para todos } x, y \in I; \\ ax &\in I, \text{ para todo } x \in I \text{ e } a \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Ou ainda

$$\begin{cases} x, y \in I \\ a, b \in \mathcal{A} \end{cases} \implies ax + by \in I.$$

Exemplo 2.6. O conjunto $n\mathbb{Z} = \{n \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ é um ideal de \mathbb{Z} .

De fato, sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $x, y \in n\mathbb{Z}$. Então existem $k, j \in \mathbb{Z}$ tais que $x = nk$ e $y = nj$.

$$\begin{cases} x, y \in n\mathbb{Z} \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies ax + by = a(nk) + b(nj) = n(ak + bj) \implies ax + by \in n\mathbb{Z}.$$

Portanto, $n\mathbb{Z}$ é ideal de \mathbb{Z} .

Proposição 2.7. Sejam dois ideais I e J de um anel \mathcal{A} . Então

1. $I + J \stackrel{\text{def}}{=} \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$ é um ideal de \mathcal{A} ;
2. $I \cdot J \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1y_1 + \dots + x_ry_r \mid r \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_r \in I, y_1, \dots, y_r \in J\}$ é um ideal de \mathcal{A} .

Demonstração.

1. É claro que $I + J$ está contido em \mathcal{A} . Sejam $x, y \in I + J$ e $a, b \in \mathcal{A}$. Então existem $x_1, x_2 \in I$ e $y_1, y_2 \in J$ tais que $x = x_1 + y_1$ e $y = x_2 + y_2$. Assim, $ax + by = a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2) = ax_1 + ay_1 + bx_2 + by_2 = (ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2)$. Como $ax_1 + bx_2 \in I$ e $ay_1 + by_2 \in J$, então $ax + by \in I + J$. Portanto, $I + J$ é ideal de \mathcal{A} .
2. É claro que $I \cdot J$ está contido em \mathcal{A} . Sejam $x, y \in I \cdot J$ e $a, b \in \mathcal{A}$. Então existem inteiros positivos $r \leq n$ tais que $x = x_1y_1 + \dots + x_ry_r$ e $y = x_{r+1}y_{r+1} + \dots + x_ny_n$, com $x_k \in I$ e $y_k \in J$, para $k = 1, \dots, n$. Assim, $ax + by = a(x_1y_1 + \dots + x_ry_r) + b(x_{r+1}y_{r+1} + \dots + x_ny_n)$. Pela propriedade de ideais, temos $ax_k, bx_k \in I$ para $k = 1, \dots, n$. Logo, $ax + by \in I \cdot J$. Portanto, $I \cdot J$ é ideal de \mathcal{A} . ■

Definição 2.8. Dois ideais I e J de um anel \mathcal{A} são ditos **coprímos** se $I + J = (1) = \mathcal{A}$.

Em [2] encontramos a definição formal do máximo divisor comum (mdc) entre números inteiros e ainda encontramos desmonstrado na página 20 o seguinte resultado:

Teorema 2.9. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Então existem $x, y \in \mathbb{Z}$ com*

$$ax + by = \text{mdc}(a, b).$$

Portanto se $c \in \mathbb{Z}$ é tal que $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid \text{mdc}(a, b)$.

Exemplo 2.10. *Sejam $n_1\mathbb{Z}$ e $n_2\mathbb{Z}$ ideais do anel \mathbb{Z} com n_1 e n_2 coprimos, isto é, $\text{mdc}(n_1, n_2) = 1$. Pelo Teorema anterior, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$n_1x + n_2y = 1 \implies 1 \in n_1\mathbb{Z} + n_2\mathbb{Z} \implies n_1\mathbb{Z} + n_2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

Portanto para quaisquer inteiros n_1, n_2 coprimos, os ideais $n_1\mathbb{Z}, n_2\mathbb{Z}$ são ideais coprimos de \mathbb{Z} .

3 Aplicações Entre Anéis

Definição 3.1. *Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} dois anéis. Uma aplicação $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um **homomorfismo de anéis** se para todos $x, y \in \mathcal{A}$, satisfaz*

- $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$.
- $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$.
- $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$.

Denotaremos o conjunto de todos os homomorfismos de anéis $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ por $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e definimos ainda o kernel de um homomorfismo como o conjunto $\text{Ker } \phi := \{a \in \mathcal{A} \mid \phi(a) = 0\}$.

Veja que com esta definição conseguimos mostrar facilmente os seguintes resultados:

Lema 3.2. *Seja ϕ um homomorfismo de anéis. Então $0 \in \text{Ker } \phi$.*

Demonstração. Basta observar que $0 = \phi(0) - \phi(0) = \phi(0 - 0) = \phi(0)$. ■

Lema 3.3. *Um homomorfismo de anéis $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é injetor se, e somente se, $\text{Ker } \phi = \{0\}$.*

Demonstração. Se $a \in \text{Ker } \phi$, então $\phi(a) = 0 = \phi(0)$. Como ϕ é injetor, então $a = 0$ e $\text{Ker } \phi = \{0\}$. Por outro lado, temos que se $\phi(a) = \phi(b)$, então $\phi(a - b) = 0$, ou seja, $a - b \in \text{Ker } \phi$. Assim, se $\text{Ker } \phi = \{0\}$, então $\phi(a) = \phi(b)$ se, e somente se, $a = b$. Portanto ϕ é injetor. ■

Lema 3.4. *Seja $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo de anéis. Então $\text{Ker } \phi$ é um ideal de \mathcal{A} .*

Demonstração. Sejam $a, b \in \text{Ker } \phi, \alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Então

$$\phi(\alpha a + \beta b) = \phi(\alpha)\phi(a) + \phi(\beta)\phi(b) = \phi(\alpha)0 + \phi(\beta)0 = 0 + 0 = 0.$$

Assim, $\alpha a + \beta b \in \text{Ker } \phi$. Portanto $\text{Ker } \phi$ é ideal de \mathcal{A} . ■

Definição 3.5. Um homomorfismo de anéis bijetor ϕ é chamado de **isomorfismo**.

Dado um ideal $I \subset \mathcal{A}$, podemos definir a seguinte relação: $a \equiv b \pmod{I}$ se, e só se, $a - b \in I$, chamada de congruência módulo I . Se I for um ideal gerado por um único elemento como no caso $n\mathbb{Z}$, obtemos a noção usual de congruência módulo n , que pode ser encontrada em [2, página 34]. Veja que esta relação é uma relação de equivalência:

- (Reflexiva) $a - a = 0 \in I \implies a \equiv a \pmod{I}$;
- (Simétrica) $a \equiv b \pmod{I} \implies a - b \in I \implies -(a - b) = b - a \in I \implies b \equiv a \pmod{I}$;
- (Transitiva) $\begin{cases} a \equiv b \pmod{I} \implies a - b \in I \\ b \equiv c \pmod{I} \implies b - c \in I \end{cases} \implies (a - b) + (b - c) = (a - c) \in I$
 $\therefore a \equiv c \pmod{I}$

Assim, denotaremos a classe de equivalência de $a \in \mathcal{A}$ por uma das seguintes formas:

$$a + I = a \bmod I = \bar{a}$$

em que \mathcal{A}/I é o conjunto das classes de equivalência módulo I .

Podemos dar uma estrutura de anel para o conjunto \mathcal{A}/I definindo

$$\overline{a + b} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{a} + \bar{b} \quad \text{e} \quad \overline{a \cdot b} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{a} \cdot \bar{b}.$$

Definição 3.6. O anel \mathcal{A}/I é chamado **anel quociente** de \mathcal{A} por I .

O anel quociente possui um homomorfismo sobrejetor natural chamado de homomorfismo quociente ou homomorfismo projeção, que leva um elemento em sua classe de equivalência:

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{A} &\twoheadrightarrow \mathcal{A}/I \\ a &\mapsto \bar{a}. \end{aligned}$$

Teorema 3.7 (Propriedade Universal do Quociente). *Seja \mathcal{A} um anel e seja $I \subseteq \mathcal{A}$ um ideal, com mapa de projeção correspondente $\pi : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}/I$. Para um anel qualquer \mathcal{B} , seja*

$$\text{Hom}_I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid \phi(I) = 0\}.$$

Então temos um bijeção natural

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathcal{A}/I, \mathcal{B}) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \\ \psi &\longmapsto \psi \circ \pi \\ \bar{\phi} &\longleftarrow \phi, \end{aligned}$$

com $\bar{\phi}$ definido por

$$\begin{aligned}\bar{\phi} : \mathcal{A}/I &\longrightarrow \mathcal{B} \\ \bar{a} &\longmapsto \phi(a).\end{aligned}$$

Demonstração. veja que $\bar{\phi}$ está bem definido, pois

$$\bar{a} = \bar{b} \iff a - b \in I \implies \phi(a - b) = 0 \iff \phi(a) = \phi(b).$$

Ainda, para $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{A}/I$, temos $\bar{\phi}(\bar{1}) = \phi(1) = 1$ e $\bar{\phi}(\overline{ab + c}) = \phi(ab + c) = \phi(a)\phi(b) + \phi(c) = \bar{\phi}(\bar{a})\bar{\phi}(\bar{b}) + \bar{\phi}(\bar{c})$, pois ϕ é homomorfismo de anéis. Portanto $\bar{\phi}$ é também um homomorfismo de anéis.

Considere então as aplicações

$$\begin{aligned}F : \text{Hom}(\mathcal{A}/I, \mathcal{B}) &\longrightarrow \text{Hom}_I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) & \text{e} & & G : \text{Hom}_I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}/I, \mathcal{B}) \\ \psi &\longmapsto \psi \circ \pi & & & \phi &\longmapsto \bar{\phi}.\end{aligned}$$

Assim, $F(G(\phi)) = F(\bar{\phi}) = \bar{\phi} \circ \pi = \phi$ e $G(F(\psi)) = G(\psi \circ \pi) = \bar{\psi} \circ \pi = \psi$. Como queríamos demonstrar. ■

Teorema 3.8 (Teorema do Isomorfismo). *Seja $\phi : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo sobrejetor de anéis. Então ϕ induz um isomorfismo*

$$\begin{aligned}\bar{\phi} : \mathcal{A}/\ker \phi &\xrightarrow{\cong} \mathcal{B} \\ \bar{a} &\longmapsto \phi(a).\end{aligned}$$

Demonstração. A propriedade Universal do Quociente mostra a existência de $\bar{\phi}$. Como ϕ é sobrejetor, é claro que $\bar{\phi}$ também é sobrejetor. Por outro lado, $\ker \bar{\phi} = \{\bar{a} \in \mathcal{A}/I \mid \bar{\phi}(\bar{a}) = \phi(a) = 0\}$. Se $\phi(a) = 0$, então $a \in \ker \phi$, então $\bar{a} = a + \ker \phi = \bar{0}$, pois os elementos que estão no ideal equivalem a 0 no quociente. Logo, $\ker \bar{\phi} = (\bar{0})$ e $\bar{\phi}$ é injetor também. Portanto $\bar{\phi}$ é um isomorfismo de anéis. ■

Temos então o suficiente para mostrar o seguinte resultado:

4 Teorema Chinês dos Restos

Teorema 4.1 (Teorema Chinês dos Restos para Anéis). *Sejam \mathcal{A} um anel e I_1, \dots, I_n ideais dois a dois coprimos. Então*

$$1. \ I_1 \cap \dots \cap I_n = I_1 \cdot \dots \cdot I_n.$$

2. O mapa "diagonal"

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{A}}{I_1 \cdot \dots \cdot I_n} &= \frac{\mathcal{A}}{I_1 \cap \dots \cap I_n} \xrightarrow{\cong} \frac{\mathcal{A}}{I_1} \times \dots \times \frac{\mathcal{A}}{I_n} \\ a \bmod I_1 \cap \dots \cap I_n &\longmapsto (a \bmod I_1, \dots, a \bmod I_n)\end{aligned}$$

é um isomorfismo de anéis.

Demonstração.

1. Para quaisquer ideais I_i , sempre temos $I_1 \cdot \dots \cdot I_n \subseteq I_1 \cap \dots \cap I_n$ devido as propriedades dos ideais. Mostraremos a inclusão oposta por indução em n , sendo o caso $n = 1$ trivial. Para $n = 2$, como I_1 e I_2 são coprimos, existem $a_i \in I_i$ tais que $1 = a_1 + a_2$. Assim,

$$c \in I_1 \cap I_2 \implies c = a_1 c + c a_2 \in I_1 \cdot I_2$$

como desejado. Agora para $n > 2$, mostremos que $I_1 \cdot \dots \cdot I_{n-1}$ e I_n são coprimos.

Como I_i e I_n são coprimos para $i < n$, existem $a_i \in I_i$ e $b_i \in I_n$ tais que $a_i + b_i = 1$ para $i = 1, \dots, n-1$. Assim,

$$1 = (a_1 + b_1) \cdots (a_{n-1} + b_{n-1}) \in I_1 \cdot \dots \cdot I_{n-1} + I_n$$

ou seja, $I_1 \cdot \dots \cdot I_{n-1} + I_n = (1)$. Por hipótese de indução, para 2 ideais, temos

$$(I_1 \cap \dots \cap I_{n-1}) \cap I_n = (I_1 \cdot \dots \cdot I_{n-1}) \cap I_n = (I_1 \cdot \dots \cdot I_{n-1}) \cdot I_n.$$

2. Veja que o kernel deste mapa é $I_1 \cap \dots \cap I_n$. Sendo assim, basta mostrarmos que o mapa é sobrejetor e o resultado segue do Teorema do Isomorfismo.

Por \mathcal{A} -linearidade, para mostrar a sobrejetividade é suficiente encontrar, para cada $i = 1, \dots, n$, pré-imagens para os vetores da forma $(0, \dots, 0, \bar{1}, 0, \dots, 0)$ com $\bar{1}$ na i -ésima entrada, ou seja, elementos $e_i \in \mathcal{A}$ tais que

$$\begin{cases} e_i \equiv 1 \pmod{I_i} \\ e_i \equiv 0 \pmod{I_j} \end{cases} \quad \text{para } i \neq j.$$

De fato, com isso teremos que $a = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$ será uma pré-imagem para um vetor arbitrário $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$. Podemos assumir $i = n$ e pelo item anterior, $I_1 \cap \dots \cap I_{n-1}$ e I_n são coprimos, então existem elementos $e_n \in I_1 \cap \dots \cap I_{n-1}$ e $b \in I_n$ com $e_n + b = 1$. Como e_n satisfaz as condições pedidas, o resultado está provado. ■

Satisfazendo as hipóteses do Teorema 4.1, temos como um caso particular o famoso Teorema Chinês dos Restos nos números inteiros:

Exemplo 4.2. Se b_1, \dots, b_k são inteiros quaisquer e a_1, \dots, a_k são dois a dois coprimos, então o

sistema de equações

$$x \equiv b_1 \pmod{a_1}$$

$$x \equiv b_2 \pmod{a_2}$$

$$\vdots$$

$$x \equiv b_k \pmod{a_k}$$

admite solução, que é única módulo $a_1 a_2 \cdots a_k$.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, o primeiro autor agradece ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento. O segundo autor agradece pelo apoio financeiro dos projetos FAPEMIG APQ-00470-22 e RED-00133-21, e CNPq 307924/2023-8.

Referências

- [1] Garcia, A., & Lequain, Y. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: Editora SBM. 2002.
- [2] Martinez, F. E. B. et al. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**, Rio da Janeiro: Editora SBM.
- [3] Tengan, E; Borges, H. **Álgebra Comutativa em 4 Movimentos**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2014.



Contribuições Matemáticas da Grécia Antiga - Linhas de pensamento Secundárias

Giovanna Soares Vieira

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
giovanna.vieira1@ufu.br

Hernan Roberto Montufar Lopez

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
montufar@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

História da matemática.
Matemática Grega.
Astronomia Antiga.

Este trabalho apresenta um relato sobre algumas contribuições de matemáticos gregos antigos, destacando brevemente suas influências na evolução da matemática e da astronomia. São abordadas as principais realizações de Eratóstenes, Aristarco de Samos, Menelau de Alexandria, Ptolomeu e Heron de Alexandria, incluindo métodos como o crivo de Eratóstenes, estimativas de distâncias astronômicas, elaboração de tabelas trigonométricas e proposições geométricas. O texto ressalta a importância dessas contribuições para o pensamento científico, especialmente na consolidação da matemática como disciplina lógica e dedutiva. Para isso, são utilizadas fontes históricas e matemáticas que contextualizam as descobertas e suas aplicações na Grécia Antiga.

1 Introdução

A matemática grega é frequentemente considerada um dos pilares fundamentais do desenvolvimento científico e filosófico da civilização ocidental. Desde os primórdios da filosofia natural na Jônia até o florescimento da matemática teórica em Alexandria, os gregos legaram ao mundo uma herança intelectual que influenciou profundamente a ciência, a filosofia e a tecnologia. Este trabalho tem como objetivo estudar a história da matemática grega, com foco na primeira parte do capítulo 8 de [1], intitulado "Correntes Secundárias". Essa seção do livro aborda a evolução da matemática grega após o período clássico, destacando as contribuições de figuras como Eratóstenes, Aristarco, Menelau e Ptolomeu, e explorando como suas descobertas moldaram o pensamento matemático e astronômico.

A escolha desse período específico da matemática grega justifica-se pela sua importância na transição para a matemática aplicada, que ganhou destaque com o desenvolvimento da trigonometria e da astronomia matemática. Enquanto a matemática clássica grega era fortemente influenciada pela filosofia e pela busca por verdades universais, o período abordado em [1] reflete uma mudança de direção, em que a matemática passou a ser utilizada como uma ferramenta para resolver problemas práticos, especialmente na astronomia, geografia e óptica.

Outro aspecto relevante deste estudo é o relato das limitações e desafios enfrentados pelos matemáticos gregos. Apesar de suas realizações notáveis, muitos dos métodos e conceitos desenvolvidos por eles eram baseados em observações empíricas e aproximações, o que levou a erros significativos em alguns casos. Por exemplo, as estimativas de Aristarco para as distâncias relativas do Sol e da Lua estavam longe dos valores modernos, mas seu método foi revolucionário para a época. Essas limitações não diminuem a importância de suas contribuições, mas oferecem uma visão mais equilibrada e crítica da história da matemática.

Além disso, com a queda de Roma e a transferência do centro do poder para Constantinopla, o imperador Justiniano ordenou o fechamento da Academia de Atenas, alegando seu caráter pagão. No entanto, a instituição já havia deixado de priorizar o ensino da matemática, concentrando-se mais em correntes filosóficas como o neoplatonismo e em debates teológicos. Paralelamente, a Biblioteca de Alexandria enfrentava, já havia séculos, um processo de decadência marcado por cortes de recursos, saques e conflitos religiosos. Assim, as transformações na matemática grega não podem ser atribuídas exclusivamente à queda de Roma, mas sim a um conjunto mais amplo de mudanças socioculturais e políticas ocorridas na região ao longo dos séculos — mudanças essas que, embora relevantes, não serão aprofundadas neste trabalho, por não constituírem seu foco principal, mas podem ser melhor compreendidas por meio das referências [4] e [5]. Assim, a matemática na Grécia Antiga continuou a evoluir, mas com menos apoio institucional.

Em suma, este trabalho busca revisitar as contribuições dos matemáticos gregos desse período. Ao estudar a história da matemática grega, podemos não apenas apreciar as realizações intelectuais do passado, mas também entender como elas moldaram o pensamento científico moderno. A primeira parte do capítulo 8 de [1] oferece um ponto de partida valioso para essa investigação, fornecendo uma

visão das "correntes secundárias" que fluíram a partir da matemática clássica grega.

2 Eratóstenes

Eratóstenes (275-194 a.C.) era nativo de Cirene, mas passou boa parte de sua juventude em Atenas, fez contribuições em diversas áreas, como: poesia, astronomia, história, matemática, atletismo, entre outros. Quando estava na meia-idade foi chamado a Alexandria por Ptolomeu III para ensinar a seu filho e para lá ser bibliotecário chefe.

Eratóstenes é muito conhecido por sua medida da circunferência da Terra. Ele observou que, no solstício de verão, o Sol brilhava diretamente em um poço em Siene, enquanto em Alexandria, a 5000 estádios ao norte, o Sol lançava uma sombra.

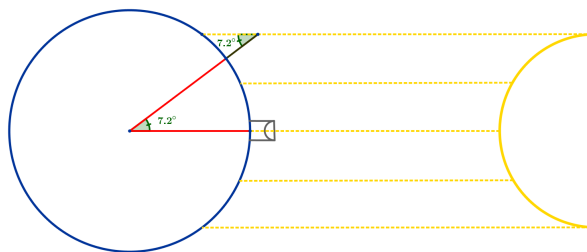


Figura 1: Cálculo da circunferência da Terra.

Assim, ele estimou que o ângulo da sombra era de $1/50$ ($\approx 7,2^\circ$) então concluiu que a circunferência da Terra era 50 vezes a distância entre Siene e Alexandria.

Esse matemático grego também teve outra contribuição muito famosa, o crivo de Eratóstenes que é um algoritmo clássico utilizado para identificar todos os números primos até um determinado número natural n . Este método baseia-se na eliminação sistemática dos múltiplos dos números primos, resultando em uma lista que contém apenas números primos.

1. **Inicialização:** Liste todos os números naturais de 2 até n .
2. **Processo de Eliminação:**
 - (a) Comece com o primeiro número da lista ($p = 2$).
 - (b) Elimine todos os múltiplos de p que são maiores que p e menores ou iguais a n .
 - (c) Identifique o próximo número não eliminado na lista; este será o próximo número primo.
 - (d) Repita o processo até que p^2 seja maior que n , ou seja o processo termina quando os múltiplos do maior primo, menor ou igual a \sqrt{n} , tenham sido marcados.
3. **Resultado:** Os números que permanecem na lista após a conclusão do processo são os números primos até n .

Um exemplo para encontrar primos até 100:

	②	③	✗	⑤	✗	⑦	✗	✗	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 2: Crivo de Eratóstenes. (Fonte: [2])

3 Aristarco de Samos

Aristarco de Samos (310-230 a.C.) foi um astrônomo e matemático grego. Ele é conhecido por propor um modelo heliocêntrico do sistema solar, embora suas obras sobre o assunto tenham sido perdidas. Além disso, seu trabalho mais conhecido é o tratado "Sobre os Tamanhos e Distâncias do Sol e da Lua", no qual ele usou métodos geométricos para calcular as distâncias relativas do Sol (S) e da Lua (L) em relação à Terra (T).

Aristarco observou que, quando a Lua está exatamente meio cheia, o ângulo entre as linhas de visão ao Sol e à Lua é de aproximadamente 87° . Por conseguinte, ele usou a relação trigonométrica:

$$\frac{\text{Distância até a Lua}}{\text{Distância até o Sol}} = \text{sen } 3^\circ.$$

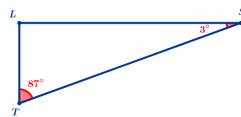


Figura 3: Distâncias.

Como as tabelas trigonométricas ainda não tinham sido desenvolvidas, Aristarco recorreu as desigualdades geométricas para estimar o valor de $\text{sen } 3^\circ$. Ele usou a seguinte desigualdade para ângulos agudos:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}.$$

Assim, tem-se que:

$$\frac{1}{20} < \text{sen } 3^\circ < \frac{1}{18}.$$

Com base nas desigualdades, Aristarco concluiu que:

$$\frac{\text{Distância até o Sol}}{\text{Distância até a Lua}} > 18 \quad \text{e} \quad < 20.$$

Logo, ele estimou que o Sol está entre 18 e 20 vezes mais longe da Terra do que a Lua, que está muito longe do valor moderno que é pouco menos que 400. Entretanto, o método usado por Aristarco era incontestável, o resultado foi prejudicado apenas pelo erro de observação ao medir o ângulo como

87° (quando, de fato, é aproximadamente $89^\circ 50'$), ou seja, o método de Aristarco foi revolucionário para a época.

Além disso, Aristarco calculou os tamanhos relativos do Sol e da Lua em relação à Terra. Ele observou que o Sol e a Lua têm aproximadamente o mesmo tamanho aparente no céu. Então usou a semelhança de triângulos para relacionar os raios do Sol (R_s), da Terra (R_t) e da Lua (R_l). Concluindo que:

$$\frac{108}{43} < \frac{R_t}{R_l} < \frac{60}{19} \quad \text{e} \quad \frac{19}{3} < \frac{R_s}{R_t} < \frac{43}{6}.$$

4 Menelau de Alexandria

Menelau (100 d.C.) foi um matemático e astrônomo grego e escreveu "Sphaerica", que estabeleceu a base para triângulos esféricos análoga à de Euclides I para triângulos planos, obra que inclui também um teorema sem equivalente na geometria euclidiana, afirmando que dois triângulos esféricos são congruentes quando possuem ângulos correspondentes iguais (Menelau não diferenciava triângulos esféricos congruentes de simétricos). Além disso, ele formulou o "teorema de Menelau" como parte do que é essencialmente trigonometria esférica na forma grega típica.

Teorema 4.1. *Se os lados AB , BC , CA de um triângulo são cortados por uma transversal nos pontos D , E , F , respectivamente, então*

$$AD \cdot BE \cdot CF = BD \cdot CE \cdot AF.$$

Para triângulos esféricos, o teorema afirma que

$$\text{sen } AD \cdot \text{sen } BE \cdot \text{sen } CF = \text{sen } BD \cdot \text{sen } CE \cdot \text{sen } AF.$$

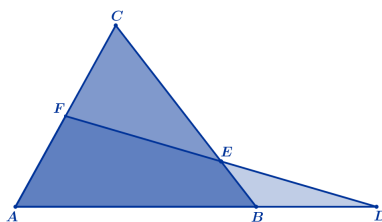


Figura 4: Teorema de Menelau.

Demonstração. A demonstração do teorema no plano pode ser feita usando semelhança de triângulos ou relações trigonométricas. Na esfera, a demonstração envolve o uso de relações trigonométricas esféricas.

■

5 O "Almagesto" de Ptolomeu

Ptolomeu (100-170 d.C.) escreveu o "Almagesto", uma obra fundamental em astronomia, que contém tabelas trigonométricas. Ele introduziu a teoria dos ciclos e epíclis para os planetas, conhecida como sistema ptolomaico, e também introduziu o conceito de "equante" para explicar o movimento dos planetas.

Segundo Toomer, a obra Almagesto pode ser sintetizada, conforme apresentado em [3], da seguinte maneira:

Como obra didática, o "Almagesto" é uma obra-prima de clareza e método, superior a qualquer livro didático científico antigo e com poucos pares em qualquer período. Mas é muito mais do que isso. Longe de ser uma mera "sistematização" da astronomia grega antiga, como às vezes é descrita, é, em muitos aspectos, uma obra original.

Teorema 5.1. (Teorema de Ptolomeu) Se $ABCD$ é um quadrilátero (convexo) inscrito em um círculo:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

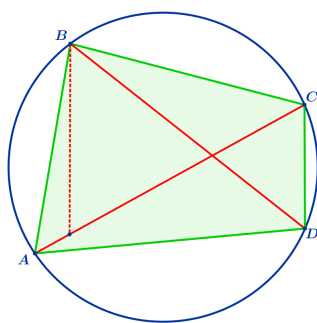


Figura 5: Teorema de Ptolomeu.

Um caso particularmente útil do teorema geral de Ptolomeu ocorre quando um dos lados, por exemplo AD , é o diâmetro do círculo. Nesse caso, se $AD = 2r$, a relação $2r \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$ é válida. Definindo o arco $BD = 2\alpha$ e o arco $CD = 2\beta$, obtemos as seguintes expressões:

$$BC = 2r \sin(\alpha - \beta), \quad AB = 2r \sin(90^\circ - \alpha), \quad BD = 2r \sin \alpha,$$

$$CD = 2r \sin \beta, \quad \text{e} \quad AC = 2r \sin(90^\circ - \beta).$$

Assim, o Teorema de Ptolomeu, portanto, conduz à relação:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Seguindo um raciocínio semelhante, obtém-se a fórmula:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

bem como sua versão análoga para o cosseno:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta.$$

Por essa razão, essas quatro identidades de soma e diferença são frequentemente chamadas, na atualidade, de fórmulas de Ptolomeu.

Ptolomeu usou o círculo de 360° para construir suas tabelas de cordas, que são equivalentes às modernas tabelas de senos. Ele dividiu o círculo em 360 graus e cada grau em 60 minutos (partes *minutae primae*) e cada minuto em 60 segundos (partes *minutae secundae*). Ptolomeu encontrou fórmulas trigonométricas usando o círculo de 360° . As seguintes relações permitem converter fórmulas trigonométricas modernas para a notação de cordas usada por Ptolomeu.

$$\sin x = \frac{\text{corda}(2x)}{120} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{\text{corda}(180^\circ - 2x)}{120}.$$

Embora Ptolomeu seja amplamente reconhecido pelo "Almagesto", sua obra mais famosa, ele escreveu outros trabalhos de grande importância. Um deles foi a "Geografia", composta por oito volumes, que teve para os geógrafos da época a mesma relevância que o "Almagesto" teve para os astrônomos. Nesse tratado, Ptolomeu apresentou o sistema de latitudes e longitudes de forma semelhante ao uso atual, descreveu métodos de projeção cartográfica e catalogou aproximadamente 8.000 cidades, rios e outras características geográficas da Terra. No entanto, a falta de técnicas precisas para determinar longitudes na época levou a inevitáveis erros significativos.

6 Heron de Alexandria

Heron (10-70 d.C.) foi um matemático e engenheiro grego. Ele é conhecido pela fórmula de Heron para calcular a área de um triângulo:

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

onde a, b, c são os lados e s é a metade da soma destes lados, isto é, o semiperímetro.

Um exemplo, dado um triângulo ABC como na Figura 6, tem-se que:

$$K = \sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)} \approx 43,3.$$

Heron também estudou óptica, mecânica e inventou dispositivos mecânicos. Ele formulou o princípio da mínima distância para a reflexão da luz.

Heron mostrou que a luz segue o caminho mais curto ao refletir em um espelho. Como pode-se observar na Figura 7, se a luz vai de uma fonte S para um espelho MM' e depois para o olho E , o caminho mais curto é aquele em que os ângulos de incidência e reflexão são iguais. Isso pode ser

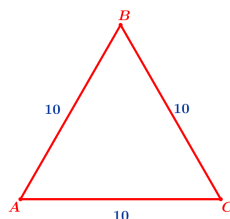


Figura 6: Triângulo.

demonstrado geometricamente traçando SQS' perpendicular a MM' e comparando os caminhos SPE e $S'PE$.

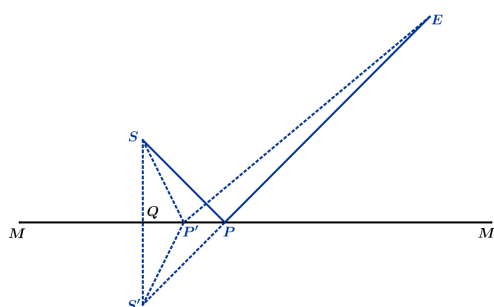


Figura 7: Princípio da Mínima Distância.

Referências

- [1] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012.
- [2] JUNIOR, F. F. Números primos. **Descomplique a Matemática**. Disponível em: <https://descompliqueamatemtica.com.br/numeros-primos/#google_vignette>. Acesso em: 10 mar. 2025.
- [3] O'CONNOR, J.; ROBERTSON E.. Cláudio Ptolomeu. **MacTutor Index**. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ptolemy/>>. Acesso em: 11 abr. 2025.
- [4] WERMANN, J. A.; MACHADO, F. F. UMA APROXIMAÇÃO ENTRE A ACADEMIA DE PLATÃO, O LICEU DE ARISTÓTELES E AS UNIVERSIDADES. **Theoria - Revista Eletrônica de Filosofia**. Disponível em: <<https://www.theoria.com.br/edicao19/01012016RT.pdf/>>. Acesso em: 11 abr. 2025.
- [5] MEY, E. S. A.. BIBLIOTHECA ALEXANDRINA. **Revista Digital de Biblioteconomia e Ciência da Informação**, Campinas, v. 1, n. 2, p.71-91, jan./jun. 2004.



Contagem de pontos periódicos de um subshift caótico e uma sequência do tipo Tribonacci

Gabriel Freitas Costantin

UFU, Faculdade de Engenharia Mecânica, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

costantin@ufu.br

Jean Venato Santos

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

jvenatos@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Dinâmica simbólica
Subshift
Recorrência de Tribonacci

Este trabalho investiga a dinâmica de um subshift de um sistema simbólico com três símbolos, com foco na contagem do número de pontos periódicos em função do período. Inicialmente, provamos que o subshift é caótico e, portanto, possui infinitas órbitas periódicas. Em seguida, demonstramos que, para tal subshift, a quantidade de pontos n -periódicos obedece uma recorrência do tipo Tribonacci. Por fim, explicitamos tal quantidade em função do período n , a partir da resolução desta equação de diferenças com devidas condições iniciais.

1 Introdução

Um sistema dinâmico determinístico discreto consiste em uma função $f : X \rightarrow X$ definida em um espaço X no qual é possível iterar repetidamente e assim estudar os sucessivos pontos que surgirão a cada iteração. Dado $x_0 \in X$, a *órbita de x_0 pela f* é dada pela sequência de pontos $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0), \dots$. Dentre as possíveis órbitas, se destacam os pontos fixos e as órbitas periódicas. Um elemento $x_0 \in X$ é dito *ponto fixo* de f se satisfaz $f(x_0) = x_0$ e, mais geralmente, $f^n(x_0) = x_0$, para todo inteiro positivo n . Uma órbita $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ é dita *periódica de período $n > 0$* se $f^n(x_0) = x_0$ e $f^k(x_0) \neq x_0$ para todo $0 < k < n$. Os pontos desta órbita periódica são ditos *pontos periódicos de período n* , ou, simplesmente *pontos n -periódicos*.

Em estudos de dinâmica discreta, os sistemas caóticos se destacam pelo comportamento complexo e imprevisível que apresentam. Nesse contexto, embora existam diversas definições de caos, neste trabalho adotamos a definição de Devaney [1] para funções $f : X \rightarrow X$ definidas em um espaço métrico X , que impõe três condições essenciais. A primeira é a densidade dos pontos periódicos em X . A segunda, a transitividade, manifesta-se na existência de uma órbita densa, refletindo uma propriedade de irreducibilidade, pois impede que o sistema seja decomposto em subsistemas não triviais. Por fim, a terceira condição é a sensibilidade às condições iniciais, que consiste na existência de um número real $\beta > 0$ de forma que, para qualquer $x \in X$ e toda vizinhança U de x , haja um ponto $y \in U$ e um número natural n para os quais a distância entre $f^n(x)$ e $f^n(y)$ seja, pelo menos, β . Note que essa condição sintetiza a imprevisibilidade, princípio fundamental dos sistemas caóticos. Em resumo:

Definição 1.1. [Caos de Devaney [1]] *Seja X um espaço métrico. Uma função $f : X \rightarrow X$ é dita caótica em X se:*

1. *os pontos periódicos de f são densos em X ,*
2. *f é transitiva,*
3. *f é sensível às condições iniciais.*

Dentre as ferramentas empregadas no estudo de sistemas caóticos, as dinâmicas simbólicas se destacam por sua simplicidade estrutural e riqueza dinâmica. Neste trabalho, investigamos uma dinâmica simbólica definida por um subshift do shift de três símbolos. Inicialmente, estabelecemos a caoticidade dessa dinâmica, fato intrinsecamente relacionado à abundância de pontos periódicos, o que nos conduz ao problema de contagem desses pontos em função do período n . Demonstramos que a solução desse problema se obtém por meio da resolução da recorrência conhecida como Tribonacci [2], dada por

$$x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n,$$

com condições iniciais determinadas pelo número de pontos periódicos de períodos 1, 2 e 3.

2 Um subshift de 3 símbolos

No conjunto de sequências de três símbolos com restrições dado por:

$$\Sigma' = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_j = 0, 1, \text{ ou } 2; \text{ mas } s_j = 0 \Rightarrow s_{j+1} = 1 \text{ e } s_j = 1 \Rightarrow s_{j+1} = 2\}, \quad (1)$$

considere a função $d : \Sigma' \times \Sigma' \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$d(s, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{3^j}. \quad (2)$$

Note que a série é convergente, pois seus termos são não negativos e ela é majorada pela série geométrica $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{3^j}$, que converge para 3. Vejamos que a função d pode ser utilizada para mensurar distâncias em Σ' :

Proposição 2.1. *A função d definida em (2) estabelece uma métrica em Σ' .*

Demonstração. Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$, $u = (u_0 u_1 u_2 \dots) \in \Sigma'$. Desde que $|s_j - t_j| \geq 0$ e $|s_j - t_j| = 0$ se, e somente se, $s_j = t_j$, para todo inteiro não negativo j , segue que $d(s, t) \geq 0$ e $d(s, t) = 0$ se, e somente se, $s = t$. De $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$, segue que $d(s, t) = d(t, s)$. Por fim, da desigualdade $|s_i - t_i| + |t_i - u_i| \geq |s_i - u_i|$ e usando o fato de que, para séries convergentes, a série da soma é igual a soma das séries, concluímos que d satisfaz a desigualdade triangular, ou seja, que $d(s, t) \leq d(s, u) + d(u, t)$. Portanto, d define uma métrica em Σ' . ■

Dada uma sequência $(s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma'$ segue que $(s_1 s_2 s_3 \dots)$ também está em Σ' . Isto permite concluir que a função $\sigma : \Sigma' \rightarrow \Sigma'$ dada por

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots),$$

está bem definida. A função σ é denominada *shift* quando é tomada no espaço Σ de todas as sequências de três símbolos e é chamada *subshift* quando está definida em algum subconjunto Σ' de Σ .

Veremos mais adiante que a dinâmica deste subshift é caótica. O seguinte resultado ilustra uma certa praticidade para majorar distâncias no espaço Σ' , o que se mostrará deveras útil.

Teorema 2.2 (Teorema da Proximidade). *Sejam $s, t \in \Sigma'$. Então, as seguintes afirmações são válidas:*

1. *Se $s_i = t_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$, então $d(s, t) \leq \frac{1}{3^n}$.*
2. *se $d(s, t) < \frac{1}{3^n}$, então $s_i = t_i$ para todo $i \leq n$.*

Demonstração. Se $s_i = t_i$ para $i \leq n$, então:

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{3^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{3^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^n}.$$

Por outro lado, se $s_j \neq t_j$ para algum $j \leq n$, então

$$d(s, t) \geq \frac{1}{3^j} \geq \frac{1}{3^n}.$$

Consequentemente, se $d(s, t) < \frac{1}{3^n}$, então $s_i = t_i$ para todo $i \leq n$. ■

Isto é suficiente para mostrar que:

Teorema 2.3. *O subshift $\sigma: \Sigma' \rightarrow \Sigma'$ é caótico.*

Demonstração. Densidade de pontos periódicos. Dados um $\varepsilon > 0$ e uma sequência $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ qualquer em Σ' , tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Vamos construir um ponto periódico $t \in \Sigma'$ que está ε -próximo de s . Tal construção dependerá do termo s_{n-1} , da seguinte forma:

Se $s_{n-1} = 0$, então $t = (\overline{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}} 1 2)$.

Se $s_{n-1} = 1$, então $t = (\overline{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}} 2)$.

Se $s_{n-1} = 2$, então $t = (\overline{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}})$.

A barra sobre os dígitos significa que essa sequência se repete indefinidamente.

Uma vez que, após o 0, só pode seguir o 1; após o 1, só pode seguir o 2; e após o 2, podem seguir quaisquer dígitos, fica garantido que todas as sequências t estarão contidas em Σ' . Além disso, pelo Teorema da Proximidade, em qualquer caso, segue que: $d(s, t) < \frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Isso prova a densidade dos pontos periódicos.

Transitividade, ou seja, existência de órbita densa. Considere a sequência \hat{s} constituída de todos os blocos de tamanho n , para qualquer $n \in \mathbb{N}$, adotando entre cada bloco as seguintes regras: quando um bloco termina em 0, acrescentam-se os algarismos 1 e 2, e quando um bloco termina em 1, acrescenta-se o algarismo 2. Adotamos essa abordagem para assegurar que todos os blocos possam se suceder, já que o algarismo 2 será o último termo de cada bloco, e ele pode preceder tanto 0, quanto 1, quanto o próprio 2. A seguir, mostramos como fica a sequência \hat{s} até os blocos de três dígitos:

$$\hat{s} = (\underbrace{012 \ 12 \ 2}_{1\text{-blocos}} \underbrace{012 \ 12 \ 2012 \ 212 \ 22}_{2\text{-blocos}} \underbrace{012 \ 12012 \ 1212 \ 122 \ 2012 \ 212 \ 22012 \ 2212}_{3\text{-blocos}} \dots)$$

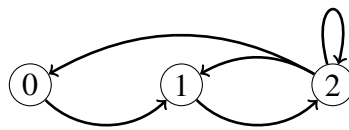
Dados um $\varepsilon > 0$ e $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ uma sequência qualquer de Σ' , tomando um natural n tal que $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Existe um n -bloco em \hat{s} que coincide com os n primeiros termos de s . Assim, existirá um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^k(\hat{s}) = (s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1} \hat{s}_{k+n} \dots)$, e, independente dos símbolos que seguirão a partir do termo de índice n , tem-se que: $d(\sigma^k(\hat{s}), s) < \frac{1}{3^n} < \varepsilon$, provando a densidade da órbita de \hat{s} e, portanto, a transitividade do subshift.

A sensibilidade às condições iniciais. Considere uma sequência qualquer $s \in \Sigma'$ e um $\varepsilon > 0$. Escolhemos um número n tal que $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$ e tomamos outra sequência $t \in \Sigma'$ que difere de s apenas em um termo na posição $k \geq n$. Pelo Teorema da Proximidade, $d(s, t) < \frac{1}{3^n} < \varepsilon$, mas após k iterações, a distância entre $\sigma^k(s)$ e $\sigma^k(t)$ será de pelo menos 1. Portanto, adotando $\beta = 1$, concluímos que Σ' é sensível às condições iniciais. ■

Deste resultado, concluímos, em particular, que σ possui infinitos pontos periódicos. Isso nos leva à questão de quantos pontos periódicos de um dado período n estão associados a σ , a qual trataremos a seguir.

3 Contagem de pontos periódicos

A fim de estudar o número de pontos periódicos para o subshift $\sigma: \Sigma' \rightarrow \Sigma'$, considere $Per_n \subset \Sigma'_N$ o conjunto dos pontos n -periódicos de σ e denote por $\#Per_n$ sua cardinalidade. Além disto, note que as restrições apresentadas na definição de Σ' em (1) podem ser representadas pelo seguinte grafo:



Esse grafo pode ser útil ao leitor na tarefa de acompanhar os raciocínios que seguirão. Por exemplo, a partir do mesmo não é difícil concluir que

$$Per_1 = \{(\overline{2})\}, Per_2 = \{(\overline{2}), (\overline{12}), (\overline{21})\}, Per_3 = \{(\overline{2}), (\overline{012}), (\overline{120}), (\overline{201}), (\overline{122}), (\overline{221}), (\overline{212})\} \text{ e}$$

$$Per_4 = \{(\overline{2}), (\overline{12}), (\overline{21}), (\overline{0122}), (\overline{1220}), (\overline{2201}), (\overline{2012}), (\overline{1222}), (\overline{2221}), (\overline{2212}), (\overline{2122})\}.$$

Assim, $\#Per_1 = 1$, $\#Per_2 = 3$, $\#Per_3 = 7$ e $\#Per_4 = 11$. Note que $\#Per_4 = \#Per_3 + \#Per_2 + \#Per_1$. Veremos a seguir que tal relação não é coincidência.

Teorema 3.1. Para o subshift $\sigma: \Sigma' \rightarrow \Sigma'$ e qualquer inteiro positivo n ,

$$\#Per_{n+3} = \#Per_{n+2} + \#Per_{n+1} + \#Per_n.$$

Demonstração. Dada uma sequência de Per_{n+3} , a ideia é associá-la a uma única sequência pertencente a Per_{n+2} ou Per_{n+1} ou Per_n , de forma que cada sequência em Per_{n+2} ou Per_{n+1} ou Per_n fica associada a uma única sequência de Per_{n+3} . Isso mostra que $\#Per_{n+3} = \#Per_{n+2} + \#Per_{n+1} + \#Per_n$.

Para construir tal associação, dado um inteiro positivo n , considere a partição de Per_n em 5 subconjuntos disjuntos:

$$A_n = \{(s_0 \dots s_{n-1}) \in Per_n \mid s_0 = 0, s_{n-1} = 2\}$$

$$B_n = \{(s_0 \dots s_{n-1}) \in Per_n \mid s_0 = 1, s_{n-1} = 0\}$$

$$C_n = \{(s_0 \dots s_{n-1}) \in Per_n \mid s_0 = 1 = s_{n-1} = 2\}$$

$$D_n = \{(s_0 \dots s_{n-1}) \in Per_n \mid s_0 = 2, s_{n-1} = 1\}$$

$$E_n = \{(s_0 \dots s_{n-1}) \in \text{Per}_n \mid s_0 = 2 = s_{n-1}\}$$

Portanto é válido que: $\#Per_n = \#A_n + \#B_n + \#C_n + \#D_n + \#E_n$.

Dada $s = (\overline{s_0 \dots s_{n+2}}) \in Per_{n+3}$, se $s_0 = s_{n+2}$ então $s_0 = s_{n+2} = 2$, pois 0's ou 1's adjacentes não são permitidos em Σ' . Neste caso, s_{n+1} pode ser 1 ou 2, portanto $s \in Per_{n+3}$ com $s_0 = s_{n+2} = 2$ determina uma sequência periódica de comprimento $n + 2$, a saber $(\overline{2s_1 \dots s_{n+1}})$, a qual pertence a D_{n+2} ou E_{n+2} .

A situação em que $s = (\overline{s_0 \dots s_{n+2}}) \in Per_{n+3}$ é tal que $s_0 \neq s_{n+2}$ envolve quatro casos:

Caso 1: $s_0 = 2$. Neste caso, a única possibilidade é que $s_{n+2} = 1$ e isto implica que $s_{n+1} = 0$ ou $s_{n+1} = 2$. No caso em que $s_{n+1} = 0$, temos ainda que $s_n = 2$ e s é associada a uma única sequência $(\overline{2s_1 \dots s_{n-1}2})$ em E_{n+1} . Agora, se $s_{n+1} = 2$, podemos fazer $s_n = 1$ ou $s_n = 2$. Para $s_n = 1$ associamos s a uma única sequência $(\overline{2s_1 \dots s_{n-1}1})$ em D_{n+1} . Já para $s_n = 2$ podemos associar $s_{n-1} = 1$ ou $s_{n-1} = 2$, o que determina uma sequência de comprimento n , dada por $(\overline{2s_1 \dots s_{n-1}})$ pertencente a D_n ou E_n .

Caso 2: $s_0 = 0$. Neste caso, obrigatoriamente $s_{n+2} = 2$ e isto implica que $s_{n+1} = 1$ ou $s_{n+1} = 2$. Para $s_{n+1} = 2$, s é associada a uma única sequência $(\overline{0s_1 \dots s_n2})$ em A_{n+2} . Agora, se $s_{n+1} = 1$, podemos fazer $s_n = 0$ ou $s_n = 2$. Para $s_n = 0$ segue que $s_{n-1} = 2$ e associamos s a uma única sequência $(\overline{0s_1 \dots s_{n-2}2})$ em A_n . Já para $s_n = 2$ fica determinada uma sequência de comprimento $n + 1$, dada por $(\overline{0s_1 \dots s_{n-1}2})$ pertencente a A_{n+1} .

Caso 3: $s_0 = 1$ e $s_{n+2} = 2$. Neste caso, $s_{n+1} = 1$ ou $s_{n+1} = 2$. Se $s_{n+1} = 2$, s está associada a uma única sequência de comprimento $n + 2$ dada por $(\overline{1s_1 \dots s_n2})$ em C_{n+2} . E se $s_{n+1} = 1$ então $s_n = 0$ ou $s_n = 2$ e s está associada a uma única sequência de comprimento $n + 1$ da forma $(\overline{1s_1 \dots s_n})$ que está em B_{n+1} ou C_{n+1} .

Caso 4: $s_0 = 1$ e $s_{n+2} = 0$. Segue que, $s_{n+1} = 2$, mas como já associamos s a uma sequência em C_{n+2} no caso 3, vamos considerar $s_n = 1$ ou $s_n = 2$. Se $s_n = 1$ então $s_{n-1} = 0$ ou $s_{n-1} = 2$ e s está associada a uma única sequência de comprimento n da forma $(\overline{1s_1 \dots s_{n-1}})$ que está em B_n ou C_n . Para $s_n = 2$, s fica associada a uma única sequência de comprimento $n + 1$ dada por $(\overline{1s_1 \dots s_{n-1}2})$ em C_{n+1} . Observe que já havíamos associado s às sequências em C_{n+1} no Caso 3, e, por outro lado, falta associar s às sequências de B_{n+2} . Tal associação será feita por meio de uma bijeção entre C_{n+1} e B_{n+2} , a qual pode ser definida por $\phi: B_{n+2} \rightarrow C_{n+1}$ tal que $\phi(\overline{1s_1 \dots s_n0}) = (\overline{1s_1 \dots s_n})$. Note que obrigatoriamente $s_n = 2$, donde $(\overline{1s_1 \dots s_n}) \in C_{n+1}$ e claramente ϕ é uma função bijetora. ■

Concluimos assim que $\#Per_n$ satisfaz a equação de diferenças linear de ordem 3 com coeficientes constantes, comumente chamada de Tribonacci, dada por

$$\#Per_{n+3} - \#Per_{n+2} - \#Per_{n+1} - \#Per_n = 0$$

com as condições iniciais: $\#Per_1 = 1$, $\#Per_2 = 3$ e $\#Per_3 = 7$.

Essa equação de diferenças aliada às condições iniciais dadas, pode ser resolvida em softwares de computação algébrica. Por exemplo, no software gratuito Maxima [3], utilizando o pacote solve_rec e

o comando `solve_rec(eqn, var, [init])`, obtivemos:

$$\begin{aligned} \#Per_n = & \left[\left(\left(9\sqrt{11} + 19\sqrt{3} \right)^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{6}} \left(9\sqrt{11} + 19\sqrt{3} \right)^{\frac{1}{3}} + 43^{\frac{1}{3}} \right)^n \right. \\ & + \left(\left(9\sqrt{11} + 19\sqrt{3} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{3} - 1 \right) - 43^{\frac{5}{6}} i + 23^{\frac{1}{6}} \left(9\sqrt{11} + 19\sqrt{3} \right)^{\frac{1}{3}} - 43^{\frac{1}{3}} \right)^n \\ & + \left. \left(\left(9\sqrt{11} + 19\sqrt{3} \right)^{\frac{2}{3}} \left(-\sqrt{3}i - 1 \right) + 43^{\frac{5}{6}} i + 23^{\frac{1}{6}} \left(9\sqrt{11} + 19\sqrt{3} \right)^{\frac{1}{3}} - 43^{\frac{1}{3}} \right)^n \right] \\ & / \left(\left(9\sqrt{11} + 19\sqrt{3} \right)^{\frac{n}{3}} 3^{\frac{7n}{6}} 2^n \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Ainda utilizando o Maxima e substituindo valores para n , determinamos a quantidade $\#Per_n$ de pontos n -periódicos associados ao subshift σ . Na tabela a seguir, apresentamos alguns exemplos resultantes desse procedimento:

n	$\#Per_n$
1	1
2	3
3	7
4	11
5	21
6	39
\vdots	\vdots
100	291705319160032485504749131
\vdots	\vdots

4 Considerações finais

Com base na análise realizada, concluímos que a dinâmica do subshift estudado é caótica no sentido de Devaney, o que garante a existência de infinitos pontos periódicos densamente distribuídos no espaço. Além disso, estabelecemos que a contagem dos pontos n -periódicos segue uma recorrência do tipo Tribonacci, permitindo explicitar essa quantidade em função do período n . Esse resultado não apenas reforça a conexão entre sistemas dinâmicos caóticos e sequências recursivas clássicas, mas também destaca a importância das dinâmicas simbólicas como ferramentas para compreender a estrutura de órbitas periódicas em sistemas complexos.

Agradecimentos

Agradecimentos ao CNPq pela bolsa de iniciação científica via programa PICME.

Referências

- [1] DEVANEY, R. L. **A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment.** Westview Press, 1992.
- [2] FEINBERG, M. Fibonacci-Tribonacci. **The Fibonacci Quarterly** 1, 71-74, 1963.
- [3] Maxima, **Um sistema algébrico computacional.** Disponível em: <<https://maxima.sourceforge.io/pt/index.html>> Acesso em: 18 mar. 2025.



Definição, Construção e Propriedades do Produto Tensorial entre Espaços Vetoriais

Daniel Barreto de Oliveira

UFU, IME, Uberlândia, MG, Brasil
daniel.barreto@ufu.br

Neiton Pereira da Silva

UFU, IME, Uberlândia, MG, Brasil
neiton@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Produto tensorial.
Espaços vetoriais.
Aplicações multilineares.

O trabalho define o produto tensorial entre dois espaços vetoriais, destacando suas propriedades fundamentais. Demonstra-se a existência e unicidade de aplicações bilineares e constrói-se um espaço vetorial gerado por tensores decomponíveis. Através de proposições, relacionam-se aplicações bilineares e transformações lineares num espaço gerado por tensores decomponíveis, para, em seguida, enunciar a unicidade do produto tensorial. São ainda abordadas as propriedades de comutatividade, associatividade e distributividade do produto tensorial entre dois espaços vetoriais, além de sua extensão para múltiplos espaços vetoriais via aplicações p -lineares. Conclui-se que o produto tensorial generaliza transformações multilineares, com aplicações em álgebra e geometria.

1 Introdução

Este texto apresenta um resumo estendido sobre a teoria de produtos tensoriais. O conteúdo aqui exposto é baseado no livro *Cálculo Tensorial*, de Elon Lages Lima [1]. O objetivo é fornecer uma visão clara e detalhada sobre a construção e as propriedades dos produtos tensoriais.

Para isso, o texto foi dividido em seções específicas para o caso do produto tensorial entre dois espaços vetoriais e depois em uma seção que generaliza a definição e construção de um produto tensorial. Inicialmente, são definidas as estruturas básicas de aplicações bilineares e suas propriedades, seguida pela construção de produto tensorial entre dois espaços vetoriais. Sendo a unicidade do produto tensorial demonstrada, as propriedades comutatividade, associatividade e distributividade são enunciadas.

Além disso, o resumo discute o produto tensorial de aplicações lineares, introduzindo o conceito de produto de Kronecker e sua relação com matrizes. Por fim, a teoria é estendida para o caso de múltiplos espaços vetoriais, definindo-se o produto tensorial de p espaços e suas propriedades associadas.

2 Definição e Construção

2.1 Aplicações Bilineares

Definição 2.1. *Sejam U, V, W espaços vetoriais sob o mesmo corpo. Uma aplicação*

$$\phi : U \times V \rightarrow W,$$

chama-se bilinear quando possui as seguintes propriedades:

1. $\phi(u + u', v) = \phi(u, v) + \phi(u', v);$
2. $\phi(u, v + v') = \phi(u, v) + \phi(u, v');$
3. $\phi(\lambda u, v) = \phi(u, \lambda v) = \lambda \phi(u, v);$

quaisquer que sejam $u, u' \in U, v, v' \in V$ e λ escalar.

Proposição 2.2. *Sejam U, V e W espaços vetoriais, com $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ sendo uma base de U e $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ uma base de V . Dada uma $m \times n$ -upla arbitrária de vetores $w_{ij} \in W$ (onde $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$), existe uma única aplicação bilinear $\phi : U \times V \rightarrow W$ tal que $\phi(e_i, f_j) = w_{ij}$ para todo $e_i \in \mathcal{E}$ e todo $f_j \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Suponha que existam duas aplicações bilineares $\phi, \phi' : U \times V \rightarrow W$ tais que $\phi(e_i, f_j) = w_{ij}$ e $\phi'(e_i, f_j) = w'_{ij}$ para todo $e_i \in \mathcal{E}$ e todo $f_j \in \mathcal{F}$. Para $u = \sum \alpha^i e_i \in U$ e $v = \sum \beta^j f_j \in V$, pela bilinearidade de ϕ e ϕ' , segue que:

$$\phi(u, v) = \phi\left(\sum \alpha^i e_i, \sum \beta^j f_j\right) = \sum_{i,j} \alpha^i \beta^j \phi(e_i, f_j) = \sum_{i,j} \alpha^i \beta^j w_{ij}$$

e

$$\phi'(u, v) = \phi'\left(\sum \alpha^i e_i, \sum \beta^j f_j\right) = \sum_{i,j} \alpha^i \beta^j \phi'(e_i, f_j) = \sum_{i,j} \alpha^i \beta^j w'_{ij}.$$

Caso $\phi(u, v) = \phi'(u, v)$ para todo $u \in U$ e $v \in V$, conclui-se que $w_{ij} = w'_{ij}$ para todo i, j . Portanto, $\phi = \phi'$, o que prova a unicidade.

Para a existência, estabelecidas as bases \mathcal{E} e \mathcal{F} de U e V , respectivamente, defina $\phi : U \times V \rightarrow W$ por

$$\phi(u, v) = \sum_{i,j} \alpha^i \beta^j w_{ij} \quad (w_{ij} \in W; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n),$$

com $u \in U$ e $v \in V$. A bilinearidade de ϕ é verificada mostrando-se a linearidade em cada uma das entradas. Para a primeira entrada, seja $u' = \sum \gamma^i e_i \in U$ e λ um escalar. Obtém-se:

$$\phi(u + u', v) = \sum_{i,j} (\alpha^i + \gamma^i) \beta^j w_{ij} = \sum_{i,j} \alpha^i \beta^j w_{ij} + \sum_{i,j} \gamma^i \beta^j w_{ij} = \phi(u, v) + \phi(u', v),$$

e

$$\phi(\lambda u, v) = \sum_{i,j} (\lambda \alpha^i) \beta^j w_{ij} = \lambda \sum_{i,j} \alpha^i \beta^j w_{ij} = \lambda \phi(u, v).$$

De maneira análoga, demonstra-se que $\phi(u, v + v') = \phi(u, v) + \phi(u, v')$ para $v' \in V$ e $\phi(u, \lambda v) = \lambda \phi(u, v)$. Além disso, $\phi(e_i, f_j) = \sum_{r,s} \alpha^r \beta^s w_{rs} = \sum_r \alpha^r w_{rj} = w_{ij}$, o que conclui a demonstração. ■

A Proposição 2.2 indica que uma aplicação bilinear $\phi : U \times V \rightarrow W$ entre os espaços vetoriais U, V e W , pode ser definida por ϕ aplicada na mn -upla de pares das bases de U e V .

2.2 Produtos Tensoriais

Definição 2.3. Sejam U e V espaços vetoriais sobre o mesmo corpo, com dimensões m e n , respectivamente. Um par (Z, ϕ) é chamado de produto tensorial de U por V se satisfizer as seguintes condições:

1. Z é um espaço vetorial e $\phi : U \times V \rightarrow Z$ é uma aplicação bilinear;
2. A dimensão de Z é igual ao produto das dimensões de U e V , ou seja, $\dim Z = \dim U \cdot \dim V$;
3. A imagem de ϕ , denotada por $\phi(U \times V)$, gera Z . Isso significa que todo elemento de Z pode ser expresso como uma combinação linear de elementos de $\phi(U \times V)$.

Proposição 2.4. *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensões m e n , respectivamente, e o par (Z, ϕ) o produto tensorial de U por V . Se $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ e $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ são bases de U e V , então a mn -upla $\phi(e_i, f_j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, forma uma base de Z .*

Demonstração. Dados $u = \sum_{i=1}^m \alpha^i e_i$ em U e $v = \sum_{j=1}^n \beta^j f_j$ em V , então, pela bilinearidade de ϕ , tem-se

$$\phi(u, v) = \sum_{i,j} \alpha^i \beta^j \phi(e_i, f_j) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

ou seja, para todo $u \in U$ e todo $v \in V$, $\phi(u, v)$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos $\phi(e_i, f_j)$. De acordo com as Condições 2 e 3 da Definição 2.3, a mn -upla $\phi(e_i, f_j)$ é uma base de Z . ■

Uma possível construção de um produto tensorial se apresenta a seguir:

Construção. Sejam $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ e $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ bases de U e V , respectivamente. Toma-se Z como um espaço vetorial qualquer de dimensão mn . Encolhendo arbitrariamente

$$\mathcal{H} = \{h_{11}, \dots, h_{ij}, \dots, h_{mn}\}$$

uma base de Z e definindo $\phi : U \times V \rightarrow Z$, nos pares (e_i, f_j) , $e_i \in \mathcal{E}$, $f_j \in \mathcal{F}$, por $\phi(e_i, f_j) = h_{ij}$, estende-se ϕ por bilinearidade para os pares restantes, de acordo a Proposição 2.2. O fato de que o par (Z, ϕ) satisfaz as Condições 1, 2 e 3 da Definição 2.3 é evidente, a partir de sua própria construção.

O produto tensorial de U por V é indicado por $U \otimes V$; assim $\phi(u, v)$ é indicado por $u \otimes v$, na qual lê-se "u tensor v". Os elementos do espaço vetorial $U \otimes V$ são chamados tensores. Os tensores da forma $u \otimes v$ chamam-se decomponíveis. De acordo com a Proposição 2.4, se $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ e $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ são bases de U e V , respectivamente, e Z é gerado por $\phi(U \times V)$, então os tensores $e_i \otimes f_j$ são uma base de Z . É importante ressaltar que não se tem pela definição $Z = \phi(U \times V)$, uma vez que Z é combinação linear de tensores decomponíveis.

Teorema 2.5. *Considere $U \otimes V$ como o produto tensorial de U por V , e seja W um espaço vetorial qualquer. Dada uma aplicação bilinear $g : U \times V \rightarrow W$, existe uma única transformação linear $\tilde{g} : U \otimes V \rightarrow W$ que satisfaz a relação $\tilde{g}(u \otimes v) = g(u, v)$ para quaisquer vetores $u \in U$ e $v \in V$.*

Demonstração. A aplicação linear $g : U \otimes V \rightarrow W$ é definida aplicando para cada $z = \sum u_k \otimes v_k$ em $U \otimes V$, $\tilde{g}(z) = \sum_k g(u_k, v_k)$. Esta aplicação é bem definida, pois ao determinar as bases $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ em U , e $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ em V , tem-se

$$u_k = \sum_i \alpha_k^i e_i \quad e \quad v_k = \sum_j \beta_k^j f_j \quad , \quad \text{então}$$

$$z = \sum_k u_k \otimes v_k = \sum_k \left(\sum_i \alpha_k^i e_i \right) \otimes \left(\sum_j \beta_k^j f_j \right) = \sum_{i,j,k} \alpha_k^i \beta_k^j e_i \otimes f_j.$$

Tomando $\xi^{ij} = \sum_k \alpha_k^i \beta_k^j$, obtém-se

$$z = \sum_{i,j,k} \alpha_k^i \beta_k^j e_i \otimes f_j = \sum_{i,j} \xi^{ij} e_i \otimes f_j,$$

e pela bilinearidade de g

$$\tilde{g}(z) = \sum_k g(u_k, v_k) = \sum_{i,j,k} \alpha_k^i \beta_k^j g(e_i, f_j) = \sum_{i,j} \xi^{ij} g(e_i, f_j).$$

Dessa forma, os número ξ^{ij} são as coordenadas do tensor z em relação a base formada pelos tensores $e_i \otimes f_j$, demonstrando que a aplicação \tilde{g} está bem definida. Além disso, dado $z' = \sum u'_k \otimes v'_k$ em $U \otimes V$, com ζ^{ij} sendo as coordenadas do tensor na base $\{e_i \otimes f_j\}$, e λ um escalar, vê-se que \tilde{g} é linear, pois:

$$\tilde{g}(z + z') = \sum_{i,j} (\xi^{ij} + \zeta^{ij}) g(e_i, f_j) = \sum_{i,j} \xi^{ij} g(e_i, f_j) + \sum_{i,j} \zeta^{ij} g(e_i, f_j) = \tilde{g}(z) + \tilde{g}(z')$$

e

$$\tilde{g}(\lambda z) = \sum_{i,j} (\lambda \xi^{ij}) g(e_i, f_j) = \lambda \sum_{i,j} \xi^{ij} g(e_i, f_j) = \lambda \tilde{g}(z).$$

Por fim, dada uma outra aplicação linear $\hat{g} : U \times V \rightarrow W$, tal que $\hat{g}(u \otimes v) = g(u, v)$ para todo $u \in U$ e todo $v \in V$, tem-se

$$\hat{g}(z) = \hat{g}\left(\sum u_k \otimes v_k\right) = \sum \hat{g}(u_k \otimes v_k) = \sum g(u_k, v_k) = \tilde{g}(z),$$

logo, $\hat{g} = \tilde{g}$. Portanto, a aplicação \tilde{g} é bem definida, linear e única (nas condições requeridas), o que conclui a demonstração. ■

Considere dois produtos tensoriais $U \otimes V$ e $U \boxtimes V$ dos espaços vetoriais U e V . De acordo com o Teorema 2.5, existe uma aplicação linear $\tilde{p} : U \otimes V \rightarrow U \times V$ que associa a cada elemento $u \otimes v$ o par $\tilde{p}(u \otimes v) = (u, v)$, e uma aplicação bilinear $\hat{p} : U \times V \rightarrow U \boxtimes V$ que associa a cada par (u, v) o elemento $\hat{p}(u, v) = u \boxtimes v$. A composição dessas aplicações define, portanto, uma aplicação linear $q = \hat{p} \circ \tilde{p} : U \otimes V \rightarrow U \boxtimes V$, que satisfaz $q(u \otimes v) = u \boxtimes v$ para todos $u \in U$ e $v \in V$. A partir disso, a unicidade do produto tensorial pode ser enunciada a seguir.

Teorema 2.6. (Unicidade do produto tensorial.) *Sejam $U \otimes V$ e $U \boxtimes V$ dois produtos tensoriais de U por V . Então, existe um único isomorfismo canônico entre $U \otimes V$ e $U \boxtimes V$, o qual mapeia $u \otimes v$ em $u \boxtimes v$ para todo $u \in U$ e $v \in V$.*

Demonstração. A aplicação bilinear $g : U \times V \rightarrow U \boxtimes V$, que associa ao par (u, v) o elemento $g(u, v) = u \boxtimes v$, induz uma aplicação linear $\tilde{g} : U \otimes V \rightarrow U \boxtimes V$ tal que $\tilde{g}(u \otimes v) = u \boxtimes v$. De

maneira análoga, a aplicação bilinear $h : U \times V \rightarrow U \otimes V$, definida por $h(u, v) = u \otimes v$, gera uma aplicação linear $\tilde{h} : U \boxtimes V \rightarrow U \otimes V$, com a propriedade $\tilde{h}(u \boxtimes v) = u \otimes v$.

Considerando agora a composição linear $\tilde{h} \circ \tilde{g} : U \otimes V \rightarrow U \otimes V$, tem-se que:

$$\tilde{h} \circ \tilde{g}(u \otimes v) = \tilde{h}(u \boxtimes v) = u \otimes v,$$

ou seja, a composição $\tilde{h} \circ \tilde{g}$ coincide com a aplicação identidade sobre o conjunto dos tensores decomponíveis de $U \otimes V$. Como esse conjunto gera $U \otimes V$, segue que $\tilde{h} \circ \tilde{g}$ é a aplicação identidade de $U \otimes V$ em si mesma. Da mesma forma, $\tilde{g} \circ \tilde{h}$ é a aplicação identidade de $U \boxtimes V$ em $U \boxtimes V$.

Portanto, conclui-se que \tilde{g} e \tilde{h} são isomorfismos inversos um do outro. Além disso, a unicidade de \tilde{g} decorre do fato de que sua definição está completamente determinada sobre um conjunto de geradores de $U \otimes V$. ■

De acordo com a unicidade do produto tensorial, garantida pelo Teorema 2.6, a construção de isomorfismos específicos possibilita enunciar as propriedades a seguir.

Proposição 2.7. *O produto tensorial possui as seguintes propriedades formais:*

1. $U \otimes V \approx V \otimes U$ (comutatividade);
2. $(U \otimes V) \otimes W \approx U \otimes (V \otimes W)$ (associatividade);
3. $(U + V) \otimes W \approx (U \otimes W) + (V \otimes W)$ (distributividade).

2.3 Produto tensorial de aplicações lineares

Definição 2.8. *Sejam $A : U \rightarrow W$ e $B : V \rightarrow Z$ duas aplicações lineares. O produto tensorial de A por B é a transformação linear $A \otimes B : U \otimes V \rightarrow W \otimes Z$ definida pela relação*

$$A \otimes B(u \otimes v) = A(u) \otimes B(v), \quad \text{para todo } u \in U \text{ e } v \in V.$$

Sejam $A, B : U \rightarrow U$ aplicações lineares, e $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ uma base de U . Considere $\alpha = (\alpha_j^i)_{m \times m}$ e $\beta = (\beta_j^i)_{m \times m}$ as matrizes que representam A e B , respectivamente, na base \mathcal{E} . A matriz da aplicação linear $A \otimes B : U \otimes U \rightarrow U \otimes U$, na base $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} = \{e_i \otimes e_j \mid i, j = 1, \dots, m\}$, é chamada de produto de Kronecker ou produto tensorial de matrizes α e β , sendo denotada por $\alpha \otimes \beta$. De acordo com a Definição 2.8 e a bilinearidade do produto tensorial, segue que:

$$(A \otimes B)(e_k \otimes e_h) = A(e_k) \otimes B(e_h) = \left(\sum_i \alpha_k^i e_i \right) \otimes \left(\sum_j \beta_h^j e_j \right) = \sum_{i,j} \alpha_k^i \beta_h^j e_i \otimes e_j,$$

e portanto:

$$\alpha \otimes \beta = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \beta_1^1 & \dots & \alpha_1^1 \beta_m^1 & \dots & \alpha_m^1 \beta_1^1 & \dots & \alpha_m^1 \beta_m^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^1 \beta_1^m & \dots & \alpha_1^1 \beta_m^m & \dots & \alpha_m^1 \beta_1^m & \dots & \alpha_m^1 \beta_m^m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^m \beta_1^1 & \dots & \alpha_1^m \beta_m^1 & \dots & \alpha_m^m \beta_1^1 & \dots & \alpha_m^m \beta_m^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^m \beta_1^m & \dots & \alpha_1^m \beta_m^m & \dots & \alpha_m^m \beta_1^m & \dots & \alpha_m^m \beta_m^m \end{pmatrix}$$

Dessa forma, dado um tensor $A \otimes B(e_r \otimes e_s) \in \text{Im}(A \otimes B)$, as coordenadas desse tensor na base $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ se encontram na coluna com os sub-índices r e s , sendo elas: $\alpha_r^1 \beta_s^1, \dots, \alpha_r^1 \beta_s^m, \dots, \alpha_r^m \beta_s^1, \dots, \alpha_r^m \beta_s^m$.

2.4 Produto tensorial de vários espaços vetoriais

Dados os espaços vetoriais V_1, \dots, V_p e W , definidos sobre o mesmo corpo, uma aplicação $\phi : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow W$ é chamada de p -linear quando é linear em cada variável separadamente.

Definição 2.9. Um produto tensorial dos espaços vetoriais V_1, \dots, V_p é um par (Z, ϕ) que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Z é um espaço vetorial e $\phi : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow Z$ é uma aplicação p -linear;
2. $\dim Z = \dim V_1 \cdot \dim V_2 \cdot \dots \cdot \dim V_p$;
3. $\phi(V_1 \times \dots \times V_p)$ gera Z ;

Dado o produto tensorial (Z, ϕ) dos espaços vetoriais V_1, \dots, V_p , escreve-se $Z = V_1 \otimes \dots \otimes V_p$ e $\phi(v_1, \dots, v_p) = v_1 \otimes \dots \otimes v_p$. De modo análogo ao Teorema 2.6, o produto tensorial $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$ é único, a menos de um isomorfismo canônico. Conhecendo a construção anterior de um espaço vetorial, pode-se definir indutivamente o produto tensorial de p espaços por meio da fórmula:

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_p = (V_1 \otimes \dots \otimes V_{p-1}) \otimes V_p,$$

com a aplicação p -linear $\phi(v_1, \dots, v_p) = v_1 \otimes \dots \otimes v_p$ definida como $(v_1 \otimes \dots \otimes v_{p-1}) \otimes v_p$.

Todas as construções do produto tensorial $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$ são isomorfas entre si. Portanto, não há ambiguidade nem perda de generalidade ao escolher qualquer uma dessas construções, uma vez que existe uma maneira natural de identificar elementos de uma construção com elementos bem definidos de outra. Além disso, valem, para p fatores, as Propriedades 2 e 1 do produto tensorial, que garantem, respectivamente, a associatividade e a comutatividade.

Referências

- [1] Lima, E. L. *Cálculo Tensorial*. 5ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [2] Kobayashi, S., Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1. Wiley-Interscience (1963).



Desvendando o Termo Geral de uma Progressão Geométrica

Carolina Silva Alves

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
carolina.silvaalves@ufu.br

Herick José Rodrigues Chaveiro

Escola Estadual de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
herick.chaveiro@educacao.mg.gov.br

Ana Claudia Molina Zaqueu Xavier

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
ana.zaqueu@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Educação Matemática.
Resolução de Problemas.
Ensino Médio.

O presente trabalho relata uma das aulas de uma coleção elaborada em uma Iniciação Científica. Esta foi realizada em turmas de segundo ano do Ensino Médio da Rede Estadual de Ensino acerca do assunto Progressões Geométricas. A metodologia utilizada foi baseada no Ensino de Matemática Através da Resolução de Problemas, proposto por Onuchic e Allevato (2011). Como resultados, observamos que os alunos tiveram uma compreensão mais sólida acerca do tema.

1 Introdução

A Metodologia de Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, é uma das formas de se utilizar a Resolução de Problemas nas aulas de Matemática. Nela, o problema é tido como um chamativo para que o aluno possa construir novos conceitos e ser ativo na formalização de seu conhecimento matemático, cabendo ao professor conduzir o processo (Onuchic; Allevato, 2011).

Autores como Onuchic e Allevato (2011), que se debruçaram sobre tal metodologia, destacam nove etapas que tendem a contribuir para a implemetação dessa prática em sala de aula, sendo elas: (1) Preparação do Problema; (2) Leitura Individual; (3) Leitura em conjunto; (4) Resolução do problema; (5) Observar e incentivar; (6) Registro das resoluções na lousa; (7) Plenária; (8) Busca do consenso; e (9) Formalização do conteúdo.

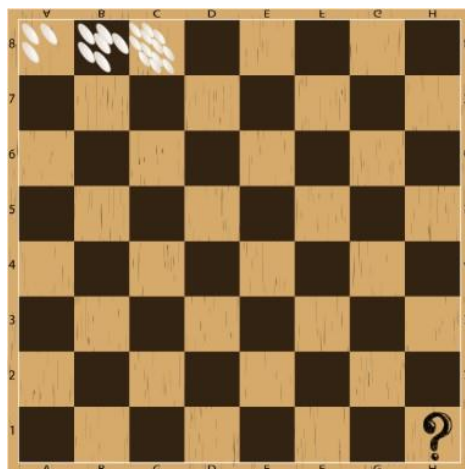
Para este trabalho, será relatada uma aula desenvolvida no campo do Estágio Supervisionado III, a partir de atividades propostas no âmbito de uma iniciação científica, em turmas de segundo ano do Ensino Médio da Rede Estadual de Minas Gerais, no período noturno, que chamaremos de 2º 8 e 2º 9 (identificação da própria escola). O conteúdo da aula, *definindo uma progressão geométrica e dedução do termo geral*, foi combinado com o docente supervisor, tendo em vista o planejamento geral escolar para a série.

2 Planejamento e Execução

Partindo das etapas propostas por Onuchic e Allevato (2011), foi escolhido um problema que permitisse ao aluno retomar o conceito de potência, uma vez que o assunto no qual desejávamos trabalhar, depende dele.

Dessa forma, o problema escolhido foi: **“Um rei prometeu recompensar um sábio que colocasse corretamente grãos de arroz em um tabuleiro de xadrez. Para a distribuição, começa-se com 3 grãos no primeiro quadrado e a quantidade dobra em cada quadrado seguinte. A distribuição deverá ser feita sempre da esquerda para a direita, uma linha de cada vez, sequenciadas. Se distribuído corretamente, quantos grãos de arroz deverá conter a última casa do tabuleiro?”**

Figura 1: Tabuleiro com a Distribuição Inicial



Fonte: Elaborado pelos Autores

O objetivo da proposta foi que os alunos percebessem que realizar as distribuições de arroz não é eficiente para solucionar o problema e que, portanto, eram necessário outros artifícios para representar o caminho de soluções através das propriedades de potências, sem que fosse necessário realizar as multiplicações de fato.

Para que este objetivo fosse alcançado, o problema foi apresentado junto com um roteiro de questões que estimulava os alunos a indicar as quantidades de grãos em casas mais próximas umas das outras. Além disso, foi proposto uma tabela com o intuito de chamar a atenção dos alunos para os elementos que seriam importantes na formulação de conjecturas para solucionar o problema.

Figura 2: Roteiro de Questões

- Questão 1: Observe a distribuição de arroz. Qual a quantidade de grãos de arroz que deverá ter na casa D8?
- Questão 2: Qual a quantidade de grãos de arroz que deverá ter na casa F8?
- Questão 3: Qual a quantidade de grãos de arroz que deverá ter na casa A7?
- Questão 4: Qual a quantidade de grãos de arroz que deverá ter na casa A6?
- Questão 5: Qual a quantidade de grãos de arroz que deverá ter na casa D5?
- Questão 6: Qual a quantidade de grãos de arroz que deverá ter na casa A4?
- Questão 7: Qual a quantidade de grãos de arroz que deverá ter na casa G3?
- Questão 8: Qual a quantidade de grãos de arroz que deverá ter na casa A1?
- Questão 9: Qual a quantidade de grãos de arroz que deverá ter na casa H1?

Fonte: Elaborado pelos Autores

Figura 3: Tabela

Identificação da casa	Número Sequencial da casa	Quantidade de multiplicações necessárias	Quantidade de grãos de arroz
A8	1	0	3
B8	2	1	6
C8	3	2	12
D8		3	24
E8	5		48
F8	6	5	
G8			192
H8			

Fonte: Elaborado pelos Autores

Após estas etapas, foi discutido com os alunos as relações que poderiam ser notadas entre a ordem das casas e a quantidade de multiplicações necessárias. Tal discussão foi utilizada para a formulação do termo geral.

2.1 Execução da proposta

Ao iniciar a aula, foi entregue aos alunos um conjunto contendo: (1) a situação problema com a figura 1 ; (2) as questões apresentadas na figura 2; (3) a tabela para a visualização das relações; e (4) tabuleiro de xadrez expandido para a distribuição do arroz, com um copinho contendo arroz.

Nas turmas 2º 8 e 2º 9 havia, respectivamente, 4 e 3 alunos, característica marcante de turmas do noturno nas aulas de sexta-feira, nesta escola em questão. Diante do baixo número de estudantes, optou-se por organizar a turma em círculo para que eles pudessem conversar.

Foi realizada, em ambas as turmas, a leitura em conjunto, identificando sempre que não havia dúvidas quanto a maneira e os critérios de distribuição. Após a leitura, seguimos para o próximo passo, de resolução do problema.

Os alunos, após iniciarem as multiplicações, notaram rapidamente que, nas palavras deles, “havia um macete” para descobrir a quantidade de grãos na última casa sem precisar realizar todas as multiplicações. Confirmamos que havia um jeito e recomendamos que eles preenchessem a

tabela para que pudessem buscar uma relação.

Alguns alunos tentaram distribuir arroz nas casas enquanto outros resolveram escrever a quantidade em cada casa, buscando responder o roteiro. Ao acompanhar a resolução dos alunos e seus comentários, como o número final ficaria muito grande, alteramos o problema combinando que não seria necessário achar a quantidade exata de grãos na última casa, mas que seria necessário resolver as questões, preencher as três primeiras colunas da tabela e “demonstrar” a relação que indica a quantidade de grãos na última casa.

Figura 4: Tabela Preenchida por Aluno

Identificação da casa	Número Sequencial da casa	Quantidade de multiplicações necessárias	Quantidade de grãos de arroz
A8	1	0	3
B8	2	1	6
C8	3	2	12
D8	4	3	24
E8	5	4	48
F8	6	5	96
G8	7	6	192
H8	8	7	384
I8	9	8	768
J8	10	9	1536
K8	11	10	3072
L8	12	11	6144
M8	13	12	12288
N8	14	13	24576
O8	15	14	49152

Fonte: Arquivo Pessoal

A figura 4 mostra como foi feita o preenchimento da tabela de um dos participantes, que para tentar encontrar a fórmula geral, utilizou a tabela com os valores correspondentes a primeira coluna do tabuleiro.

Figura 5: Informações da casa H1

41	64	63	

Fonte: Arquivo Pessoal

O aluno da figura 5, ao completar as linhas propostas no início da tabela, notou que a quantidade de vezes que a multiplicação era realizada para se obter uma quantidade de grãos em uma casa era sempre um a menos que a posição sequencial que esta ocupa na distribuição. Com essa informação, foi possível estabelecer com os alunos essa relação.

Ao terminar a discussão com as turmas, partimos para a próxima etapa da metodologia que é a formalização do conteúdo. Para isto, foi necessário retomar a tabela e montar no quadro o que significava na escrita matemática a coluna 3 da tabela. Foi lembrado dos estudos de Progressões Aritmética, mais especificamente, de como era denotado os termos na sequência - $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{64}$ - e foi estabelecido que o número sequencial poderia ser visto como termos em uma sequência. Dessa forma, fizemos a descrição dos termos, com a ajuda das turmas, da seguinte maneira:

$$a_1 = 3$$

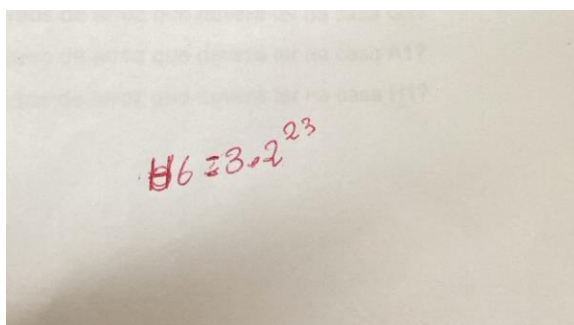
$$a_2 = 3 * 2$$

$$a_3 = 3 * 2 * 2$$

$$a_4 = 3 * 2 * 2 * 2$$

Nesse momento, foi perguntado aos alunos como poderia ser escrito o termo a_{64} , que seria a última distribuição a ser feita. Eles começaram então a dizer : “3 vezes 2, vezes 2, vezes 2, vezes 2...63 vezes”. Ao questionarmos se não haveria uma forma melhor de escrever tal conta, um dos alunos falou que poderia ser utilizado a potenciação para representar a multiplicação, resultando, então, em $a_{64} = 3 * 2^{63}$. A figura 6 é a forma que um aluno representou a quantidade de grãos de arroz na 24ª casa, que está na posição H6.

Figura 6: Representação com Potência



Fonte: Arquivo Pessoal

Por fim, foi comentado que uma sequência em que o termo seguinte é obtido a partir da multiplicação do anterior por um valor fixo, como no caso do problema, é chamada de Progressão Geométrica (P.G.), e que esse valor que está sempre sendo multiplicado, é chamado de razão e que será denotado pela letra q . Assim ao desejarmos obter um valor em uma posição n em uma P.G., podemos utilizar a seguinte expressão (desenvolvida com a participação dos alunos):

$$a_n = a_1 * q^{n-1}, n \in \mathbb{N}, a_1, q \in \mathbb{R}$$

3 Considerações finais

A partir da aula, foi possível estabelecer com os alunos o raciocínio prático utilizado no conteúdo de Progressões Geométricas. Destacamos ainda que o Ensino de Matemática Através da Resolução de Problemas é uma dentre diversas metodologias que podem ser utilizadas nas aulas de Matemática, visando maior participação e interesse dos alunos.

Este relato de experiência é fruto de uma das propostas elaboradas em um projeto de Iniciação Científica na qual a primeira e a terceira autora realizam. Os demais planos de aula, bem como os referenciais teóricos, serão disponibilizados em um site que está em processo de formulação para que possa ser acessado por diferentes professores.

Agradecimentos

A primeira autora, na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradece ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

Referências

- [1] ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.



Do batimento ao gráfico: uma experiência Interdisciplinar no Ensino de Frequência Cardíaca, Matemática e Física

Bianca Sacoman de Moura

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

bianca.moura@ufu.br

Muriell Francisco da Costa

UFU, Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

muriell.francisco@ufu.br

Arlindo José de Souza Junior

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

arlindo@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Saúde.
Frequência.
Educação Matemática.

Este trabalho relata uma experiência desenvolvida no âmbito da disciplina de PROINTER IV – Oficina de Prática Pedagógica do Curso de Licenciatura em Matemática, com base em uma proposta pedagógica centrada no Tema Contemporâneo Transversal Saúde. A proposta sugere o ensino das grandezas físicas escalares frequência (F) e período (T) por meio do estudo das frequências cardíacas e sua representação em um eletrocardiograma (ECG), de forma a produzir uma aprendizagem significativa por meio de atividades contextualizadas. A experiência vivenciada em sala de aula ocorreu em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental, sendo nesse relato destacado os resultados e as reflexões que foram obtidas durante essa prática pedagógica.

1 Introdução

A Saúde é um tema fundamental na formação de crianças e adolescentes conscientes e capazes de adotarem hábitos saudáveis para uma melhor qualidade de vida. Ao integrar esse tema ao ensino de Matemática, possibilita-se a demonstração de como números e dados desempenham um papel crucial na compreensão de uma alimentação equilibrada, na importância da prática regular de atividades físicas e na identificação de alterações no funcionamento do corpo humano, como variações na frequência cardíaca, que podem indicar esforço físico, níveis de estresse ou possíveis problemas de saúde.

Sendo assim, este relato de experiência tem como objetivo apresentar uma proposta pedagógica interdisciplinar que integra os estudos sobre Saúde, Matemática e Física, desenvolvida no contexto da disciplina PROINTER IV - Oficina de Prática Pedagógica, envolvendo o Tema Contemporâneo Transversal (TCT) Saúde. A proposta sugere o ensino das grandezas físicas escalares frequência (F) e período (T) por meio do estudo das frequências cardíacas e sua representação no eletrocardiograma (ECG), de forma a produzir uma aprendizagem significativa por meio de atividades contextualizadas. Ademais, a experiência vivenciada em sala de aula ocorreu em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental.

Ao propor atividades contextualizadas, Souza (2009) afirma que

Uma aula contextualizada leva o aluno a interagir com o que está sendo ministrado [...] aprendizagem é associada à preocupação em retirar o aluno da condição de espectador passivo, em produzir uma aprendizagem significativa e em desenvolver o conhecimento espontâneo em direção ao conhecimento abstrato. É preciso fazer os alunos verem a matemática na realidade, [...] ligar a matemática que se estuda nas salas de aula com a matemática do cotidiano (Souza, 2009, p. 15).

Ao propor atividades contextualizadas, pretende-se atender às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e da diretriz Currículo Referência de Minas Gerais (Minas Gerais, 2024), que incentiva o estudo de temas integradores e contextualizados, visando as possibilidades de aprendizagens e os desenvolvimentos dos alunos.

Ao longo deste relato, encontra-se tópicos que exploram, inicialmente, um breve resumo sobre o TCT de Saúde, situando sua relevância no contexto educacional. Em seguida, é abordado os fundamentos básicos sobre frequência cardíaca e ECG como tema central para a introdução no ensino das grandezas físicas com frequência e período. Após essa fundamentação, apresenta-se um detalhamento completo da proposta pedagógica interdisciplinar, incluindo a criação de um modelo

tridimensional de um ECG confeccionado uma impressora 3D.

2 Sequência didática de OPP

A Oficina de Prática Pedagógica (OPP) segue uma sequência didática baseada em uma metodologia ativa chamada rotação por estações (Christensen; Horn; Staker, 2013), no qual cada estação consiste em uma atividade ou um conjunto de atividades diferentes sobre um mesmo tema. O tema abordado está relacionado aos Temas Contemporâneos Transversais (TCT) (Brasil, 2019). As estações de aprendizados, que eram compostas por tarefas a serem realizadas, foram organizadas em sete categorias: Identidade do estudante e TCT, Estudos sobre os TCT's, Pesquisas sobre os TCT's, Produtos digitais, Prática pedagógica, Pensamento matemático e Narrativa digital.

A sequência de estações da disciplina de OPP teve início com atividades voltadas à construção da identidade do estudante, como vídeos, questionários, memorial de experiências com os TCT e autoavaliação. Em seguida, desenvolveu-se estudos sobre os Temas Contemporâneos Transversais (TCT) e a escolha da temática do projeto. A segunda estação envolveu pesquisas nos documentos normativos da educação, como a BNCC (Brasil, 2018) e o Currículo de Minas Gerais, além de produções acadêmicas da Educação Matemática. A estação dos produtos digitais promoveu a análise de diferentes mídias e recursos educacionais, como vídeos, *podcasts*, jogos e propostas STEAM. Na estação de Prática Pedagógica, os licenciandos(as) elaboraram propostas a serem desenvolvidas em escolas. Por fim, as estações de Pensamento Matemático e Narrativa Digital abordaram a Modelagem Matemática do projeto e a produção de um *e-book* e um produto digital.

3 Metodologia

A metodologia deste trabalho fundamenta-se na pesquisa qualitativa (Lüdke; André, 2018), com o objetivo de investigar a perspectiva dos(as) alunos sobre questões relacionadas à Saúde em uma aula de Matemática. A proposta pedagógica, desenvolvida na disciplina de Oficina de Prática Pedagógica (OPP), integrou as áreas de Saúde, Matemática e Física, com foco no ensino das grandezas físicas escalares frequência (F) e período (T) por meio do estudo das frequências cardíacas e sua representação no eletrocardiograma (ECG). Elaborou-se um plano de aula intitulado “*Do batimento ao gráfico: definindo o conceito de frequência*”, com duração de 100 minutos, visando à definição do conceito de frequência por meio das batidas do coração, explorando as frequências cardíacas em diferentes fases do desenvolvimento humano. A aula, realizada com uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de Uberlândia (MG), envolveu escuta

de batimentos cardíacos, interpretação de gráficos de ECG e Modelagem Matemática dos conceitos de Frequência (F) e período (T), buscando promover uma aprendizagem contextualizada e interdisciplinar.

4 Análise das notas de campo

A prática pedagógica deste projeto foi desenvolvida de uma escola da rede municipal de ensino da cidade de Uberlândia, estado de Minas Gerais, em uma turma de 8º ano do ensino fundamental, sob a supervisão da professora de Matemática da turma. A prática pedagógica, intitulada “*Do batimento ao gráfico: definindo o conceito de frequência*”, aconteceu em duas aulas de 50 minutos, na terça-feira do dia 19 de novembro de 2024, no período da manhã. A prática aconteceu em uma sala de aula convencional, com aproximadamente 25 alunos(as).

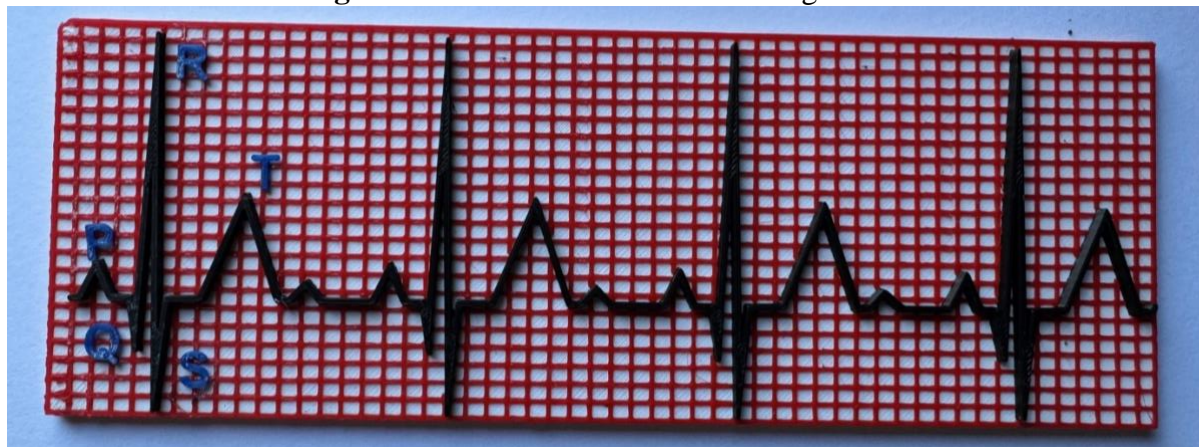
Para dar início à aula, a professora realizou uma breve apresentação e introduziu o tema com a seguinte afirmação: “*Hoje, vamos estudar matemática explorando as batidas do coração!*”. Em seguida, a professora fez a seguinte pergunta: “*Vocês já estudaram algum tema da área da saúde em uma aula de matemática?*” e as respostas foram que não. Neste momento, a professora estimula a curiosidade dos alunos e promove uma reflexão sobre suas experiências anteriores e o esperado se confirma ao receber a resposta negativa dos alunos(as) e percebe-se que o ensino integrado de temas da área da Saúde às aulas de Matemática são poucos ou nada explorados, com isso, concluiu-se que o ensino de Matemática por muitas vezes está dissociado dos contextos práticos e cotidiano dos estudantes.

No primeiro momento da aula, onde teve por objetivo reunir o que os alunos(as) sabem sobre as batidas do coração ao escutar os batimentos, foi colocado um vídeo com o som das batidas e feito a seguinte pergunta: “*Escutando esse som, o que ele significa para vocês?*”, e os alunos disseram: “*É o coração batendo*”, “*É o coração batendo em um ritmo constante*”. Outra pergunta feita após essa foi “*Vocês conseguem perceber algo matemático neste som?*” e, então, um dos alunos disse que “*sim, pois o coração está batendo sempre no mesmo tempo, as batidas seguem um mesmo ritmo*”. A partir daí, percebeu-se que os alunos(as) tinham uma certa noção do que é ritmo.

A próxima pergunta foi “*Será que nós conseguimos contar quantas vezes o coração está batendo durante este vídeo?*”. Os alunos(as) disseram que sim, sendo em seguida dito aos estudantes que o que estaríamos fazendo ao contar quantas vezes o coração está batendo recebe um nome de frequência cardíaca. A frequência cardíaca é o número de vezes que o coração bate por minuto.

Ainda no primeiro momento da aula, foi mostrado outro vídeo para os alunos, em que tratou-se de uma representação gráfica dos batimentos cardíacos. O intuito com este vídeo é introduzir o eletrocardiograma como uma forma dessa representação. Alguns alunos(as) sabiam sobre essa representação gráfica, citaram, por exemplo, o monitor cardíaco. Após o vídeo, foi falado aos estudantes que o eletrocardiograma é uma forma de representação e fornecido o modelo 3D do eletrocardiograma para eles visualizassem mais de perto (Figura 1).

Figura 1 – Modelo 3D do eletrocardiograma



Fonte: elaborado pelos próprios autores (2025).

Os alunos(as) ficaram empolgados em poder tocar e quiseram saber como foi feito, então, foi dito que foi feito em uma impressora 3D utilizando softwares matemáticos. Após este momento, foi explicado aos alunos(as) o significado por trás das ondinhas que foram identificadas com letrinhas diferentes, como uma etapa de curiosidade, para que eles(as) entendessem como o coração se prepara para realizar uma batida. A intenção para este momento era o de introduzir o produto digital elaborado, o vídeo interativo, no entanto, não foi possível realizar esta parte do planejamento.

No segundo momento da aula, foi apresentado quatro modelos de eletrocardiograma, um de uma criança (76 bpm), um de um adolescente (100 bpm), um de uma mulher (60 bpm) e por fim o de um atleta (45 bpm) e pedido a eles para fazerem essas classificações com base na frequência cardíaca de cada um. Neste momento, os alunos começaram a dar seus palpites:

“O de 100 é o da criança porque criança é muito agitada” , “O de 100 é de uma criança porque ela é menor e então o sangue circula mais rápido”. “O de 76 é de um atleta”, “O de 45 com certeza não é de um atleta”. “E o de um idoso, qual é?”.

E durante esse diálogo, surgiram perguntas do tipo *“tem diferença da quantidade de batimentos por minuto de uma mulher para o de um homem?”* O objetivo deste momento foi alcançado, pois era

exatamente o de provocar dúvidas nos alunos, incentivando-os a fazer novas perguntas. A intenção era que eles comessem a refletir sobre como fatores como idade, sexo biológico (homem ou mulher) e atividade física podem influenciar se a frequência cardíaca será mais alta ou mais baixa. Durante este momento, um dos alunos(as) acertou em dizer que a frequência cardíaca de 45 bpm era de um atleta, dizendo que *“por ser o coração de um atleta que está sempre fazendo atividade física, o coração está bem treinado e consegue fazer seu trabalho normal mesmo demorando entre uma batida e outra”*.

Após este momento de troca de ideias, foi mostrado para aos estudantes as referências de frequências cardíacas normais para cada idade, para homem e para mulher. E dito aos alunos(as) que a frequência cardíaca muda conforme o estágio de desenvolvimento porque o coração de crianças é menor e precisa bater mais rápido para bombear sangue suficiente, enquanto em adultos, o coração maior e mais eficiente pode bater mais devagar. A formação biológica também influencia: geralmente, mulheres têm frequência cardíaca levemente mais alta que homens devido a diferenças hormonais e no tamanho do coração. A atividade física impacta porque pessoas mais ativas têm um coração mais forte e eficiente, permitindo uma frequência cardíaca em repouso mais baixa, enquanto sedentários podem ter batimentos mais altos para atender às demandas do corpo. A partir daí, foi dito aos alunos(as) quando a frequência cardíaca é considerada alta e quando ela é considerada baixa.

Após esse momento de troca de ideias, em que os(as) alunos(as) apresentaram hipóteses e questionamentos sobre os diferentes batimentos cardíacos, discutiu-se coletivamente as médias de frequência cardíaca para diferentes perfis (idade, sexo biológico, nível de atividade física), com base nas referências apresentadas. A partir dessa discussão, considerando a necessidade de trabalhar com números mais acessíveis para o processo de Modelagem Matemática na etapa seguinte, foi acordado com a turma o uso da frequência de 60 bpm como valor de referência. Esse valor foi escolhido por representar uma média próxima à frequência cardíaca de uma pessoa adulta em repouso, além de facilitar a construção da relação com o tempo (60 batimentos por minuto \rightarrow 1 batimento por segundo), favorecendo a introdução do conceito de período.

Dado esse momento, na terceira etapa da aula, tivemos a etapa da formalização do conceito de frequência e consequentemente o conceito de período. Apresentou-se que frequência (F) é a quantidade de vezes que um fenômeno ocorre em um determinado período. E período (T) é o tempo necessário para que um fenômeno ocorra.

Aqui, foi realizada a relação de frequência cardíaca com a grandeza física escalar frequência e

perguntado aos alunos(as): “*Será que é possível contar quanto tempo o coração leva para completar um ciclo entre uma batida e outra?*”, para que pudéssemos fazer relação com a grandeza física escalar período. Nessa etapa, um aluno disse que é “*o tempo entre uma batida e outra*”, e de fato, é o tempo entre uma batida e outra. Assim, foi formalizado o conceito de período (T).

A ideia para formalizar as relações matemáticas foi começar pela seguinte afirmação:

$$\textbf{Frequência cardíaca} = \textbf{60 bpm (batimentos por minuto)} = \frac{\textbf{60 batimentos}}{\textbf{1 minuto}}$$

Sabe-se que 1 minuto equivale a 60 segundos, então podemos reescrever da seguinte forma:

$$\textbf{Frequência cardíaca} = \frac{\textbf{60 batimentos}}{\textbf{60 segundos}} = \frac{\textbf{1 batimento}}{\textbf{1 segundo}}$$

Assim, concluímos que temos 1 batimento a cada 1 segundo, ou seja, definimos o significado de período (T). Agora, podemos formalizar a seguinte relação:

$$\textbf{1 segundo} \times \frac{\textbf{1 batimento}}{\textbf{1 segundo}} = \textbf{Período (T)} \times \textbf{Frequência (F)} = \textbf{1}$$

$$\text{Portanto, } T = \frac{1}{F} \text{ e } F = \frac{1}{T}.$$

Em conclusão, a prática pedagógica desenvolvida demonstrou o potencial da integração entre saúde, Matemática e Física, proporcionando aos alunos uma experiência de aprendizagem dinâmica e significativa. Ao explorar a frequência cardíaca como tema central, os(as) estudantes puderam não apenas compreender conceitos matemáticos e físicos, como também refletir sobre fatores que influenciam a saúde humana. Embora o tempo disponível tenha sido um desafio para a completa formalização de conceitos como frequência e período, a interação e o engajamento dos alunos(as) indicam que a abordagem interdisciplinar é uma estratégia eficaz para despertar o interesse e a curiosidade. Essa experiência reforçou a importância de projetos pedagógicos que conectam o conhecimento acadêmico com situações do cotidiano, proporcionando uma aprendizagem mais significativa.

5 Considerações finais

O relato apresentado sobre uma proposta interdisciplinar sobre o ensino das grandezas físicas frequência (F) e período (T) por meio do estudo de frequências cardíacas representadas em um

eletrocardiograma (ECG) evidenciou a relevância de práticas pedagógicas interdisciplinares e contextualizadas na formação integral do(a) estudante da Educação Básica. Estudando o tema sobre Saúde, integrado ao conteúdo de Matemática e Física, foi possível demonstrar como conceitos teóricos podem ser aplicados de maneira ao cotidiano escolar, promovendo uma conscientização sobre saúde e bem-estar.

O estudo das frequências cardíacas e sua representação gráfica permitiu explorar conceitos como frequência e período, aproximando os alunos(as) de maneira acessível e conectado a realidade. No entanto, o tempo limitado foi um desafio, principalmente na formalização matemática dos conceitos. Esse ponto trouxe uma reflexão para a necessidade de alterar o tempo proposto no plano de aula e ideias para futuros projetos mais extensos, que possibilitem uma abordagem mais profunda sobre esta temática.

A prática também revelou a que a integração de assuntos da área da Saúde nas aulas de Matemática é pouco vista, evidenciando a importância de iniciativas que propõem o ensino interdisciplinar sobre diferentes áreas do conhecimento, como o sugerido na BNCC e no Currículo Referência de Minas Gerais. Portanto, a proposta desenvolvida trouxe grandes aprendizados significativos e uma primeira experiência única na elaboração e no desenvolvimento de um projeto sobre os Temas Contemporâneos Transversais (Brasil, 2019), em específico na área da Saúde.

Referências

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- [2] _____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC: Contexto histórico e pressupostos pedagógicos**. Brasília, 2019.
- [3] CHRISTENSEN, C. M.; HORN, M. B.; STAKER, H. **Ensino Híbrido: uma Inovação Disruptiva**. 2013. Disponível em: https://www.pucpr.br/wp-content/uploads/2017/10/ensinohibrido_uma-inovacao-disruptiva.pdf. Acesso em: 21 mar. 2025.
- [4] LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2018.
- [5] MINAS GERAIS. **Currículo Referência de Minas Gerais**. 2024. Disponível em: <https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/>. Acesso em: 21 mar. 2025.
- [6] SOUZA, J. F. **Construindo uma aprendizagem significativa com história e contextualização da matemática**. Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2009.



Dos Logaritmos às Engrenagens: Uma Jornada Histórica no Mundo dos Cálculos.

Gabriel Melo Gomes Pereira

UFU, IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
gabriel.pereira3@ufu.br

Hernán Roberto Montúfar López

UFU, IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
montufar@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Logaritmo.
Régua de cálculo.
Maquina de somar.

Este estudo explora desenvolvimentos cruciais na trajetória da matemática e do cálculo, ressaltando a invenção da Pascalina por Blaise Pascal, a criação da régua de cálculo e as notáveis descobertas de John Napier no campo dos logaritmos. A Pascalina, concebida no século XVII, representou um dos primeiros equipamentos mecânicos capazes de executar operações aritméticas, servindo como um ancestral dos dispositivos de cálculo contemporâneos. A régua de cálculo, fundamentada nos fundamentos dos logaritmos, transformou radicalmente os cálculos nas áreas de ciência e engenharia antes da ampla disponibilidade dos computadores. John Napier, um matemático escocês, criou os logaritmos no começo do século XVII, estabelecendo um sistema que simplificou cálculos intrincados e exerceu um impacto considerável sobre a matemática e a ciência. Em conjunto, tais progressos fomentaram o progresso da computação e da matemática prática, viabilizando a execução de cálculos com mais agilidade e exatidão.

1 Introdução

Entender a história da matemática é crucial para percebermos como o raciocínio matemático se desenvolveu e como ideias e teorias foram construídas ao longo dos séculos. A matemática não nasceu sozinha, mas sim como uma solução para questões práticas encaradas por diferentes povos. A invenção dos logaritmos, por exemplo, é um dos grandes feitos na facilitação de contas complicadas, sendo uma inovação que influenciou muito a astronomia, a navegação e vários campos da ciência.

John Napier, um matemático escocês do século XVII, foi um dos primeiros a criar essa ideia inovadora. Seu trabalho com logaritmos não só tornou os cálculos numéricos mais fáceis, como também criou as bases para o desenvolvimento do cálculo e da análise matemática. O método que ele usou, baseado em progressões geométricas e razões, mostrou uma nova forma de lidar com números de maneira eficaz, permitindo cálculos mais rápidos e exatos.

Após a criação dos logaritmos, outras invenções surgiram com o propósito de otimizar e simplificar ainda mais os cálculos. Um exemplo é a régua de cálculo, um instrumento analógico que viabilizava a realização de multiplicações, divisões e até operações mais intrincadas com base nas propriedades logarítmicas. Amplamente utilizada por engenheiros e cientistas até o surgimento das calculadoras eletrônicas, a régua de cálculo representa um marco na história da instrumentação matemática.

Outro avanço significativo nesse contexto foi a máquina de somar de Blaise Pascal, conhecida como Pascalina. Desenvolvida em meados do século XVII, é considerada uma das primeiras calculadoras mecânicas da história. Acionada por engrenagens, a Pascalina foi concebida para auxiliar seu pai, que se dedicava a cálculos tributários, e tornou-se um símbolo da transição entre o raciocínio estritamente manual e o uso de dispositivos para computação.

Neste estudo, vamos examinar a estrutura matemática da obra de Napier, explicando a lógica por trás de seus logaritmos e sua definição geométrica. Vamos analisar a escolha de valores específicos usados em sua fórmula e como seu método se assemelha aos logaritmos naturais que usamos hoje. Além disso, vamos discutir a relevância da ideia logarítmica para o progresso da ciência e da tecnologia, mostrando o impacto do pensamento matemático no avanço do saber humano.

2 A Descoberta dos Logaritmos

A descoberta dos logaritmos foi precedida por importantes contribuições de matemáticos como o suíço Jobst Bürg, o alemão Michael Stifel e o francês Nicolas Chuquet, que exploraram relações entre progressões aritméticas e geométricas. Matemáticos enfrentavam o desafio de simplificar multiplicações e divisões complexas, especialmente em campos como astronomia e navegação. Uma das técnicas desenvolvidas para esse fim foi a prostaférese, que utilizava identidades trigonométricas para transformar multiplicações em somas. Por exemplo, a identidade trigonométrica: $\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$. A prostaférese permitia transformar multiplicações de cossenos em adições, o que simplificava os cálculos com o uso de tabelas trigonométricas. Porém, essa técnica tinha

desvantagens, como a necessidade de tabelas muito grandes e uma precisão limitada. Essas dificuldades motivaram a procura por métodos mais eficazes. Foi nesse cenário que o matemático suíço Jobst Bürgi (1552–1632) teve um papel crucial. Atuando como relojoeiro e astrônomo nas cortes de Kassel e Praga, Bürgi criou, por volta de 1588, um sistema de logaritmos fundamentado em progressões geométricas. Mesmo tendo finalizado seu trabalho antes de John Napier, Bürgi só divulgou seus resultados em 1620, após o incentivo de Johannes Kepler.

Michael Stifel foi um matemático e teólogo alemão, nascido em Esslingen am Neckar. Inicialmente monge agostiniano, tornou-se posteriormente professor de matemática na Universidade de Jena. Sua obra mais relevante é *Arithmetica Integra*, publicada em 1544. Nessa obra, Stifel: Foi o primeiro a utilizar o termo *expoente* na linguagem matemática; Estabeleceu regras para manipulação de potências, como: $q^m \cdot q^n = q^{m+n}$, $\frac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$; Criou uma tabela relacionando números inteiros com potências de 2, demonstrando que operações como multiplicações e divisões poderiam ser transformadas em somas e subtrações — antecipando a ideia central dos logaritmos; Explorou o uso de números negativos (chamados por ele de *numeri absurdi*) e reconheceu a importância dos números irracionais na matemática; Desenvolveu métodos para resolução de equações quadráticas com coeficientes positivos e negativos, contribuindo significativamente para o desenvolvimento da álgebra.

Nicolas Chuquet foi um matemático francês que viveu em Paris e é reconhecido como autor do primeiro tratado de álgebra escrito em francês: *Triparty en la science des nombres*, concluído em 1484. Embora seu manuscrito não tenha sido publicado em sua época, foi redescoberto posteriormente e valorizado por sua importância histórica. No *Triparty*, Chuquet: Desenvolveu uma notação algébrica própria e discutiu propriedades das potências; Utilizou números negativos e o número zero como expoentes — um avanço notável para a época; Criou um sistema de nomeação de números muito grandes baseado em sufixos como *-illion*, o qual influenciou o modo como grandes números são nomeados até hoje; Antecipou conceitos de notação exponencial que seriam fundamentais para o desenvolvimento dos logaritmos. As ideias desenvolvidas por Stifel e Chuquet sobre relações entre progressões aritméticas e geométricas, bem como sobre exponenciação, formaram um corpo conceitual importante que antecedeu a formulação dos logaritmos. Elas mostram que a busca por métodos de simplificação de cálculos era uma questão matemática recorrente no final da Idade Média e início da Renascença.

A busca por simplificar os cálculos matemáticos culminou na descoberta dos logaritmos por John Napier. Esse avanço possibilitou a transformação de operações multiplicativas em somas, facilitando significativamente os cálculos em áreas como astronomia, navegação e engenharia. John Napier (1550-1617), um matemático escocês, começou a desenvolver a ideia dos logaritmos para ajudar seu pai, que administrava propriedades e precisava realizar cálculos extensivos. Napier percebeu que os cálculos poderiam ser simplificados se houvesse uma maneira de converter multiplicações em somas. Em 1614, publicou sua obra “*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*”, onde apresentou sua tabela logarítmica e explicou o conceito de logaritmos, mas sem detalhar a lógica por trás; isso só ocorreu em 1619, com a edição póstuma de sua obra “*Mirifici Logarithmorum Canonis Constuctio*”. Sua

abordagem inicial era complexa e usava uma base diferente da base 10, mas já demonstrava a relação fundamental:

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b) \quad (1)$$

Essa descoberta permitiu que cálculos demorados fossem simplificados, beneficiando astrônomos e navegadores, que frequentemente lidavam com números muito grandes. A explicação por trás da chave da obra de Napier era que para conservar próximos os termos em uma progressão geométrica de potências inteiras de um número dado, é necessário tomar o número dado muito próximo de um. Napier por isso escolheu como seu número dado $1 - 10^{-7}$ (ou 0.9999999). Assim, os termos na progressão de potências crescentes ficam realmente próximos — próximos demais, na verdade. Para chegar a um equilíbrio e evitar decimais, Napier multiplicou cada potência por 10^7 . Isto é, se $N = 10^7(1 - \frac{1}{10^7})^L$, então L é o “logaritmo” de Napier do número N .

$$L = \log 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

Assim, seu logaritmo de 10^7 é 0, seu logaritmo de $10^7(1 - 1/10^7) = 9999999$ é 1, e assim por diante.

Dividindo seus números e logaritmos por 10^7 , teríamos virtualmente um sistema de logaritmos de base $1/e$, pois

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$$

fica próximo de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

De fato:

$$\frac{L}{10^7} = \log_b 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

onde

$$b^{\frac{L}{10^7}} = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L \Rightarrow b = \left(\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L\right)^{\frac{10^7}{L}} \Rightarrow b = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \approx \frac{1}{e}$$

Deve-se lembrar, no entanto, que Napier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição era diferente da nossa. Os princípios de sua obra eram explicados em termos geométricos da maneira seguinte. Consideremos dados um segmento de reta AB e uma semirreta CDE . Suponhamos que um ponto P parte de A e se move ao longo de AB com velocidade variável, decrescendo em proporção com sua distância a B ; durante o mesmo tempo, suponhamos que um ponto Q parte de C e se move ao longo de CDE com velocidade uniforme igual à velocidade inicial de P . Napier chamava esta distância variável CQ de logaritmo da distância PB .

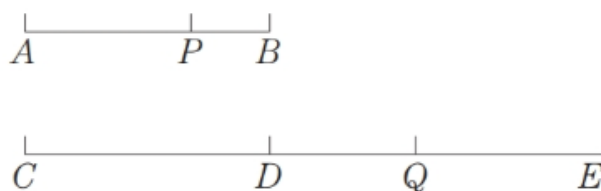


Figura 1: Exemplo do segmento.

A definição geométrica de Napier coincide, é claro, com a descrição numérica dada antes. Para mostrar isto, seja $PB = x$ e $CQ = y$. Se AB é tomado como 10^7 e se a velocidade inicial de P também é tomada como 10^7 , então, em notações modernas, temos:

$$\frac{dx}{dt} = -x \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 10^7,$$

com condições iniciais $x_0 = 10^7$, $y_0 = 0$. Então,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{10^7}{x},$$

cujas solução é

$$y = -10^7 \ln cx.$$

Das condições iniciais resulta $0 = -10^7 \log 10^7 c$ então $c = 10^{-7}$. Logo,

$$y = -10^7 \ln \left(\frac{x}{10^7} \right) \Rightarrow \frac{y}{10^7} = \frac{\ln \left(\frac{x}{10^7} \right)}{-1} \Rightarrow \frac{y}{10^7} = \frac{\ln \left(\frac{x}{10^7} \right)}{\log_e \left(\frac{1}{e} \right)}$$

ou

$$\frac{y}{10^7} = \log_{1/e} \left(\frac{x}{10^7} \right).$$

Isto é, se as distâncias PB e CQ fossem divididas por 10^7 , a definição de Napier levaria precisamente a um sistema de logaritmos de base $1/e$, como mencionamos antes. É desnecessário dizer que Napier construiu suas tabelas numericamente em vez de geometricamente, como a palavra “logaritmo”, que ele fabricou, implica. A princípio, ele chamou seus índices de potências “números artificiais”, mas mais tarde ele fez a composição de duas palavras gregas: *logos* (ou razão) e *arithmos* (ou números). Henry Briggs (1561-1630) logo percebeu o potencial da descoberta de Napier e propôs a reformulação dos logaritmos para base 10, tornando os cálculos ainda mais intuitivos. Em 1624, publicou a “*Arithmetica Logarithmica*”, contendo tabelas logarítmicas mais fáceis de usar. Além disso, Edmund Gunter (1581-1626) criou escalas logarítmicas que facilitavam a aplicação dos logaritmos em cálculos práticos. Essas escalas foram a base para o desenvolvimento da régua de cálculo.

3 A Régua de Cálculo

A régua de cálculo foi desenvolvida a partir das escalas logarítmicas propostas por Gunter. Posteriormente, William Oughtred (1574-1660) aperfeiçoou o instrumento, criando uma régua com escalas móveis que permitia a realização de operações matemáticas complexas de forma mecânica. Surgindo como um desenvolvimento direto dos logaritmos, em 1620, Edmund Gunter criou uma escala logarítmica fixa que permitia a realização de multiplicações e divisões com o uso de um compasso. Em 1632, William Oughtred projetou a primeira régua de cálculo com escalas móveis, tornando os cálculos ainda mais rápidos e acessíveis para cientistas e engenheiros. Durante os séculos XVIII e XIX, a régua de cálculo se tornou essencial em engenharia, astronomia e navegação. Modelos mais avançados foram desenvolvidos, incluindo réguas circulares e eletrônicas antes da chegada das calculadoras digitais.

A régua de cálculo consiste em duas escalas logarítmicas deslizantes. Para multiplicar dois números, por exemplo: Ajusta-se o número 1 da escala móvel sobre o primeiro número na escala fixa; Encontra-se o segundo número na escala móvel; O valor correspondente na escala fixa fornece o resultado da multiplicação. A mesma lógica se aplica a divisões, raízes e potências, tornando a régua de cálculo uma ferramenta poderosa.

Abaixo, incluímos imagens para ilustrar o funcionamento da régua de cálculo:

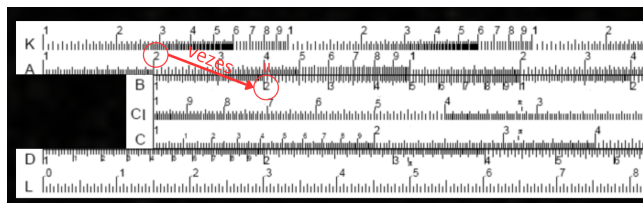


Figura 2: Exemplo de uso da régua de cálculo para multiplicação.

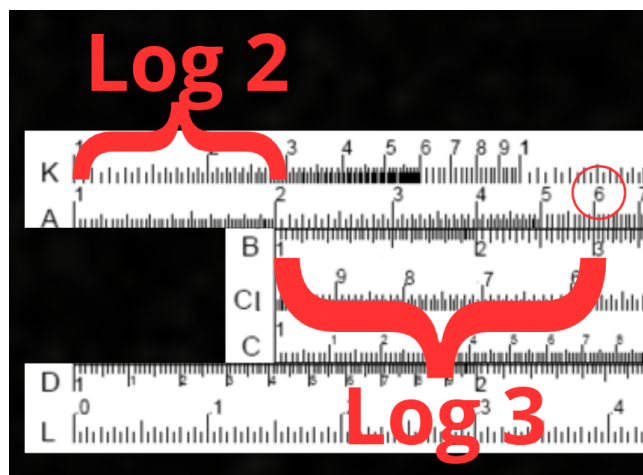


Figura 3: Detalhe das escalas logarítmicas.

4 A Máquina de Somar de Pascal

A máquina de somar de Blaise Pascal, conhecida como "Pascalina", foi uma das primeiras calculadoras mecânicas. Criada em 1642, ela visava auxiliar seu pai, que era coletor de impostos, na realização de cálculos aritméticos. Pascal, com apenas 19 anos, projetou a máquina para automatizar a soma e a subtração. Seu funcionamento era baseado em engrenagens dentadas que giravam de acordo com os valores inseridos pelo usuário. Com o tempo, a máquina foi aprimorada, tornando-se um dos primeiros dispositivos de cálculo mecânico reconhecidos.

4.1 Funcionamento da Pascalina

A Pascalina operava com um mecanismo de rodas numeradas de 0 a 9. Cada volta completa de uma roda movia a seguinte em uma unidade, permitindo a realização de somas e subtrações de maneira automática. O usuário inseria os números girando as rodas, e o resultado era exibido através de pequenas janelas na parte superior do dispositivo. Para somar, bastava girar as rodas até os números desejados. Para subtrair, Pascal projetou um sistema complementar, onde os valores negativos eram representados por uma inversão na rotação das engrenagens.

4.2 Impacto da Pascalina

Embora a Pascalina não tenha sido amplamente adotada comercialmente devido ao seu custo e complexidade de fabricação, ela estabeleceu princípios fundamentais para futuras calculadoras mecânicas e inspirou o desenvolvimento de dispositivos de computação.



Figura 4: A máquina de somar de Pascal (Pascalina).

5 Conclusão

O surgimento dos logaritmos pelas mãos de John Napier, junto com a criação da régua de cálculo e a invenção da máquina de somar idealizada por Blaise Pascal, ilustram como a matemática se transforma

para dar conta das demandas concretas de cada período. No século XVII, a dificuldade crescente dos cálculos necessários para astrônomos, navegadores e engenheiros foi o motor dessas invenções, que não só simplificaram a rotina desses profissionais, mas também pavimentaram o caminho para o desenvolvimento de novas tecnologias. A relevância desses progressos vai além do seu cenário inicial e chega até os nossos dias. Os logaritmos, como exemplo, seguem sendo muito usados em campos como a informática, a engenharia e a estatística. A régua de cálculo, mesmo tendo ficado para trás com as calculadoras eletrônicas, foi um ponto importante na trajetória dos instrumentos matemáticos, servindo de alicerce para o aprimoramento de tecnologias mais modernas. Do mesmo modo, a máquina de somar de Pascal pode ser vista como um ancestral dos computadores atuais, mostrando a busca incessante por maneiras mais eficazes de fazer cálculos. Explorar a história da matemática nos proporciona entender a ligação entre o saber teórico e seus usos práticos, além de dar valor ao legado dos grandes intelectuais que ajudaram no avanço da ciência. A matemática não é uma matéria à parte, mas um espelho das necessidades e dos desafios encarados pela humanidade ao longo dos tempos. Desse modo, ao examinarmos essas descobertas, admitimos que o avanço matemático é um caminho sem fim, movido pela curiosidade, pela inovação e pela vontade de entender e mudar o mundo à nossa volta.

Referências

- [1] BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Blucher, [s.d.].
- [2] NAPIER, J. **Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio**. [S.l.]: [s.n.], 1614.
- [3] BRIGGS, H. **Arithmetica Logarithmica**. [S.l.]: [s.n.], 1624.
- [4] CAJORI, F. **A History of Mathematical Notations**. Chicago: Open Court Publishing, 1928.
- [5] OUGHTRED, W. **The Circles of Proportion**. [S.l.]: [s.n.], 1632.
- [6] BÜRGI, J. **Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen**. 1620.
- [7] OLIVEIRA, E. C.; NERY, C. Do triângulo às fórmulas de prostaférese. **Cadernos da Quaestio**, Campinas, v. 22, n. 3, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.21167/cqdv22n3ci2022001010>>. Acesso em: 10 mar. 2025.
- [8] KATZ, V. J. **A History of Mathematics: An Introduction**. 3. ed. Boston: Addison-Wesley, 2009.



Entre Documentos e Relatos: Um Estudo Historiográfico sobre o Laboratório de Ensino de Matemática

Higor Eduardo Soares da Silva

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brasil.

higor.soares@ufu.br

Ana Cláudia Molina Zaqueu Xavier

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brasil.

ana.zaqueu@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Laboratório de Ensino de Matemática.
Historiografia.
Educação Matemática.

Este trabalho, a partir do que se tem produzido em uma iniciação científica que objetiva constituir um exercício historiográfico da trajetória do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) do Instituto de Matemática e Estatística (IME), pretende apresentar parte dos pressupostos teóricos-metodológicos que temos mobilizado para a realização da pesquisa supracitada. O LEM tem atuado como eixo dialógico entre universidade e comunidade, estabelecendo parcerias com escolas e desenvolvendo diferentes abordagens para o ensino da Matemática. A partir da metodologia da História Oral, sobretudo àquela praticada no interior do Grupo de Pesquisa História Oral e Educação Matemática (Ghoem), investigamos a trajetória do LEM ao longo do tempo. A partir de estudos teóricos, de fontes documentais e de entrevistas com docentes que estiveram envolvidos com o LEM busca-se construir uma história do LEM destacando, sobretudo, seu papel na formação daqueles que dele participaram/participam.

1 Introdução

A Matemática, desde as civilizações antigas, configura-se como pilar fundamental na formação intelectual e no aprimoramento de habilidades cognitivas. A necessidade humana de quantificar, medir e calcular, presente em diversas culturas, impulsionou o desenvolvimento do conhecimento matemático, influenciando áreas como ciências exatas, artes, filosofia e tecnologia (Boyer, 1974; Eves, 2011).

No ensino superior, os laboratórios de Matemática surgem como resposta à busca por abordagens de aprendizado mais dinâmicas e participativas (Borba; Penteado, 2010). Complementando aulas expositivas e exercícios teóricos, esses laboratórios oferecem um ambiente para experimentação, exploração e aplicação prática de conceitos matemáticos. Tais espaços se consolidam como centros de atividades interativas, onde estudantes colaboram e utilizam diversos materiais, objetos matemáticos e recursos tecnológicos (Lorenzato, 2006).

A influência dos laboratórios de Ensino de Matemática transcende o ambiente acadêmico, alcançando a comunidade por meio de atividades de extensão e parcerias com instituições locais. Essa abertura tende a promover a inclusão e a democratização do conhecimento matemático, fortalecendo a relação entre universidade e sociedade e contribuindo para a formação de cidadãos críticos (Santos e Cunha, 2021).

Diante disso, pautado na metodologia da História Oral, objetivamos em nossa iniciação científica, realizar um exercício historiográfico do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Nessa direção, a partir da análise de documentos disponibilizados tanto no arquivo Morto da UFU quanto por docentes do IME, trabalhos acadêmicos e entrevistas com professores que estiveram vinculados ao LEM em algum momento de sua trajetória na UFU, busca-se produzir uma história possível do LEM.

Com isso, nosso objetivo, neste trabalho, é apresentar parte dos pressupostos teóricos-metodológicos que temos mobilizado para a realização da pesquisa supracitada.

2 Metodologia para um exercício historiográfico em torno do LEM/IME/UFU

O Grupo “História Oral e Educação Matemática” – Ghoem – foi criado no ano de 2002. Em um primeiro momento, intencionava-se reunir pesquisadores da área de Educação Matemática interessados na possibilidade de usar a História Oral como recurso metodológico não só para fins de

pesquisa como também nas práticas de sala de aula.

Desde então, essa configuração foi alterada, ampliando-se, de modo a incorporar discussões sobre outros temas e abordagens teórico-metodológicas. Pode-se dizer, hoje, que o interesse central do grupo é o estudo da cultura escolar e o papel da Educação Matemática nessa cultura. Assim, os temas abordados nas pesquisas e práticas do Ghoem vão desde formação de professores de Matemática, narrativas, História Oral, manuais didáticos, História da Educação Matemática, análise de livros antigos e contemporâneos – didáticos ou não – até conservação de acervos.

Segundo Neves (2006), a historiografia não deve ser vista apenas como uma enumeração de autores e obras históricas ou uma simples descrição do que foi escrito sobre a História. Conforme Lapa (1976, p.17), a historiografia e o próprio exercício historiográfico envolve não apenas o estudo das formas de escrita da história, mas também sua recriação, assumindo toda a responsabilidade que essa tarefa exige. Dessa forma, assumimos que o trabalho historiográfico representa uma revisão crítica do processo de construção do conhecimento histórico, indo além de uma simples releitura dos fatos.

Visto isso, este estudo adota a História Oral (HO) como metodologia, sobretudo, inspirados nas práticas de pesquisa tecidas no interior do Ghoem, que defende que o uso da HO em um exercício historiográfico possa implicar na inauguração de uma “operação com as fontes produzidas a partir da oralidade e, segundo as circunstâncias, incorporar paulatinamente fontes outras que possam apoiar a criação da narrativa historiográfica (Garnica, 2006).

Nessa direção, podemos afirmar que, ao mobilizar e assumir tais pressupostos, na medida em que avançamos na pesquisa, não só produzimos um exercício historiográfico do LEM/IME/UFU como também, intencionalmente, produzimos novas fontes, em especial, a partir das entrevistas que realizamos.

Aqui, cumpre esclarecer que as pesquisas do grupo e os afazeres historiográficos envolvem fontes de diferentes naturezas – narrativas, atas, documentos, trabalhos, registros fotográficos, cartas etc. – e, para o Ghoem, não há hierarquia entre elas, ou seja, elas possuem o mesmo grau de confiabilidade, sendo utilizadas de forma a complementar e, não, como elemento de confronto.

Dessa forma, nossa pesquisa de iniciação segue parte dos protocolos adotados nas pesquisas do Ghoem, ou seja, inicialmente, fez-se o estudo de documentos presentes no LEM/IME/UFU e nos arquivos pessoais de docentes que estiveram envolvidos com o LEM. Na sequência, a partir da identificação de pontos que poderiam ser problematizados, buscou-se outras fontes que pudessem

nos ajudar a contar outros aspectos dessa história. Para isso, visitamos o arquivo morto da UFU e estudamos atas de reuniões e outros documentos que lá estavam e que nos permitiram tecer outras compreensões a respeito do LEM/IME/UFU.

Ainda em busca fontes, estudos como o de Marim (2019), se revelaram importantes, sobretudo, por permitir conhecer potenciais colaboradores. Nesse sentido, destacamos que quatro entrevistas foram realizadas até o início de 2025. Após a realização delas, o processo seguiu com a transcrição – degravação, na íntegra, do arquivo em áudio para o formato texto – e, depois, a textualização, que é o processo de tratamento do arquivo texto, sobretudo em relação às questões linguísticas. Diferentes de entrevistas presenciais, em nosso trabalho, por diferentes circunstâncias, essa prática ocorreu de forma virtual a partir de respostas apresentadas pelos colaboradores em um formulário eletrônico.

Após esses procedimentos realizados e com os dados produzidos, a análise se dará a partir dos documentos e da textualização dessas entrevistas virtuais. Sobre isso, ressaltamos que essa etapa está em andamento e um primeiro exercício historiográfico do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM/IME/UFU) foi elaborado.

3 Considerações finais

A trajetória do LEM/IME/UFU, apesar de sua riqueza e relevância, reflete a contínua necessidade de superar desafios, especialmente no que se refere à ampliação de recursos e ao fortalecimento do suporte institucional. No entanto, seu desenvolvimento ao longo dos anos demonstra como a dedicação de professores e aulas tem sido a principal força motriz para a consolidação de suas ações.

Este estudo se insere como um exercício historiográfico, buscando não apenas registrar a evolução do laboratório, mas também interpretou criticamente os caminhos percorridos e as dinâmicas que moldaram sua identidade. A historiografia sobre o LEM/IME/UFU revela um espaço construído coletivamente, onde as práticas educativas são constantemente ressignificadas diante dos desafios acadêmicos e sociais. Assim, sua história é tecida por aqueles que, com compromisso e colaboração, desenvolvem para transformar esse espaço em um centro de produção e divulgação do conhecimento matemático.

Referências

- [1] Borba, M. C., & Penteado, M. G. (2010). *Informática e novos caminhos do ensino da Matemática*. Autêntica.

- [2] Boyer, C. B. (1974). História da matemática. Edgard Blücher.
- [3] Eves, H. (2011). Introdução à história da matemática. Unicamp.
- [4] Garnica, A. V. M. . História Oral e Educação Matemática: proposta metodológica, exercício de pesquisa e uma possibilidade para compreender a formação de professores de Matemática. In: III Simpósio Internacional de Educação Matemática (SIPEM), 2006, Águas de Lindóia. Anais do SIPEM. Águas de Lindóia/Curitiba : SBEM, 2006.
- [5] Lapa, José Roberto do Amaral. A História em questão: historiografia brasileira. Petrópolis: Vozes, 1976.
- [6] Lorenzato, Sérgio (Org.). O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. Coleção Formação de Professores.
- [7] Lorenzato, S. A. O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.
- [8] Marin, D. Uma história da criação dos primeiros cursos de formação de professores (de Matemática) no Triângulo Mineiro – Minas Gerais. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista ‘Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2019
- [9] Neves, F. M.; Men, L. Na história da educação: investigando o termo historiografia. VII Seminário Nacional de Estudos e Pesquisas: História, Sociedade e Educação no Brasil. Unicamp, 2006. Campinas – SP.
- [10] Santos, J. A. V.; Cunha, D. S. O uso do laboratório no ensino da Matemática: desafios e possibilidades encontradas pelos professores em suas práticas pedagógicas. Revista Educação Pública, v. 21, nº 41, p. 1-9, 2021.



Espaços de Riesz e Reticulados de Banach

Lorena Bezerra de Almeida

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

lore.lo2310@ufu.br

Elisa Regina dos Santos

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

elisars@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Espaços de Riesz.
Norma de Reticulado.
Reticulados de Banach.
Análise Funcional.

O presente trabalho apresenta uma introdução aos espaços de Riesz e reticulados de Banach, estruturas matemáticas que combinam conceitos de Análise Funcional, como espaços de Banach, com propriedades de ordenação. Os espaços de Riesz são espaços vetoriais ordenados que permitem a definição de supremo e ínfimo, enquanto os reticulados de Banach são espaços de Riesz normados e completos. O texto explora definições básicas, propriedades fundamentais e exemplos clássicos, como os espaços $C(K)$ e ℓ_p . Esses conceitos têm aplicações em diversas áreas, como Teoria de Operadores e Análise Harmônica.

1 Introdução

Um reticulado de Banach é uma estrutura matemática que combina dois importantes conceitos da Análise Funcional: espaços de Banach e reticulados. De maneira simplificada, um reticulado de Banach é um espaço de Banach munido com uma ordem parcial compatível com a estrutura algébrica e com a norma. Essa combinação permite investigar não somente propriedades algébricas e topológicas dos espaços, mas também propriedades de ordenação que surgem da estrutura de reticulado.

Os reticulados de Banach tem um papel importante em diversas áreas da Matemática, em particular, na Teoria de Operadores, na Análise Harmônica, na Otimização e nas Equações Diferenciais. Segundo [3], esse conceito foi introduzido por volta de 1930 por F. Riesz inspirado pela ordem usual da reta. Após seu surgimento, foi verificado que muitos dos espaços clássicos da Análise Funcional são reticulados de Banach, ou seja, podem ser munidos de uma ordem compatível com a norma. Desde a década de 60, a Teoria de Reticulados de Banach tem se desenvolvido de forma acelerada, sendo amplamente estudada ao longo dos últimos anos.

2 Conceitos Preliminares

Antes de introduzirmos espaços de Riesz e reticulados de Banach, é importante relembrar alguns conceitos de ordem e reticulados. Nesta seção, apresentamos algumas definições básicas, como conjuntos ordenados, supremo e ínfimo, que servirão de base para os próximos tópicos.

Definição 2.1. Um conjunto não vazio M com uma relação \leq é um **conjunto ordenado** se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (a) $x \leq x$ para todo $x \in M$ (Reflexiva);
- (b) $x \leq y$ e $y \leq x \implies x = y$ (Antissimétrica);
- (c) $x \leq y$ e $y \leq z \implies x \leq z$ (Transitiva).

Se, além disso, para quaisquer dois elementos $x, y \in M$ tivermos que $x \leq y$ ou $y \leq x$, então M é dito **totalmente ordenado**.

Definição 2.2. Sejam M um conjunto ordenado e $A \subseteq M$.

- (a) Uma **cota superior** de A , se existir, é um elemento $x \in M$ tal que $y \leq x$ para todo $y \in A$.
- (b) Uma **cota inferior** de A , se existir, é um elemento $z \in M$ tal que $z \leq y$ para todo $y \in A$.
- (c) Se A tem cota superior, dizemos que A é **limitado superiormente**.
- (d) Se A tem cota inferior, dizemos que A é **limitado inferiormente**.
- (e) Se A tem cota superior e cota inferior, dizemos que A é **ordem-limitado**.
- (f) Se A é limitado superiormente e tem uma menor cota superior, tal elemento é chamado de **supremo** de A e denotado por $\sup A$.

(g) Se A é limitado inferiormente e tem uma maior cota inferior, tal elemento é chamado de **ínfimo** de A e denotado por $\inf A$.

Definição 2.3. Um conjunto ordenado (M, \leq) é chamado **reticulado** se, para quaisquer dois elementos $x, y \in M$, existem $\sup(x, y)$ e $\inf(x, y)$ em M . Denotaremos da seguinte forma: $x \vee y = \sup(x, y)$ e $x \wedge y = \inf(x, y)$.

Dado um subconjunto A de um conjunto ordenado M , é claro que se $\sup A$ existe, então A é limitado superiormente. No entanto, a recíproca não é verdadeira, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.4. Seja X um conjunto não vazio.

(1) Considere $M = \mathcal{P}(X)$ ordenado com a inclusão, ou seja, dados $A, B \in M$, temos que

$$A \leq B \iff A \subseteq B.$$

Note que M é um reticulado e X é o maior elemento de M . De fato, dados $A, B \in M$, é fácil ver que $A \vee B = A \cup B \in M$, $A \wedge B = A \cap B \in M$ e $A \leq X$ para todo A em M .

(2) Suponha que X seja infinito e seja

$$N = \{A \subseteq X : A \text{ é finito ou } A^c \text{ é finito}\}.$$

Observe que N é um subconjunto de M ordenado com a inclusão. Mais ainda, N é um reticulado. Com efeito, assim como no exemplo anterior, dados $A, B \in N$, temos que $A \vee B = A \cup B \in N$ e $A \wedge B = A \cap B \in N$. Agora, considere $Y \subseteq X$ tal que $Y \notin N$. Vejamos que $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in Y\} \subseteq N$ é limitado superiormente mas não tem supremo nesse conjunto.

De fato, note que $X \in N$, pois $X^c = \emptyset$ é finito. Além disso, $\{x\} \leq X$ para todo $\{x\} \in \mathcal{B}$, ou seja, X é cota superior de \mathcal{B} . Logo, \mathcal{B} é limitado superiormente. Agora, veremos que \mathcal{B} não tem supremo em N . Suponha que exista $C \in N$ tal que C é a menor cota superior de \mathcal{B} em N . Como C é uma cota superior de \mathcal{B} , temos

$$\{x\} \leq C, \forall x \in Y \implies \{x\} \subseteq C, \forall x \in Y \implies Y \subseteq C.$$

Por outro lado, já que C é a menor cota superior de \mathcal{B} , dado $c \in C$, segue que $C - \{c\}$ não é cota superior de \mathcal{B} . Então, existe $\{b\} \in \mathcal{B}$ tal que $\{b\} \not\subseteq C - \{c\}$. Disso, resulta que $b \in Y \subseteq C$ e $b \in \{c\}$. Daí, $c = b \in Y$. Assim, $C \subseteq Y$. Portanto, $C = Y \notin N$, o que é uma contradição. Dessa forma, \mathcal{B} não tem supremo em N .

3 Espaços de Riesz

Os espaços de Riesz são espaços vetoriais ordenados nos quais podemos definir supremo e ínfimo de dois elementos. Essa estrutura permite estudar propriedades importantes da ordem em um contexto algébrico. Nesta seção, exploramos sua definição, algumas propriedades fundamentais e exemplos.

Definição 3.1. Um espaço vetorial real E que também é um conjunto ordenado é chamado **espaço vetorial ordenado** se, para todos $x, y \in E$ tais que $x \leq y$, temos que $x + z \leq y + z$ e $ax \leq ay$ para

todos $z \in E$ e $a \geq 0$. Se, além disso, (E, \leq) for um reticulado, então E é chamado **espaço de Riesz** (ou **reticulado vetorial**).

Definição 3.2. Seja E um espaço de Riesz. O **cone positivo** de E é o conjunto

$$E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}.$$

Definição 3.3. Sejam E um espaço de Riesz e $x, y \in E$. Definimos por

$$x^+ = x \vee 0, \quad x^- = (-x) \vee 0 \quad \text{e} \quad |x| = x \vee (-x)$$

as partes **positiva**, **negativa** e o **valor absoluto** de x , respectivamente.

Exemplo 3.4. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{B}(X)$ o conjunto das funções limitadas definidas em X a valores reais. É claro que $\mathcal{B}(X)$ é um espaço vetorial. Dados $f, g \in \mathcal{B}(X)$, defina a seguinte relação de ordem:

$$g \leq f \iff g(x) \leq f(x), \forall x \in X.$$

Assim, $\mathcal{B}(X)$ é um espaço vetorial ordenado com a relação de ordem definida acima.

Vejam que $\mathcal{B}(X)$ é um reticulado. Dados $f, g \in \mathcal{B}(X)$, existem $M, K > 0$ tais que $|f(x)| \leq M$ e $|g(x)| \leq K$ para todo $x \in X$. Observe que $f \vee g, f \wedge g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{e} \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Tomando $N = \max(M, K) > 0$, temos que $|f(x)| \leq N$ e $|g(x)| \leq N$ para todo $x \in X$. Daí,

$$|(f \vee g)(x)| = |\max\{f(x), g(x)\}| \leq N \quad \text{e} \quad |(f \wedge g)(x)| = |\min\{f(x), g(x)\}| \leq N,$$

para todo $x \in X$, ou seja, $f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{B}(X)$. Daí, $\mathcal{B}(X)$ é um reticulado e, portanto, é um espaço de Riesz. Além disso,

$$\mathcal{B}(X)_+ = \{f \in \mathcal{B}(X) : f \geq 0\} = \{f \in \mathcal{B}(X) : f(x) \geq 0, \forall x \in X\}.$$

Proposição 3.5. Sejam E um espaço de Riesz e $x, y \in E$. São válidas as afirmações:

(a) Se $x \geq 0$ então $|x| = x$, e se $x \leq 0$ então $|x| = -x$.

(b) $x^+, x^- \geq 0$.

Demonstração. (a) De fato,

$$x \geq 0 \implies -x \leq 0 \leq x \implies |x| = x \vee (-x) = x$$

e

$$x \leq 0 \implies x \leq 0 \leq -x \implies |x| = x \vee (-x) = -x.$$

(b) Observe que

$$x^+ = x \vee 0 = \sup(x, 0) \geq 0 \quad \text{e} \quad x^- = (-x) \vee 0 = \sup(-x, 0) \geq 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.6. Seja E um espaço de Riesz. Para todos $x, y, z \in E$ e $a \in \mathbb{R}$, temos que:

(a) $x = x^+ - x^-$.

(b) $(\alpha x) \vee (\alpha y) = \alpha(x \vee y)$ e $(\alpha x) \wedge (\alpha y) = \alpha(x \wedge y)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \geq 0$.

(c) $|x| = x^+ + x^-$, $|ax| = |a| \cdot |x|$ e $|x + y| \leq |x| + |y|$.

- (d) $x \leq y$ se, e somente se, $x^+ \leq y^+$ e $y^- \leq x^-$.
- (e) $(x + y) \wedge z \leq (x \wedge z) + (y \wedge z)$ para todos $x, y, z \in E_+$.
- (f) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ e $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.
- (g) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$ e $|x - y| = |x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z|$.

Demonstração. Veja [2], Teorema 1.1.1. ■

Proposição 3.7. Um espaço vetorial ordenado E é um espaço de Riesz se $E = E_+ - E_+ = \{a - b : a, b \in E_+\}$ e $x \vee y$ existe para todos $x, y \in E_+$.

Demonstração. Vejamos que, para quaisquer $a, b, c, d \in E_+$, vale que

$$(a - b) \vee (c - d) = (a + d) \vee (b + c) - (b + d), \quad (1)$$

$$(a - b) \wedge (c - d) = (a + c) - (a + d) \vee (b + c). \quad (2)$$

De fato, como $a, b, c, d \in E_+$, sabemos que $a + d, b + c \in E_+$. Então, $(a + d) \vee (b + c) \in E$. Note que

$$a + d \leq (a + d) \vee (b + c) \quad \text{e} \quad b + c \leq (a + d) \vee (b + c)$$

implica

$$a - b = a + d - (b + d) \leq (a + d) \vee (b + c) - (b + d),$$

$$c - d = b + c - (b + d) \leq (a + d) \vee (b + c) - (b + d),$$

ou seja, $(a + d) \vee (b + c) - (b + d)$ é cota superior de $\{a - b, c - d\}$. Seja z uma cota superior de $\{a - b, c - d\}$. Temos que

$$a - b \leq z \implies a + d \leq z + b + d \quad \text{e} \quad c - d \leq z \implies b + c \leq z + b + d.$$

Daí, $z + b + d$ é cota superior de $\{a + d, b + c\}$. Assim,

$$(a + d) \vee (b + c) \leq z + b + d,$$

isto é,

$$(a + d) \vee (b + c) - (b + d) \leq z.$$

Portanto,

$$(a - b) \vee (c - d) = (a + d) \vee (b + c) - (b + d).$$

A igualdade (2) é análoga.

Agora, dados $x, y \in E$, como $E = E_+ - E_+$, existem $a, b, c, d \in E_+$ de modo que $x = a - b$ e $y = c - d$. De (1) e (2), segue que

$$x \vee y = (a - b) \vee (c - d) = (a + d) \vee (b + c) - (b + d) \in E,$$

$$x \wedge y = (a - b) \wedge (c - d) = (a + c) - (a + d) \vee (b + c) \in E. \quad \text{■}$$

4 Reticulados de Banach

Quando um espaço de Riesz é munido de uma norma compatível e completo em relação a ela, obtemos um reticulado de Banach. Esse conceito une propriedades da ordem e da norma, ampliando

suas aplicações. Nesta seção, formalizamos essa noção e discutimos exemplos relevantes.

Suporemos que o leitor esteja familiarizado com o conceito de espaço de Banach bem como com alguns dos espaços clássicos da Análise Funcional como $C(K)$, ℓ_p e c_0 . Sugerimos [1] para mais detalhes.

Definição 4.1. *Seja E um espaço de Riesz. Uma norma $\|\cdot\|$ em E satisfazendo*

$$|x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|$$

*é chamada uma **norma de reticulado**. Chamamos $(E, \|\cdot\|)$ de **espaço de Riesz normado**. Um espaço de Riesz normado que é completo com respeito à sua norma é chamado **reticulado de Banach**.*

Proposição 4.2. *Seja E um espaço de Riesz normado. Então, $\| |x| \| = \|x\|$ e*

$$|x| \leq |y| + |z| \implies \|x\| \leq \|y\| + \|z\|,$$

para todos $x, y, z \in E$.

Demonstração. Seja $x \in E$. É claro que $|(|x|)| = |x|$, pois $|x| \geq 0$. Como E é espaço de Riesz normado, $|(|x|)| \leq |x|$ implica que $\| |x| \| \leq \|x\|$. Por outro lado, $|x| \leq |(|x|)|$ implica que $\|x\| \leq \| |x| \|$. Logo, $\|x\| = \| |x| \|$.

Além disso, dados $x, y, z \in E$, temos que

$$|x| \leq |y| + |z| = \|y\| + \|z\| \implies \|x\| \leq \| |y| + |z| \| \leq \| |y| \| + \| |z| \| = \|y\| + \|z\|. \quad \blacksquare$$

Exemplo 4.3. (1) *Considere K um espaço de Hausdorff compacto. É fácil ver que $\mathcal{C}(K)$ é um espaço vetorial ordenado com a ordem pontual, ou seja, a mesma ordem do Exemplo 3.4. Dada $f \in \mathcal{C}(K)$, como K é compacto, f é limitada. Logo, $\sup\{|f(x)| : x \in K\}$ existe. Assim, $\mathcal{C}(K)$ é um espaço normado com a norma do supremo. Para $f, g \in \mathcal{C}(K)$, vimos no Exemplo 3.4 que, em $\mathcal{B}(K)$, $f \vee g, f \wedge g : K \longrightarrow \mathbb{R}$ são dadas por*

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad e \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Note que

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

e

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

Como f, g e $|\cdot|$ são contínuas, então $f \vee g$ e $f \wedge g$ são contínuas. Daí, $f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{C}(K)$. Logo, $\mathcal{C}(K)$ é reticulado.

Observe que

$$|f|(x) = (f \vee (-f))(x) = |f(x)| \quad e \quad |g|(x) = (g \vee (-g))(x) = |g(x)|.$$

Desse modo,

$$|f| \leq |g| \implies |f(x)| \leq |g(x)|, \forall x \in K \implies \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| \leq \sup_{x \in K} |g(x)| = \|g\|_\infty.$$

Logo, $\mathcal{C}(K)$ é espaço de Riesz normado.

Da Análise Funcional, sabemos que $\mathcal{C}(K)$ é Banach. Portanto, $\mathcal{C}(K)$ é um reticulado de Banach.

(2) Os espaços ℓ_p com $1 \leq p \leq \infty$ são reticulados de Banach com a ordem pontual, ou seja, dados $(a_j)_{j=1}^\infty, (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$

$$(a_j)_{j=1}^\infty \leq (b_j)_{j=1}^\infty \iff a_j \leq b_j, \forall j \in \mathbb{N}.$$

É claro que ℓ_p é um espaço vetorial ordenado. Mostremos que ℓ_p é um reticulado. Dados $(a_j)_{j=1}^\infty, (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$, temos que $(a_j)_{j=1}^\infty \vee (b_j)_{j=1}^\infty = (a_j \vee b_j)_{j=1}^\infty$ e $(a_j)_{j=1}^\infty \wedge (b_j)_{j=1}^\infty = (a_j \wedge b_j)_{j=1}^\infty$, onde $a_j \vee b_j$ e $a_j \wedge b_j$ denotam o máximo e o mínimo entre a_j e b_j em \mathbb{R} , respectivamente. Vejamos que $(a_j)_{j=1}^\infty \vee (b_j)_{j=1}^\infty, (a_j)_{j=1}^\infty \wedge (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$. Façamos primeiro o caso $1 \leq p < \infty$. Note que

$$|a_j \vee b_j| = |\max\{a_j, b_j\}| \leq |a_j| + |b_j| = ||a_j| + |b_j||, \quad (3)$$

isto é,

$$|a_j \vee b_j|^p \leq (|a_j| + |b_j|)^p$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\sum_{j=1}^n |a_j \vee b_j|^p \leq \sum_{j=1}^n (|a_j| + |b_j|)^p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Disso e da Desigualdade de Minkowski, segue que

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j \vee b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n (|a_j| + |b_j|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^\infty |a_j \vee b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^\infty |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Então,

$$\sum_{j=1}^\infty |a_j \vee b_j|^p < \infty.$$

Logo, $(a_j \vee b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$. Analogamente, $(a_j \wedge b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$. Portanto, ℓ_p é um reticulado. Desse modo, ℓ_p é um espaço de Riesz.

Além disso, já sabemos que ℓ_p é Banach com a norma $\|\cdot\|_p$. Basta mostrar então que

$$|(a_j)_{j=1}^\infty| \leq |(b_j)_{j=1}^\infty| \implies \|(a_j)_{j=1}^\infty\|_p \leq \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$$

para todos $(a_j)_{j=1}^\infty, (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$. Observe que

$$\begin{aligned} |(a_j)_{j=1}^\infty| \leq |(b_j)_{j=1}^\infty| &\implies (a_j)_{j=1}^\infty \vee (-a_j)_{j=1}^\infty \leq (b_j)_{j=1}^\infty \vee (-b_j)_{j=1}^\infty \\ &\implies (a_j \vee -a_j)_{j=1}^\infty \leq (b_j \vee -b_j)_{j=1}^\infty \\ &\implies a_j \vee (-a_j) \leq b_j \vee (-b_j), \forall j \in \mathbb{N} \\ &\implies |a_j| \leq |b_j|, \forall j \in \mathbb{N} \\ &\implies \sum_{j=1}^\infty |a_j|^p \leq \sum_{j=1}^\infty |b_j|^p \\ &\implies \|(a_j)_{j=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p. \end{aligned}$$

Portanto, ℓ_p é um reticulado de Banach.

Agora, façamos o caso $p = \infty$. De (3), temos que

$$|a_j \vee b_j| \leq |a_j| + |b_j| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| + \sup_{j \in \mathbb{N}} |b_j|$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $\{|a_j \vee b_j| : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ é limitado superiormente, existe $\sup\{|a_j \vee b_j| : j \in \mathbb{N}\}$. Assim, $(a_j \vee b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$. Analogamente, $(a_j \wedge b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$. Dessa forma, ℓ_∞ é um reticulado, logo é um espaço de Riesz.

Veja que

$$\begin{aligned} |(a_j)_{j=1}^\infty| \leq |(b_j)_{j=1}^\infty| &\implies |a_j| \leq |b_j|, \forall j \in \mathbb{N} \\ &\implies \|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |b_j| = \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_\infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Portanto, ℓ_∞ é reticulado de Banach.

(3) c_0 é reticulado de Banach. É fácil ver que c_0 é um espaço vetorial ordenado com a ordem do item anterior. Dados $(a_j)_{j=1}^\infty, (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$, temos que $(a_j)_{j=1}^\infty \vee (b_j)_{j=1}^\infty = (a_j \vee b_j)_{j=1}^\infty$ e $(a_j)_{j=1}^\infty \wedge (b_j)_{j=1}^\infty = (a_j \wedge b_j)_{j=1}^\infty$. Usando (3), vemos que $a_j \vee b_j \rightarrow 0$ e $a_j \wedge b_j \rightarrow 0$, ou seja, $(a_j \vee b_j)_{j=1}^\infty, (a_j \wedge b_j)_{j=1}^\infty \in c_0$. Logo, c_0 é reticulado. Da Análise Funcional, sabemos que c_0 é Banach e por (4), concluímos que c_0 é reticulado de Banach.

Os reticulados de Banach desempenham um papel central na Análise Funcional, pois combinam de forma natural as estruturas algébrica, topológica e de ordem. Essa interação permite uma abordagem mais ampla para problemas matemáticos, especialmente na Teoria de Operadores e em espaços de funções. A relevância dessa teoria é reforçada pelo fato de que muitos espaços clássicos da Análise Funcional são reticulados de Banach. Espaços como $\mathcal{C}(K)$, ℓ_p ($1 \leq p \leq \infty$) e c_0 , com a ordem pontual, satisfazem as condições dessa estrutura, o que evidencia sua presença em contextos fundamentais.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

Referências

- [1] BOTELHO, G; PELLEGRINO, D; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [2] MEYER-NIEBERG, P. **Banach Lattices**. Berlim: Springer-Verlag, 1991.
- [3] PIETSCH, A. **History of Banach spaces and linear operators**. 1. ed. Boston: Springer Science & Business Media, 2007.



Euclides de Alexandria: uma breve exposição de suas Obras no cenário da História da Matemática

Bianca Sacoman de Moura

IME, Instituto de Matemática e Estatística/Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

bianca.moura@ufu.br

Hernán Roberto Montúfar López

IME, Instituto de Matemática e Estatística/Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

montufar@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Euclides de Alexandria.
Os Elementos.
História da Matemática.

Este trabalho apresenta um breve resumo do capítulo 5 do livro de Carl B. Boyer, História da Matemática, sobre Euclides de Alexandria, desenvolvido no contexto da disciplina de História da Matemática. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica, baseando-se na análise da obra de Boyer e em outras fontes relacionadas ao tema. O objetivo deste trabalho está voltado para uma breve exposição da trajetória de Euclides e de suas principais obras, com enfoque em Os Elementos, com o intuito de contribuir para a disseminação do conhecimento sobre a história da matemática e em como os conceitos matemáticos evoluíram ao longo do tempo.

1 Introdução

“Em todos os momentos da história e em todas as civilizações as ideias matemáticas estão presentes, em todas as formas de fazer e de saber.” (D’AMBRÓSIO, 1999, p. 97)

Euclides de Alexandria é reconhecido como um dos mais influentes matemáticos da história. Sua obra *Os Elementos* serviu como base para o desenvolvimento da geometria e da matemática ocidental por séculos. No capítulo 5 do livro *História da Matemática*, Carl B. Boyer destaca as contribuições teóricas de Euclides e o seu papel na sistematização do conhecimento matemático da sua época.

Este trabalho tem como objetivo apresentar um breve resumo desse capítulo, explorando a trajetória de Euclides e suas principais obras, com ênfase em *Os Elementos*, desenvolvido no contexto da disciplina de História da Matemática por meio da metodologia bibliográfica fundamentada na análise da obra de Boyer e em outras fontes relacionadas ao tema, com o intuito de contribuir para a disseminação do conhecimento sobre a história da matemática e em como os conceitos matemáticos evoluíram ao longo do tempo.

2 Euclides de Alexandria

Euclides de Alexandria foi um dos grandes sábios que chegaram às instituições financiadas pelos Ptolomeus, a Universidade (Museon) e a Biblioteca (BOYER, 2012 p. 88) de Alexandria. Apesar de ser o autor de um dos textos de matemática mais influentes da história, – *Os Elementos*, não há registros do local de seu nascimento, apenas que viveu e morreu durante o reinado de Ptolomeu I (Entre 323 a.C a 283 a.C). Alguns autores acreditam que Euclides estudou com os discípulos de Platão, na Academia de Platão (BOYER, 2012, p. 88)

Euclides é reconhecido como um dos matemáticos mais influentes da história, e considerado o *pai da geometria*. Suas obras contribuíram fortemente em grandes áreas da matemática, como na geometria – formalizando muitos conceitos geométricos, na teoria dos números – provando que há infinitos números primos, e no estabelecimento do método axiomático – onde todas as proposições são derivadas logicamente a partir de um conjunto de axiomas e postulados.

Das obras de Euclides, muitas se perderam, no entanto, cinco obras sobreviveram até hoje: *Os Elementos*, *Os Dados*, *Divisão de figuras*, *Os Fenômenos* e *Óptica*.

3 Obras Perdidas

Das obras perdidas de Euclides, consideradas parte dos seus escritos mais importantes, se encontra um tratado sobre cônicas em quatro volumes e um trabalho sobre Lugares Geométricos Sólidos, de Aristeu, que mais à frente foi superado pelo trabalho de Apolônio (BOYER, 2012, p. 88).

Boyer relata que, ainda entre as obras perdidas, encontra-se uma sobre *Lugares geométricos de superfície*, outra sobre *Pseudaria* e por último sobre *Porismas*, no entanto, não há referências do que estas obras relatam, somente que a perda dos *Porismas* deixam questionamentos sobre seu real significado, “se um *porisma* é algo intermediário entre um teorema e entre um problema ou se é uma proposição em que se determina uma relação entre quantidades conhecidas e variáveis ou indeterminadas, considerada esta última como a melhor aproximação da ideia de função da antiguidade” (BOYER, 2012, p.88).

Posto isto, percebe-se tamanha a influência exercida por Euclides durante a história e entre os grandes sábios matemáticos. Conclui-se que tais obras, se preservadas, poderiam ter contribuído de diversas formas na matemática que é conhecida nos dias de hoje.

4 Obras Preservadas

Das obras preservadas de Euclides, estão: *Os elementos*, *Os dados*, *Divisão de figuras*, *O fenômenos* e *Óptica*.

Óptica de Euclides é um dos primeiros escritos sobre óptica geométrica. Esta obra propõe uma teoria da “emissão” para explicar a visão, na qual o olho emite raios que se propagam em linha reta até o objeto. Essa teoria difere da adotada por Aristóteles, que diz que algo parte do objeto e caminha para o olho por um meio. O objetivo dessa obra era explorar a geometria da visão, explicando como a aparência dos objetos muda conforme a perspectiva, abordando a redução aparente das dimensões dos objetos devido à distância, contribuindo para o entendimento geométrico da percepção visual.

A *Divisão de figuras* de Euclides é uma obra que sobreviveu por conta de uma tradução árabe que existia antes mesmo do desaparecimento da versão original grega (BOYER, 2012, p.88), contém uma coleção de proposições sobre divisão de figuras planas, um exemplo é a Proposição 1, que pede a construção de uma reta que seja paralela à base de um triângulo que divida o triângulo em duas áreas iguais.

A obra *Os dados* é semelhante a anterior citada, presume-se que foi escrita para uso na

Universidade de Alexandria, e serviu de complemento para os primeiros volumes de *Os elementos*. A obra é composta por enunciados que exploram as implicações das condições e grandezas dadas em problemas matemáticos, como por exemplo os dois primeiros enunciados:

1. Se duas grandezas ***a*** e ***b*** são dadas, sua razão $\frac{a}{b}$ está determinada.
2. Se uma grandeza é dada, juntamente com sua razão para uma segunda grandeza, a segunda grandeza também está determinada.

Por fim, nesta obra encontramos conteúdos e enunciados relacionados a grandezas e medidas, proposições geométricas, equivalências de problemas geométricos em equações quadráticas, sistema de equações, como também conteúdos sobre círculos. Boyer demonstra o seguinte exemplo de enunciado citado na obra *Os dados* considerado equivalente geométrico da resolução de equações quadráticas, com a álgebra moderna:

3. Se uma área (retangular) dada ***AB*** é colocada sobre um segmento ***AC*** de comprimento dado (fig. 1) e se a área ***BC*** que falta à área ***AB*** para completar todo o retângulo ***AD*** é dada, então as dimensões de ***BC*** são conhecidas.

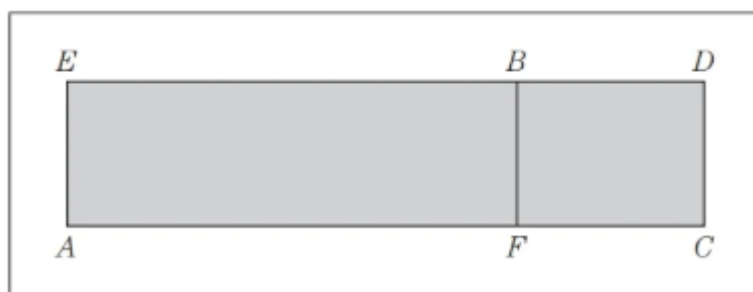


Figura 1: Enunciado contido na obra *Os dados*

Demonstração:

Sejam ***a*** o comprimento de ***AC***, ***b***² a área de ***AB*** e ***c : d*** a razão de ***FC*** para ***CD***.

Então, se ***FC = x*** e ***CD = y***, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{d} \text{ e } (a - x)y = b^2, \text{ logo } y = \frac{dx}{c}$$

e eliminando ***y***, na segunda equação, temos:

$(a - x)dx = b^2c$ e $dx^2 - adx + b^2c = 0$, onde

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2\left(\frac{c}{d}\right)} \text{ e } y = \frac{d}{c} \left(\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2\left(\frac{c}{d}\right)} \right)$$

A solução geométrica dada por Euclides é equivalente a isto, exceto pelo fato de ser usado o sinal negativo antes do radical.

Um fato curioso do livro de Boyer, é que ele não se aprofunda na obra *Os Fenômenos*. Encontra-se apenas citações.

5 Os Elementos

A obra *Os elementos* era um livro didático, dentre outros que existiram antes dela, inclusive o de Hipócrates de Chios, citado por Boyer, no entanto, foi o único livro didático a sobreviver. A obra trata-se de um texto introdutório que reúne toda a matemática *elementar* – aritmética, geometria sintética e álgebra. Boyer comenta que se *Os elementos* se limita a exposição em ordem lógica dos assuntos básicos da matemática elementar, e não em ser uma fonte completa de informação, caso contrário o autor incluiria referências a outros autores, informações sobre pesquisas recentes e explicações informais. Posteriormente, outros escritores incluíram na obra notas explicativas, e foram consideradas como parte do texto original. Acredita-se que a ordenação dos textos de *Os elementos* seja de fato de Euclides, como também algumas demonstrações, no entanto, Boyer afirma ser difícil saber o grau de originalidade dessa obra considerada a mais renomada na história da Matemática. (BOYER, 2012, p. 89)

A obra *Os elementos* é dividida em treze livros, sendo os seis primeiros sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o décimo sobre incomensuráveis e os três últimos sobre geometria no espaço.

O primeiro livro é composto por uma lista com vinte e três definições e por um conjunto de cinco noções comuns (axiomas) e cinco postulados. Boyer argumenta em seu livro que algumas definições de Euclides não cumprem o papel de definir, pois não se baseiam em conceitos que já são previamente estabelecidos e compreendidos. Como por exemplo: “Um ponto é o que não tem parte” e “Uma reta é comprimento sem largura”.

Após as definições, Euclides enuncia os postulados e as noções comuns. Boyer comenta que

não se sabe se Euclides fazia distinção entre os dois, no entanto, Aristóteles considera que as noções comuns devem ser convincentes por si mesmos e os postulados não, pois dizem respeito somente ao que está sendo discutido (BOYER, 2012 p.90).

O segundo livro contém apenas quatorze proposições. Uma das proposições é chamada por Boyer de “enunciado geométrico de uma das leis fundamentais da aritmética”, conhecida como propriedade distributiva. Boyer comenta que este livro sobre álgebra geométrica é comparado com a atual álgebra simbólica, e que mesmo não sendo um instrumento ideal era eficaz para sua época e visual para os estudantes de Alexandria.

Os livros III e IV tratam da geometria do círculo e presume-se que muito do que o contém vem de Hipócrates de Chios, e muitos dos teoremas presentes não diferem muita coisa do que é encontrado nos textos atuais. O livro IV trata de figuras inscritas e circunscritas em um círculo.

O quinto livro de Euclides fala sobre a teoria da proporção. Boyer diz que Euclides adiou o quanto conseguiu para falar sobre este assunto, este que era evitado pelos matemáticos gregos. O livro V aborda tópicos fundamentais para toda a matemática. O livro inicia com proposições que equivalem à propriedade distributiva à esquerda e à direita da multiplicação em relação à adição, a propriedade distributiva à esquerda em relação à subtração, assim como a propriedade associativa da multiplicação. É visto no livro regras para “maior que” e “menor que” e as propriedades das proporções.

Já no livro VI, Euclides demonstrou teoremas relativos a razões e proporções que aparecem em triângulos (BOYER, 2012 p.95). Neste livro, Euclides generalizou o teorema de Pitágoras: “em triângulos retângulos, a figura sobre o lado que subentende o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre os lados que contêm o ângulo reto”.

Os livros VII, VIII e IX são dedicados à teoria dos números. A palavra “número” para os gregos sempre se referia ao que chamamos números naturais — os inteiros positivos. (BOYER, 2012 p.95). O livro VII lista algumas definições distinguindo vários tipos de números, os ímpares, pares, primos, compostos, planos e sólidos (os que são produtos de dois ou três inteiros) e define, também, o número perfeito como “aquele que é igual às suas partes”. Os teoremas encontrados nesses livros são os estudados pelos universitários na disciplina de Teoria dos Números.

Antes da chegada da álgebra moderna, o livro X era o mais admirado e o mais temido (BOYER,

2012 p.96). Neste livro Euclides escreve sobre a incomensurabilidade, trata-se da classificação de segmentos das formas $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ e $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, onde a e b , quando da mesma dimensão, são comensuráveis.

Os últimos três livros exploram a geometria no espaço. O livro XI trata-se da geometria em três dimensões, e Euclides define sólido nesta obra como “aquilo que tem comprimento, largura e espessura”. Já o livro XII aborda medidas de figuras usando o método da exaustão. O último livro é dedicado às propriedades dos cinco sólidos regulares.

Os livros XIV e XV são considerados apócrifos, não tendo sido escritos por ele. O livro XIV, que explora a comparação de sólidos regulares inscritos em uma esfera, possivelmente foi elaborado por Hipsicles, com base em um tratado perdido de Apolônio. Hipsicles também é conhecido por sua obra astronômica *De ascensionibus*, que adapta técnicas babilônicas para cálculos de elevação dos signos do zodíaco e pode ter influenciado a divisão da eclíptica em 360 graus. Já o livro XV, de menor qualidade, acredita-se que foi escrito por um aluno de Isidoro de Mileto, arquiteto da catedral de Santa Sofia em Constantinopla. Esse livro aborda sólidos regulares, descrevendo como inscrevê-los uns nos outros e contando arestas e ângulos, mas não chegou a formular a relação poliédrica, que seria descoberta posteriormente por Descartes e Euler.

“Os elementos de Euclides foi composto em 300 a.C. aproximadamente e foi copiado e recopiado repetidamente depois. Erros e variações se inseriram, e alguns editores posteriores, notadamente Teon de Alexandria no fim do quarto século, tentaram melhorar o original. Diversas cópias de Os elementos chegaram até nós também em traduções árabes, mais tarde vertidas para o latim, principalmente no século doze, e finalmente, no século dezesseis, em vernáculo. O estudo da transmissão destas variações continua a representar um desafio.” (BOYER, 2012 p.98).

6 Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo a exposição da trajetória de Euclides e de suas principais obras, com ênfase em *Os elementos* por meio da análise do capítulo 5 do livro *História da Matemática*, de Carl B. Boyer, desenvolvido no contexto da disciplina de História da Matemática.

A principal contribuição deste trabalho foi a investigação sobre o surgimento dos conteúdos matemáticos escritos por Euclides, trazendo destaque à relevância histórica de suas obras para o desenvolvimento da matemática. Ao contextualizar os elementos históricos que influenciaram a

produção de Euclides, este estudo demonstra como a compreensão do passado enriquece a interpretação e o ensino da matemática contemporânea. Além disso, evidenciou-se que a abordagem histórica não apenas esclarece as origens dos conceitos matemáticos, mas também proporciona uma visão mais profunda e conectada da disciplina, reforçando sua importância como ferramenta educativa e cultural.

Referências

- [1] BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Editora Blucher, 2012. *E-book*. p. 88-98.
- [2] D'AMBRÓSIO, U. A Pesquisa em história da Matemática e suas relações com a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A.(org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97 documentação: publicação periódica técnica e/ou científica: apresentação. Rio de Janeiro, 2015.



Funções aritméticas: Uma relação entre a função totiente de Euler $\varphi(n)$ e a função de Möbius $\mu(n)$

Joangelo Marins Alves

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brasil
joangelo@ufu.br

Josimar Joao Ramirez Aguirre

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brasil
josimar.mat@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Funções Aritméticas
Totiente de Euler
Função de Möbius

Este artigo explora a relação entre a função totiente de Euler $\varphi(n)$ e a função de Möbius $\mu(n)$, duas importantes funções aritméticas. A função totiente de Euler conta os números inteiros positivos menores ou iguais a n que são coprimos com n , enquanto a função de Möbius fornece informações sobre a fatoração de n em primos. Através da identidade de inversão de Möbius, mostramos que $\varphi(n)$ pode ser expressa como uma soma ponderada de $\mu(d)$ para os divisores de n . Esta relação tem implicações significativas em teorias como a distribuição dos números primos e contribui para o estudo de funções aritméticas em geral.

1 Introdução

As funções aritméticas desempenham um papel crucial na teoria dos números, pois fornecem ferramentas para investigar as propriedades dos números inteiros. Entre as mais importantes estão a função totiente de Euler, $\varphi(n)$, e a função de Möbius, $\mu(n)$, que têm diversas aplicações, especialmente no contexto da fatoração de números inteiros e na distribuição de números primos. Embora essas funções sejam estudadas separadamente, suas interações e propriedades combinadas têm gerado interesse significativo. O objetivo deste trabalho é explorar a relação entre $\varphi(n)$ e $\mu(n)$, investigando como elas se conectam no comportamento multiplicativo dos inteiros e analisando suas implicações na teoria algébrica e analítica dos números. Essa abordagem não apenas amplia o entendimento dessas funções, mas também oferece novas perspectivas para problemas clássicos da aritmética.

2 Funções Aritméticas

Funções aritméticas são funções definidas nos números inteiros positivos que retornam valores complexos e são amplamente utilizadas para estudar divisores e propriedades numéricas. A função divisor, função somatória de divisores, função divisor de Dirichlet, função totiente de Euler e a função de Möbius são alguns exemplos conhecidos.

2.1 Função Totiente de Euler $\varphi(n)$

Função Totiente de Euler $\varphi(n)$: A função totiente de Euler, denotada por $\varphi(n)$, conta os inteiros positivos até n que são coprimos com n . Se $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, então:

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Sua demonstração se encontra no Teorema 2.4 do capítulo 2 de [1]

2.2 Função de Möbius e Números Quadrado-Livres

A função de Möbius, denotada por $\mu(n)$, é uma função importante na Teoria dos Números e ajuda a analisar divisores e inversões em somas. A função $\mu(n)$ de Möbius é definida da seguinte forma:

Para qualquer n :

- $\mu(n) = 1$ se n é quadrado-livre (se na sua fatoração por produto de números primos não tiver fatores ao quadrado) e possui um número par de fatores primos.
- $\mu(n) = -1$ se n é quadrado-livre e tem um número ímpar de fatores primos.
- $\mu(n) = 0$ se n possui algum fator primo repetido (não é quadrado-livre).

2.2.1 Exemplos

- $\mu(1) = 1$, pois 1 tem zero fatores primos (par).
- $\mu(6) = 1$, pois $6 = 2 \times 3$ (dois fatores primos, par).
- $\mu(30) = -1$, pois $30 = 2 \times 3 \times 5$ (três fatores primos, ímpar).
- $\mu(12) = 0$, pois $12 = 2^2 \times 3$ (não é quadrado-livre).

Agora mostraremos uma Propriedade Fundamental da Função de Möbius que nos diz que, para qualquer $n \geq 1$, temos:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Demonstração: Primeiro, se $n = 1$, a única soma é $\mu(1) = 1$, o que satisfaz a propriedade. Agora vamos considerar $n > 1$.

Para $n > 1$, vamos escrever n como o produto de fatores primos:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

onde p_1, p_2, \dots, p_k são os fatores primos de n e a_i é a multiplicidade de cada fator primo.

Na soma $\sum_{d|n} \mu(d)$, os únicos valores não nulos de $\mu(d)$ vêm dos divisores d de n que são produtos de primos distintos (ou seja, divisores de n sem fatores repetidos). Assim, podemos reescrever a soma apenas com esses divisores específicos:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p_1) + \cdots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \cdots + \mu(p_1 p_2 \cdots p_k)$$

Cada termo $\mu(d)$ para um divisor d com m fatores primos distintos (entre p_1, p_2, \dots, p_k) será $(-1)^m$.

Para calcular essa soma, usamos a identidade binomial, onde os sinais de cada termo se alternam:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k$$

Essa soma é exatamente o desenvolvimento de $(1 - 1)^k$ pela fórmula binomial, que resulta em:

$$(1 - 1)^k = 0$$

Portanto:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0 \quad \text{para } n > 1$$



Agora, vejamos um exemplo prático para ilustrar:

Suponha que $n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Então n tem os primos $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ e $p_3 = 5$ em sua fatoração. Os divisores de n que são produtos de primos distintos de n são:

- $d = 1$ (nenhum primo, então $\mu(1) = 1$),
- $d = 2$ (apenas o primo 2, então $\mu(2) = -1$),
- $d = 3$ (apenas o primo 3, então $\mu(3) = -1$),
- $d = 5$ (apenas o primo 5, então $\mu(5) = -1$),
- $d = 2 \cdot 3 = 6$ (primos 2 e 3, então $\mu(6) = 1$),
- $d = 2 \cdot 5 = 10$ (primos 2 e 5, então $\mu(10) = 1$),
- $d = 3 \cdot 5 = 15$ (primos 3 e 5, então $\mu(15) = 1$),
- $d = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ (todos os três primos, então $\mu(30) = -1$).

Portanto, na soma $\sum_{d|n} \mu(d)$ para $n = 30$, temos:

$$\sum_{d|30} \mu(d) = 1 + (-1) + (-1) + (-1) + 1 + 1 + 1 + (-1) = 0.$$

3 função totiente de Euler $\varphi(n)$ usando a função de Möbius $\mu(n)$.

Queremos provar que:

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

Demonstração: A função totiente de Euler, $\varphi(n)$, pode ser reescrita usando o máximo divisor comum (n, k) entre n e cada k no intervalo $1 \leq k \leq n$:

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(n, k)} \right],$$

onde o símbolo $\left[\frac{1}{(n, k)} \right]$ indica que estamos somando 1 apenas para os valores de k que são coprimos com n , já que $(n, k) = 1$ implica que k é coprimo com n .

Para simplificar essa soma, vamos usar uma propriedade importante da função de Möbius. Sabemos que:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n > 1. \end{cases} = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$$

Aplicamos essa propriedade com n substituído por (n, k) :

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{d|(n,k)} \mu(d).$$

A soma interna, $\sum_{d|(n,k)} \mu(d)$, percorre todos os divisores de (n, k) . Podemos reorganizar essa soma ao somarmos sobre todos os divisores d de n e, para cada divisor d , somamos sobre os k que são múltiplos de d . Isso nos dá:

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \sum_{\substack{k=1 \\ d|k}}^n \mu(d).$$

Agora, consideramos apenas os k que são múltiplos de d . Escrevemos $k = qd$, onde q é um inteiro tal que $1 \leq q \leq \frac{n}{d}$. Isso transforma a soma em:

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{q=1}^{n/d} 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d}$$

Isso completa a demonstração. ■

3.1 Exemplo

Para ilustrar a relação, vamos calcular $\varphi(12)$ usando a fórmula:

$$\varphi(12) = \sum_{d|12} \mu(d) \frac{12}{d}.$$

Os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4, 6, 12, e calculamos:

- $d = 1 \Rightarrow \mu(1) = 1; \frac{12}{1} = 12$
- $d = 2 \Rightarrow \mu(2) = -1; \frac{12}{2} = 6$
- $d = 3 \Rightarrow \mu(3) = -1; \frac{12}{3} = 4$
- $d = 4 \Rightarrow \mu(4) = 0$
- $d = 6 \Rightarrow \mu(6) = 1; \frac{12}{6} = 2$
- $d = 12 \Rightarrow \mu(12) = 0$

Então, temos:

$$\varphi(12) = 1 \cdot 12 + (-1) \cdot 6 + (-1) \cdot 4 + 0 + 1 \cdot 2 + 0 = 12 - 6 - 4 + 2 = 4.$$

Portanto, confirmamos que $\varphi(12) = 4$, que é o número de inteiros coprimos a 12 entre 1 e 12: 1, 5, 7, 11.

4 Contagem de Coprimos entre 1 e m que são coprimos com n

A quantidade de inteiros k entre 1 e m que são coprimos com n é dada por

$$\sum_{d|n} \mu(d) \cdot \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor,$$

onde $\mu(d)$ é a função de Möbius.

O objetivo é contar quantos valores de k no conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$ satisfazem $\gcd(k, n) = 1$.

Para resolver esse problema, aplicamos o princípio da inclusão-exclusão. Primeiramente, vamos contar quantos números até m são múltiplos de cada divisor d de n que é livre de quadrados (ou seja, cada fator primo de d aparece no máximo uma vez). Em seguida, somamos e subtraímos essas contagens para corrigir a inclusão excessiva, usando a função de Möbius $\mu(d)$ como um filtro.

Como já vimos anteriormente, a função de Möbius $\mu(d)$ é definida como:

$$\mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } d = 1, \\ (-1)^k & \text{se } d \text{ é um produto de } k \text{ primos distintos,} \\ 0 & \text{se } d \text{ possui um fator primo ao quadrado.} \end{cases}$$

Já vimos também que uma propriedade fundamental da função de Möbius é que, para um inteiro $n \geq 1$,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Essa propriedade permite que a função de Möbius ajuste a contagem para incluir apenas os valores k que são coprimos a n .

Ou seja, a expressão

$$\sum_{d|n} \mu(d) \cdot \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$$

soma o número de múltiplos de cada divisor d de n até m , multiplicados por $\mu(d)$ para aplicar o ajuste de inclusão-exclusão.

Para cada divisor d de n :

- Se $\mu(d) = 1$, adicionamos o número de múltiplos de d até m .
- Se $\mu(d) = -1$, subtraímos o número de múltiplos de d até m .
- Se $\mu(d) = 0$, ignoramos d , pois d tem fatores ao quadrado e não contribuem para a contagem.

Dessa forma, a soma $\sum_{d|n} \mu(d) \cdot \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$ "filtra" exatamente os números entre 1 e m que são coprimos a n , pois a função de Möbius elimina os múltiplos dos fatores primos de n .

Portanto, concluímos que

$$\sum_{d|n} \mu(d) \cdot \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$$

é a contagem dos números até m que são coprimos com n .

4.1 Exemplo

Queremos encontrar a quantidade de números até $m = 20$ que são coprimos com $n = 12$.

1. Identificar os divisores de n :

- Os divisores de 12 são: $d = 1, 2, 3, 4, 6, 12$.

2. Calcular a função de Möbius $\mu(d)$ para cada divisor d :

- $\mu(1) = 1$ (pois 1 não tem fatores primos),
- $\mu(2) = -1$ (pois 2 é um único primo),
- $\mu(3) = -1$ (pois 3 é um único primo),
- $\mu(4) = 0$ (pois $4 = 2^2$, tem um fator primo ao quadrado),
- $\mu(6) = 1$ (pois $6 = 2 \cdot 3$, produto de dois primos distintos),
- $\mu(12) = 0$ (pois $12 = 2^2 \cdot 3$, tem um fator primo ao quadrado).

3. Calcular $\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$ para cada divisor d :

- Para $d = 1$: $\left\lfloor \frac{20}{1} \right\rfloor = 20$,
- Para $d = 2$: $\left\lfloor \frac{20}{2} \right\rfloor = 10$,
- Para $d = 3$: $\left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor = 6$,
- Para $d = 4$: $\left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor = 5$,
- Para $d = 6$: $\left\lfloor \frac{20}{6} \right\rfloor = 3$,
- Para $d = 12$: $\left\lfloor \frac{20}{12} \right\rfloor = 1$.

4. Aplicar a fórmula:

$$\sum_{d|12} \mu(d) \cdot \left\lfloor \frac{20}{d} \right\rfloor = \mu(1) \cdot 20 + \mu(2) \cdot 10 + \mu(3) \cdot 6 + \mu(4) \cdot 5 + \mu(6) \cdot 3 + \mu(12) \cdot 1$$

Substituindo os valores de $\mu(d)$ e $\left\lfloor \frac{20}{d} \right\rfloor$:

$$= (1) \cdot 20 + (-1) \cdot 10 + (-1) \cdot 6 + (0) \cdot 5 + (1) \cdot 3 + (0) \cdot 1 = 20 - 10 - 6 + 3 = 7$$

E de fato é verdade, Pois os números coprimos com 12 entre 1 e 20 são

$$\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

5 Conclusão

A relação entre a função totiente de Euler $\varphi(n)$ e a função de Möbius $\mu(n)$ revela conexões importantes dentro da teoria dos números. Através dessas funções, é possível compreender aspectos do comportamento multiplicativo de números inteiros, além de suas implicações em questões como a fatoração e a distribuição de números primos. A análise conjunta dessas funções oferece uma visão mais profunda das propriedades fundamentais dos números inteiros e suas interações, sendo de grande relevância para a resolução de problemas clássicos da aritmética e para o desenvolvimento de métodos eficazes em outras áreas da matemática. Dessa forma, o estudo dessa relação contribui para uma compreensão mais ampla e integrada da teoria dos números.

6 Agradecimento

Na condição de bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço pelo apoio e fomento recebidos.

Referências

- [1] Apostol, Tom M, *Introduction to Analytic Number Theory* New York: Springer-Verlag, 1976.



Funções contínuas sem derivada em nenhum ponto

Elmira Rosa Silva de Melo

UFU, IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

elmira.rosa@ufu.br

Elisa Regina dos Santos

UFU, IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

elisars@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Derivada.
Continuidade.
Análise Real.

Existem funções contínuas que não possuem derivada em nenhum ponto. Embora a intuição sugira que funções contínuas sejam deriváveis em pelo menos alguns pontos, isso nem sempre é o caso. Um exemplo clássico é a função de Weierstrass, que é contínua em toda a reta real, mas não é derivável em nenhum ponto. Essa função é construída como uma série de funções periódicas que, juntas, geram uma função com comportamento irregular em todos os seus pontos. Essas funções desafiam a ideia de que a continuidade garante a derivabilidade, mostrando que é possível ter funções contínuas sem derivada definida em nenhum ponto. Tais exemplos são importantes para entender as sutilezas das propriedades das funções e ampliar nossa compreensão sobre o comportamento das funções contínuas.

1 Introdução

Utilizando ferramentas da Análise Real podemos provar que toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua nos pontos em que é derivável. Entretanto, a recíproca desse fato não é verdadeira. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x|$, é contínua em toda a reta real mas não é derivável em $x = 0$. A partir dessa função, podemos construir ainda um exemplo de função contínua que não é derivável em infinitos pontos, a saber, a função periódica

$$g(x) = |x|, \text{ para } 1 \leq x \leq 2 \text{ com } g(x+2) = g(x).$$

Essa função não possui derivada em nenhum valor inteiro de x . Mas será que existem funções contínuas que não possuem derivada em nenhum ponto? A princípio, nossa intuição pode nos levar a acreditar que a resposta a essa pergunta seja negativa. No entanto, atualmente, é possível encontrar diversos exemplos de funções contínuas que realmente não possuem derivada em nenhum ponto, desafiando essa concepção inicial.

Ao pensar em uma função real de variável real, geralmente tentamos visualizar seu gráfico. No entanto, é difícil imaginar uma função que seja contínua e que não tenha derivada em nenhum ponto. É admirável que matemáticos do século passado tenham se debruçado sobre esse difícil problema e construído tais funções. O primeiro exemplo conhecido foi dado por Bernhard Bolzano, em 1834. Contudo, o exemplo de Bolzano não se difundiu amplamente. Em 1872, Weierstrass publicou um artigo apresentando outro exemplo, que despertou grande atenção e interesse na comunidade matemática. Em seu artigo, Weierstrass conta que, em 1861, Riemann contou a seus estudantes que a função contínua definida por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

não tem derivada em nenhum ponto. Como Weierstrass não conseguiu demonstrar formalmente esse fato, ele construiu seu exemplo, que pode ser estudado na referência [2].

Neste trabalho, estudaremos o exemplo de Van der Waerden (1930), mostrando que funções contínuas podem, de fato, não ser deriváveis em nenhum ponto.

2 Resultados Preliminares

Iniciaremos com algumas definições e alguns resultados preliminares fundamentais.

2.1 Sequência de funções

Definição 2.1. Uma sequência (f_n) de funções $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, definidas em um subconjunto A de \mathbb{R} , converge simplesmente para uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se, para qualquer x fixado em A , a sequência

numérica $(f_n(x))$ convergir para $f(x)$. Isso quer dizer que, dados $x \in A$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (n_0 dependendo de x e de ε) tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

A função f , definida por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

para cada $x \in A$, é chamada de **limite simples da sequência** (f_n) .

Definição 2.2. Uma sequência (f_n) de funções $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, definida em um subconjunto A de \mathbb{R} , **converge uniformemente** para uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se, dado $\varepsilon > 0$, existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ε , e não de x) tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \text{ para todo } x \in A \text{ e todo } n \geq n_0.$$

É claro que, se a sequência (f_n) convergir uniformemente, então ela também convergirá simplesmente. Vejamos dois exemplos a seguir.

Exemplo 2.3. A sequência formada pelas funções $f_n(x) = x^n$, para $0 \leq x \leq 1$, converge simplesmente mas não uniformemente para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Exemplo 2.4. A sequência de funções $f_n(x) = \frac{1}{n}x$, definidas para $x \in [0, 1]$, converge uniformemente para a função $f = 0$.

2.2 Série de funções

Definição 2.5. Seja (u_n) uma sequência de funções $u_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, definidas em um subconjunto A de \mathbb{R} . A soma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ será denominada **série de funções**. Para cada $x \in A$, consideramos a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Se as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convergirem, para todo $x \in B$, $B \subset A$, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge em B .

Como no caso das séries numéricas, a questão da convergência da série de funções é transformada no estudo da convergência da sequência das **somas parciais**:

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^n u_j(x).$$

Definição 2.6. A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **converge simplesmente**, se a sequência (S_n) das somas parciais convergir simplesmente. Se uma série de funções convergir simplesmente, ela define uma função

$u : A \rightarrow \mathbb{R}$, chamada **soma da série**, a qual é dada por

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \text{ para } x \in A.$$

Se a sequência (S_n) das somas parciais convergir uniformemente, dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **converge uniformemente**.

Teorema 2.7. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uma série uniformemente convergente de funções contínuas, definidas em um intervalo I . Então, sua soma u é uma função contínua em I .

Demonstração. Segue de [1], Teorema 9.2. ■

Definição 2.8. A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **converge absolutamente** se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ convergir. Se $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ convergir simplesmente (uniformemente), diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge absoluta e simplesmente (uniformemente).

Teorema 2.9. (Teste M de Weierstrass) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série de funções $u_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, definidas em um subconjunto A de \mathbb{R} . Suponha que $|u_n(x)| \leq M_n$, para todo $x \in A$, e que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Então, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniforme e absolutamente.

Demonstração. Veja [1], Teorema 9.5. ■

3 Resultado principal

Nesta seção, apresentaremos um exemplo de uma função contínua sem derivada em nenhum ponto. Tal exemplo é devido a Van der Waerden (1930) e para sua construção precisamos considerar primeiramente o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1. Representemos por $\{x\}$ a distância de x ao inteiro mais próximo de x . Apresentamos abaixo o gráfico da função $x \mapsto \{x\}$.

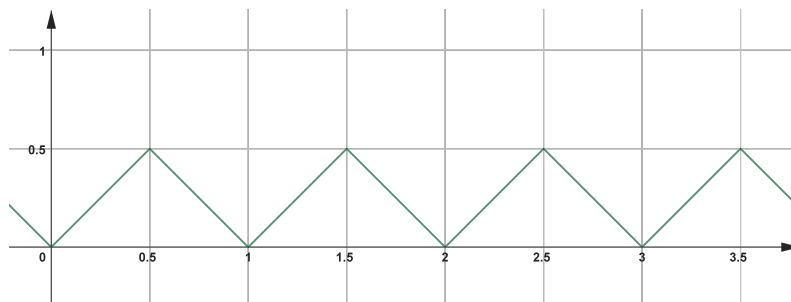


Figura 1: Gráfico de $\{x\}$

Note que essa é uma função contínua.

Apresentaremos agora a função de Van der Waerden.

Exemplo 3.2. A série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n \{10^n x\},$$

conhecida como função de Van der Waerden, define uma função contínua.

Não é difícil perceber que

$$\{10^n x\} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$\{10^n x\} \left(\frac{9}{10}\right)^n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{9}{10}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definindo $u_n(x) = \{10^n x\} \left(\frac{9}{10}\right)^n$ e $M_n = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{10}\right)^n$, temos que

$$|u_n(x)| = u_n(x) \leq M_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

é convergente, pois é uma série geométrica com razão $r = \frac{9}{10} < 1$. Pelo Teste M de Weierstrass,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{10^n x\} \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

converge uniformemente. Como as funções u_n são contínuas, segue que f é contínua pelo Teorema 2.7.

Veremos que a função do exemplo anterior não é derivável em nenhum ponto de \mathbb{R} . Para isso, usaremos o seguinte lema.

Lema 3.3. Seja f uma função contínua em \mathbb{R} e derivável em um ponto x_0 . Então, dado $\varepsilon > 0$, existe M tal que

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M$$

para $0 < y - x < \varepsilon$ e $x \leq x_0 \leq y$.

Demonstração. Veja [1], Seção 9.7, Exercício 1. ■

Teorema 3.4. A função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n \{10^n x\}$$

não é derivável em ponto algum de \mathbb{R} .

Demonstração. Seja x um ponto arbitrário em \mathbb{R} . Sem perda de generalidade, vamos supor $x > 0$. Seja $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ fixado. Então, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$k \leq 10^m x \leq k + 1.$$

Tome $\alpha_m = 10^{-m}k$ e $\beta_m = 10^{-m}(k + 1)$, os quais são pontos próximos de x , isto é,

$$\alpha_m \leq x \leq \beta_m$$

e

$$\beta_m - \alpha_m = 10^{-m}.$$

Queremos mostrar que

$$\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}$$

é “grande”.

Como $10^n \alpha_m = 10^{n-m}k$ e $10^n \beta_m = 10^{n-m}(k + 1)$, segue que

$$|\{10^n \beta_m\} - \{10^n \alpha_m\}| = \begin{cases} 0, & \text{se } n \geq m \\ 10^{n-m}, & \text{se } n < m. \end{cases}$$

De fato, se $n \geq m$, então $10^{n-m} \in \mathbb{Z}$, e daí, $10^n \alpha_m$ e $10^n \beta_m$ são inteiros. Assim,

$$\{10^n \beta_m\} = \{10^n \alpha_m\} = 0.$$

Agora, no caso em que $n < m$, a demonstração é bastante técnica e, por essa razão, optamos por não incluí-la neste trabalho. Para mais informações, veja [1], Seção 9.7, Exercício 2. Logo,

$$\begin{aligned} f(\beta_m) - f(\alpha_m) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n \{10^n \beta_m\} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n \{10^n \alpha_m\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n (\{10^n \beta_m\} - \{10^n \alpha_m\}) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{9}{10}\right)^n (\{10^n \beta_m\} - \{10^n \alpha_m\}). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 |f(\beta_m) - f(\alpha_m)| &= \left| \sum_{n=0}^{m-2} \left(\frac{9}{10}\right)^n (\{10^n \beta_m\} - \{10^n \alpha_m\}) + \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} (\{10^m \beta_m\} - \{10^m \alpha_m\}) \right| \\
 &\geq \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} |\{10^{m-1} \beta_m\} - \{10^{m-1} \alpha_m\}| - \sum_{n=0}^{m-2} \left(\frac{9}{10}\right)^n \cdot |\{10^n \beta_m\} - \{10^n \alpha_m\}| \\
 &= 10^{-1} \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} - \sum_{n=0}^{m-2} \left(\frac{9}{10}\right)^n \cdot 10^{n-m} \\
 &= 10^{-1} \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} - 10^{-m} \sum_{n=0}^{m-2} 9^n \\
 &= 10^{-1} \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} - 10^{-m} \cdot \left(\frac{9^{m-1} - 1}{9 - 1}\right) \\
 &= \frac{9^{m-1}}{10^m} - \frac{1}{10^m} \left(\frac{9^{m-1} - 1}{8}\right) \\
 &= \frac{1}{10^m} \left(\frac{8 \cdot 9^{m-1} - 9^{m-1} + 1}{8}\right) \\
 &= \frac{1}{10^m} \left(\frac{7 \cdot 9^{m-1} + 1}{8}\right).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \right| \geq \frac{7 \cdot 9^{m-1} + 1}{8}.$$

Por fim, tomando $\varepsilon = 10^{-m}$, temos que, para todo $M > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\frac{7 \cdot 9^{m-1} + 1}{8} > M.$$

Dessa forma, temos $\alpha_m \leq x \leq \beta_m$, $\beta_m - \alpha_m = 10^{-m}$ e

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \right| \geq \frac{7 \cdot 9^{m-1} + 1}{8} > M.$$

Portanto, f não é derivável em x , pelo Lema 3.3. ■

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

Referências

- [1] FIGUEIREIDO, D. G. **Análise 1**. 2. ed. LTC, 1996.
- [2] TITCHMARCH, E. C. **The Theory of Functions**. 2. ed. Oxford University Press, 1976.



Identificando Raízes de Polinômios Irredutíveis sobre Corpos Finitos

Caio Alvarenga Marcondes

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
caioalvarenga@ufu.br

Victor Gonzalo Lopez Neumann

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
victor.neumann@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Corpos.
Polinômios.
Irredutíveis.

Este trabalho mostra um pouco dos resultados obtidos a partir do estudo de polinômios irredutíveis sobre corpos finitos, explorando algumas propriedades e exemplos a fim de fornecer a intuição necessária para o entendimento deste texto. Um corpo finito é uma estrutura algébrica com um número finito de elementos e, mais ainda, toda função de um corpo finito pode ser expressa como um polinômio (este é um resultado que é uma consequência direta da fórmula do polinômio interpolador de Lagrange). Este tipo de estrutura tem grande importância na criptografia, na teoria de códigos e na engenharia. Primeiro, são apresentadas algumas definições básicas sobre polinômios e corpos para fornecer o contexto geral do trabalho; em seguida, utilizamos alguns resultados sobre extensões de corpos e propriedades elementares de corpos finitos para apresentarmos o tema principal.

1 Introdução

É ensinado no curso de Estruturas Algébricas que um **corpo** K é um anel comutativo com unidade em que todo elemento não nulo é invertível.

O exemplo mais clássico de um corpo finito é o **corpo dos inteiros módulo p** , muito utilizado nas estruturas algébricas, por exemplo, o **corpo de Galois** $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Este tipo de conjunto, de fato, é um corpo (ver demonstração em [2, Capítulo 2, Teorema 4]). Por mais que esse seja o exemplo mais famoso, as suas propriedades se estendem para corpos finitos arbitrários. Temos um resultado que mostra que todo corpo finito possui ordem $q = p^n$, isto é, uma potência de um primo e, mais ainda, para cada número que é uma potência de um primo existe exatamente um corpo finito, a menos isomorfismo, que possui q elementos. Além disso todo subcorpo de F tem ordem p^m , sendo m um divisor positivo de n (ver demonstração em [1, Teoremas 2.2, 2.5 e 2.6]). A partir de agora, utilizaremos a notação \mathbb{F}_q para falarmos de um corpo finito com um número q primo de elementos. Em particular, o corpo \mathbb{Z}_p será denotado \mathbb{F}_p .

Considere uma indeterminada X e um corpo K . Definimos o conjunto $K[X]$. Este conjunto é o **anel de polinômios com coeficientes em K na indeterminada X** . Um polinômio $P(X)$ neste conjunto é uma expressão do tipo

$$P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n.$$

Definição 1.1. Se $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ é um polinômio não nulo em $K[X]$ com $a_n \neq 0$, define-se o grau de $P(X)$ como sendo o inteiro não negativo n . Denotaremos o grau de $P(X) \neq 0$ por

$$gr(P(X)).$$

Note que $gr(P(X)) = 0$ se, e somente se, $P(X) = a_0 \in K \setminus \{0\}$.

Definição 1.2. Se $gr(P(X)) = n$ e $a_n = 1$, diremos que $P(X)$ é um **polinômio mônico**.

Definição 1.3. Seja $P(X)$ um polinômio em $K[X]$. Dizemos que $P(X)$ é um polinômio irreduzível se $P(X)$ é não nulo e não constante tal que se $P(X) = H(X)G(X)$ para polinômios $H(X)$ e $G(X)$ em $K[X]$, então pelo menos um desses fatores é uma constante invertível em K .

Definição 1.4. Dizemos que um elemento θ é uma **raiz** de um polinômio $f(X) \in K[X]$ se $f(\theta) = 0$.

Teorema 1.5. Um elemento $\theta \in F$ é uma raiz de multiplicidade maior que 1 (ou seja, que aparece mais de uma vez na fatoração de um polinômio) de $f(X)$ em $F[X]$ se, e somente se, é uma raiz de $f(X)$ e $f'(X)$.

O Teorema acima cumpre papel fundamental em uma demonstração de um resultado na seção de polinômios irreduzíveis. A demonstração deste resultado se encontra em [1, Teorema 1.68].

1.1 Caracterização de corpos finitos

Definição 1.6. Definimos a *característica de um corpo finito* como sendo o inteiro positivo

$$\text{car}(K) = \min \Delta_K = \min \{n \in \mathbb{N}; n \cdot 1 = 0\}.$$

Definição 1.7. Seja F um corpo. Se um subconjunto K de F é um corpo com as operações de F , então dizemos que K é um subcorpo de F . Nesse contexto, dizemos que F é uma **extensão do corpo** K . Se $F \neq K$, dizemos que K é um subcorpo próprio de F .

As **extensões de corpos** cumprem papel fundamental na construção da ideia de raízes de polinômios irredutíveis. Por exemplo, tome o corpo dos racionais \mathbb{Q} e um polinômio $f(X) = X^2 - 2$ em $\mathbb{Q}[X]$. Sabemos que não existe raiz deste polinômio em \mathbb{Q} , mas é possível encontrar uma raiz deste polinômio em uma extensão deste corpo, que é o corpo dos reais \mathbb{R} . O mesmo princípio se aplica para um corpo arbitrário \mathbb{F}_q . Esta ideia de raiz de um polinômio em uma extensão nos leva à seguinte definição:

Definição 1.8. Seja F uma extensão de um corpo K . Dizemos que um elemento $\theta \in F$ é **algébrico** em K se θ é raiz de algum polinômio não trivial $f(X) \in K[X]$. Se todo elemento de F é algébrico em K , dizemos que F é algébrico sobre K .

Definição 1.9. Se $\theta \in F$ é algébrico em K , então o **único** polinômio mônico $g \in K[X]$ de grau mínimo tal que $g(\theta) = 0$ que gera o ideal $J = \{f \in K[X] \mid f(\theta) = 0\}$ de $K[X]$ é chamado de **polinômio minimal** de θ sobre K .

Este ideal também pode ser escrito como $J = \{f \cdot g \mid f \in K[X]\}$. Quando quocientamos o anel de polinômios $\mathbb{F}_q[X]$ por este ideal J , obtemos uma extensão de \mathbb{F}_q que vai conter as raízes do polinômio gerador do ideal.

Exemplo 1.10. Tome o corpo $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Podemos construir o corpo \mathbb{F}_4 a partir de um polinômio gerador irredutível de **grau 2**. Tomamos o polinômio $X^2 + X + 1$, que é irredutível em \mathbb{F}_2 e o ideal $J = (X^2 + X + 1)$ gerado por este polinômio e quocientamos $\mathbb{F}_2[X]$ por este ideal, isto é, $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$. Os elementos desse anel quociente são as classes laterais $j + (X^2 + X + 1)$, sendo j é um polinômio em $\mathbb{F}_2[X]$ de grau menor que 2, isto é, $j = a + bx$. Assim,

$$a + bx + J = a(1 + J) + b(x + J) = a + b\alpha.$$

Na equação acima, trocamos a classe do x por α como um abuso de notação. A partir desta notação, obtemos que α é uma raiz do polinômio gerador. Portanto, conseguimos obter os elementos de \mathbb{F}_4 , que são da forma

$$\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha\}.$$

Definição 1.11. Seja $f(X) \in K[X]$ um polinômio de grau positivo e F uma extensão de corpo de K . Então $f(X)$ se decompõe em F se $f(X)$ pode ser escrito como um produto de fatores lineares em

$F[X]$, isto é, existem elementos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in F$ tais que

$$f(X) = c(x - \theta_1)(x - \theta_2) \dots (x - \theta_n).$$

A ideia intuitiva dessa definição é que para um polinômio f em $K[X]$ e uma extensão F que contém todas as raízes de f , este polinômio pode ser expresso em $F[X]$ como o produto desses fatores lineares em F , de forma similar ao que estamos acostumados quando falamos de polinômios.

Lema 1.12. *Seja $f(X) \in \mathbb{F}_q[X]$ um polinômio irredutível em \mathbb{F}_q de grau m . Então, $f(X)$ divide $X^{q^n} - X$ se, e somente se, m divide n .*

Esse lema é fundamental para a demonstração de um teorema na próxima seção. Como a demonstração é muito extensa, veja a demonstração em [1, Lema 2.13].

2 Polinômios irredutíveis

Teorema 2.1. *Para todo corpo finito \mathbb{F}_q e para todo natural n , o produto de todos os polinômios mônicos irredutíveis em \mathbb{F}_q cujos graus dividem n é igual a $X^{q^n} - X$.*

Demonstração. De acordo com o **Lema 1.12**, os polinômios mônicos irredutíveis em \mathbb{F}_q que aparecem na fatoração de $g(X) = X^{q^n} - X$ em \mathbb{F}_q são os polinômios cujos graus dividem n . Derivando o polinômio $g(X)$, temos

$$g'(X) = (X^{q^n} - X)' = q^n X^{q^n-1} - 1,$$

e como q é uma potência de um primo p , segue que $q^n = p^{nm}$ é múltiplo de p . Dessa forma, como $q^n \equiv 0 \pmod{p}$ o termo $q^n X^{q^n-1}$ desaparece. Assim sendo, $g'(X) = -1$. Assim, o **Teorema 1.5** implica que $g(X)$ não tem raiz de multiplicidade maior que 1 dentro do corpo \mathbb{F}_q , e, portanto, cada polinômio mônico irredutível em \mathbb{F}_q cujos graus dividem n aparecem exatamente uma vez na fatoração de $g(X)$ em $\mathbb{F}_q[X]$. ■

Corolário 2.2. *Se $N_q(d)$ é o número de polinômios mônicos irredutíveis em $\mathbb{F}_q[X]$ de grau d , então*

$$q^n = \sum_{d|n} d N_q(d), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

sendo a soma estendida para **todos os divisores positivos** d de n .

Demonstração. A identidade (1) segue diretamente do teorema anterior quando comparamos o grau de $g(x) = X^{q^n} - X$ com o grau total da fatoração canônica de $g(x)$. Isto é, $gr(g(x)) = q^n$, e ao somar os graus de todos os polinômios irredutíveis que estão na fatoração obtemos $\sum_{d|n} d N_q(d)$. Como $gr(g(x)) = q^n$, obtemos o resultado. ■

Este corolário nos diz, basicamente, que os polinômios irredutíveis de grau d "geram" elementos de um corpo com q^n elementos, e cada polinômio contribui com d elementos para este corpo.

Exemplo 2.3. Vamos entender melhor essa identidade com um exemplo. Tome $q = 2$ e $n = 3$. Dessa forma, substituindo os valores na identidade obtemos:

$$2^3 = \sum_{d|3} dN_2(d)$$

Sabemos que os divisores positivos de 3 são 1 e 3. Então:

$$8 = 1N_2(1) + 3N_2(3).$$

Temos $N_2(1) = 2$ (isto é, os polinômios mônicos irredutíveis de grau 1 são X e $X + 1$), então

$$8 = 1(2) + 3N_2(3) \implies 6 = 3N_2(3) \implies N_2(3) = 2.$$

Dessa forma, existem exatamente **dois polinômios mônicos irredutíveis de grau 3 sobre \mathbb{F}_2** .

Esta identidade nos leva a uma definição importante:

Definição 2.4. A **função μ de Moebius** é a função em naturais definida da forma:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1; \\ (-1)^k & \text{se } n \text{ é o produto de } k \text{ primos distintos;} \\ 0 & \text{se } n \text{ é divisível pelo quadrado de um primo.} \end{cases}$$

Exemplo 2.5. Vamos calcular essa função para alguns valores de n .

$$\mu(1) = 1$$

$$\mu(6) = 1 \text{ (pois } 6 = 2 \cdot 3, \text{ segue que } (-1)^2 = 1)$$

$$\mu(12) = 0 \text{ (12 contém o quadrado de um primo)}$$

No contexto que estamos trabalhando, essa função cumpre papel importante na contagem de **polinômios irredutíveis sobre corpos finitos**.

Lema 2.6. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a função μ de Moebius satisfaz

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1; \\ 0 & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Demonstração. Para $n > 1$, temos que levar em consideração apenas aqueles divisores positivos d de n os quais $\mu(d) \neq 0$ — isto é, $d = 1$ ou d é um **produto de primos distintos**. Então, se p_1, p_2, \dots, p_k

são os primos distintos que dividem n , temos:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \sum_{i=1}^k \mu(p_i) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} \mu(p_{i_1} p_{i_2}) + \cdots + \mu(p_1 p_2 \cdots p_k)$$

que por sua vez é igual a:

$$1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k$$

que resulta em

$$(1 + (-1))^k = 0.$$

O caso $n = 1$ é trivial. ■

Teorema 2.7 (Fórmula da Inversão de Moebius (Caso aditivo)).

Sejam h e H duas funções de \mathbb{N} em um grupo abeliano aditivo G . Então,

$$H(n) = \sum_{d|n} h(d) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

se, e somente se,

$$h(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) H(d) = \sum_{d|n} \mu(d) H\left(\frac{n}{d}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

A demonstração desse resultado se encontra em [1, Teorema 3.24]. Este teorema é parte fundamental para demonstrar o próximo resultado:

Teorema 2.8. O número $N_q(d)$ de **polinômios mônicos irredutíveis** em $F_q[X]$ de grau n é dado por:

$$N_q(d) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) q^{n/d}.$$

Demonstração. Aplicamos o caso aditivo da Fórmula da Inversão de Moebius no grupo $G = \mathbb{Z}$, isto é, o grupo aditivo dos inteiros. Sejam $h(n) = nN_q(n)$ e $H(n) = q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, (2) é satisfeito por causa da identidade (1) e a identidade (3) nos dá a fórmula desejada. ■

Este teorema fornece uma fórmula para **contar o número de polinômios mônicos irredutíveis de grau d sobre o corpo finito \mathbb{F}_q** . Também, nos ajuda a entender como os polinômios irredutíveis se distribuem sobre os corpos finitos. Vemos agora um exemplo prático:

Exemplo 2.9. Vamos encontrar o número de polinômios mônicos irredutíveis em $\mathbb{F}_q[X]$ de grau 20. Utilizando a fórmula do teorema anterior, temos:

$$N_q(20) = \frac{1}{20} \sum_{d|20} \mu\left(\frac{20}{d}\right) q^d.$$

Os divisores positivos de 20 são 1, 2, 4, 5, 10, 20. Agora precisamos aplicar a **Função de Moebius** para cada divisor positivo de 20. Temos $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(10) = 1$, $\mu(20) = 0$. Substituindo esses valores, temos:

$$N_q(20) = \frac{1}{20}(\mu(1)q^{20} + \mu(2)q^{10} + \mu(4)q^5 + \mu(5)q^4 + \mu(10)q^2 + \mu(20)q)$$

isto é igual a:

$$\frac{1}{20}(q^{20} - q^{10} - q^4 + q^2).$$

Teorema 2.10. O produto $I(q, n; X)$ de todos os polinômios mônicos irredutíveis em $\mathbb{F}_q[X]$ de grau n é dado por:

$$I(q, n; X) = \prod_{d|n} (X^{q^d} - X)^{\mu(n/d)} = \prod_{d|n} (X^{q^{n/d}} - X)^{\mu(d)}.$$

Para estudarmos a próxima definição, precisamos de alguns conceitos sobre raízes primitivas e polinômios ciclotômicos. Como são muitos resultados necessários para a próxima definição e ocupariam muito espaço no texto, veja minha referência em ([1, Capítulos 2.2 e 2.4]). Dessa forma, enunciamos a próxima definição:

Definição 2.11. Seja K um corpo de característica p , n um inteiro positivo não divisível por p , e ζ uma raiz primitiva de ordem n sobre K . Então, o polinômio $Q_n(x) = \prod_{s=1}^n (x - \zeta^s)$, onde o produto é tomado sobre $\gcd(s, n) = 1$, é chamado de polinômio ciclotômico de ordem n sobre K .

A ideia intuitiva que precisamos saber da definição de polinômios ciclotômicos é a seguinte: imagine um relógio de 12 horas convencional. Quando o ponteiro marca 12 horas, ele volta para o 1 e forma um ciclo. Para polinômios ciclotômicos, suas raízes seguem uma ideia similar a de um relógio, isto é, formam um padrão que se repete de forma similar a um ciclo. Ao olharmos para as raízes, em algum momento elas se repetem. Esta definição é vista mais formalizada em [1, Definição 2.43].

Teorema 2.12. Seja $I(q, n; X)$ como enunciado no Teorema anterior. Para $n > 1$, temos:

$$I(q, n; X) = \prod_m Q_m(X). \quad (4)$$

Estes teoremas são essenciais para o exemplo que será feito a seguir. Como suas demonstrações são longas e complexas, veja a demonstração em [1, Teoremas 3.29 e 3.31] caso queira se aprofundar mais no assunto.

Exemplo 2.13. Vamos determinar todos os polinômios mônicos irredutíveis em $\mathbb{F}_2[X]$ de grau 4. Primeiro, precisamos descobrir quantos são utilizando a fórmula do **Teorema 2.8**. Sabemos que o grau dos polinômios que queremos encontrar é 4 e o corpo tem 2 elementos. Listando os divisores

inteiros positivos de 4, temos $d(4) = 1, 2, 4$. A função de Moebius para estes números assumem os seguintes valores: $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = -1$, $\mu(4) = 0$. Assim, temos

$$I_2(4) = \frac{1}{4} [\mu(1)2^{4/1} + \mu(2)2^{4/2} + \mu(4)2^{4/4}]$$

que resulta em

$$I_2(4) = \frac{1}{4} [(1 \cdot 2^4) + (-1 \cdot 2^2) + (0 \cdot 2^1)]$$

e, por fim, temos

$$I_2(4) = \frac{1}{4} [16 - 4 + 0] = \frac{12}{4} = 3.$$

Isto é, temos exatamente 3 polinômios irredutíveis de grau 4 em $\mathbb{F}_2[X]$. A identidade (4) nos mostra que $I(2, 4; X) = Q_5(X)Q_{15}(X)$. Temos que $Q_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ é irredutível em $\mathbb{F}_2[X]$. O polinômio $Q_{15}(X)$ se fatora em 2 polinômios irredutíveis em $\mathbb{F}_2[X]$ de grau 4. Já que $Q_5(X + 1) = X^4 + X^3 + 1$ é irredutível em $\mathbb{F}_2[X]$, esse polinômio deve dividir $Q_{15}(X)$, e então

$$Q_{15}(X) = X^8 + X^7 + X^5 + X^4 + X^3 + X + 1 = (X^4 + X^3 + 1)(X^4 + X + 1)$$

Assim, os polinômios irredutíveis em $\mathbb{F}_2[X]$ de grau 4 são $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $X^4 + X^3 + 1$, e $X^4 + X + 1$.

3 Considerações finais

Esse trabalho é um pequeno recorte de um vasto campo de estudo. Descobrir polinômios irredutíveis sobre corpos finitos tem aplicação direta em campos de criptografia e códigos corretores de erros. Desta forma, é possível ver um pouco do porquê a aplicação desta área é tão importante.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PIBIC (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica), agradeço ao CNPq. O segundo autor agradece pelo apoio financeiro dos projetos FAPEMIG APQ-00470-22 e RED-00133-21, e CNPq 307924/2023-8.

Referências

- [1] RUDOLF, L.; NIEDERREITER, H. **Finite Fields**. 2ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [2] HEFEZ, A.; Villela, M. L. T. **Códigos Corretores de Erros**. 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.



O Legado Geométrico de Apolônio de Perga

Lorena Bezerra de Almeida

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
lore.lo2310@ufu.br

Hernán Roberto Montúfar López

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
montufar@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Apolônio de Perga.
Cônicas.
História da Matemática.
Astronomia Antiga.
Geometria Analítica.

A história da matemática é cheia de figuras cujas contribuições moldaram o desenvolvimento da área ao longo dos séculos. Apolônio de Perga é uma dessas figuras de destaque, principalmente devido ao seu trabalho sobre as cônicas. Este estudo influenciou diretamente a astronomia, a geometria analítica e a matemática aplicada, sendo retomado por pensadores como Kepler, Descartes e Newton. O objetivo deste trabalho é analisar as contribuições de Apolônio. Discutem-se as obras conhecidas e perdidas, bem como os impactos de suas descobertas nos modelos astronômicos antigos. O estudo é concluído com uma análise das seções cônicas, que representam o maior legado de Apolônio.

1 Introdução

A história da matemática é marcada por figuras cujas contribuições moldaram o desenvolvimento da área ao longo dos séculos. Entre esses nomes, Apolônio de Perga (c. 262 a.C. – c. 190 a.C.) ocupa um lugar de destaque, especialmente por seu estudo das cônicas. Seu trabalho influenciou diretamente a astronomia, a geometria analítica e a matemática aplicada, sendo posteriormente retomado por figuras como Kepler, Descartes e Newton.

O presente trabalho tem como objetivo analisar as contribuições de Apolônio de Perga, baseando-se principalmente no capítulo 7 de [1], além de outras referências da história da matemática como [2] e [3]. Serão discutidos seus trabalhos, bem como as obras perdidas e os impactos de suas descobertas nos modelos astronômicos antigos. O estudo será finalizado com uma análise das seções cônicas, que constituem seu maior legado.

2 Trabalhos e Tradição

Durante o período helenístico, Alexandria foi um importante centro matemático, e há indícios de que Apolônio, natural de Perga, tenha estudado e ensinado nessa cidade. Ele também passou um tempo em Pérgamo, cidade com uma biblioteca de destaque. As datas exatas de seu nascimento e morte não são conhecidas, mas estima-se que tenha vivido entre 262 e 190 a.C.

Seu principal legado é o tratado sobre cônicas, além da obra *Dividir em uma razão*, traduzida do árabe para o latim apenas em 1706 por Edmund Halley. Esse trabalho envolve um problema geométrico que leva à resolução de uma equação quadrática.

Grande parte do conhecimento sobre suas obras perdidas vem de Pappus, que mencionou sua pesquisa sobre números grandes e métodos de cálculo rápido. Apolônio teria até mesmo encontrado uma aproximação para π mais precisa do que a de Arquimedes. Muitos de seus escritos faziam parte do *Tesouro da Análise*, uma coleção voltada para estudiosos interessados na resolução de problemas geométricos mais avançados.

3 Obras Perdidas

No século XVII, a reconstrução de tratados geométricos perdidos era uma prática comum, e os escritos de Apolônio estavam entre os mais estudados. Um de seus tratados, *Lugares Geométricos Planos*, abordava propriedades de certos conjuntos de pontos. Entre eles, destacam-se:

- (1) O conjunto de pontos cuja diferença dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos é constante forma uma reta perpendicular à linha que os une;
- (2) Os pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante formam uma circunferência,

O segundo lugar geométrico atualmente é conhecido como “Círculo de Apolônio”, embora já fosse mencionado por Aristóteles ao estudar a forma do arco-íris.

Façamos uma demonstração com notação atual de que o primeiro lugar geométrico citado é, de fato, uma reta. Em \mathbb{R}^2 , fixe $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ e seja $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ um ponto qualquer. Note que

$$d(P, a) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} \text{ e } d(P, b) = \sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2}.$$

Assim, se $k \in \mathbb{R}$ é uma constante tal que $k = d(P, a)^2 - d(P, b)^2$, temos

$$\begin{aligned} k &= (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 - (x - b_1)^2 - (y - b_2)^2 \\ &= x^2 - 2xa_1 + a_1^2 + y^2 - 2ya_2 + a_2^2 - x^2 + 2xb_1 - b_1^2 - y^2 + 2yb_2 - b_2^2 \\ &= 2x(b_1 - a_1) + 2y(b_2 - a_2) + a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$y = \left(\frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2} \right) x + \frac{k + b_1^2 + b_2^2 - a_1^2 - a_2^2}{2(b_2 - a_2)}$$

é uma reta. Além disso, chame $m_1 = \frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2}$. A equação da reta que passa por a e b é dada por

$$y = \left(\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \right) x + \left(\frac{b_1(a_2 - b_2)}{b_1 - a_1} + b_2 \right).$$

Chame $m_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$. Daí

$$\frac{-1}{m_1} = -\frac{1}{\frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2}} = -\frac{b_2 - a_2}{a_1 - b_1} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = m_2.$$

Portanto, o lugar geométrico (1) é o lugar geométrico da reta perpendicular à reta que passa pelos pontos a e b .

Outro tratado, *Cortar uma Área*, tratava de um problema semelhante ao de *Dividir em uma Razão*, mas, em vez de exigir uma proporção entre os segmentos cortados, pedia que seu produto formasse um retângulo de área fixa. Esse problema levava à equação quadrática $ax + x^2 = bc$. Já em *Sobre Secção Determinada*, Apolônio explorava um problema geométrico que envolvia encontrar um ponto em uma reta de modo que certos segmentos satisfizessem uma relação específica de áreas. Esse estudo se assemelha ao que hoje se conhece como uma forma inicial de geometria analítica em uma dimensão.

O tratado *Tangências* abordava um problema diferente dos anteriores: dado um conjunto de três elementos — pontos, retas ou círculos —, encontrar um círculo que fosse tangente a todos. Esse problema, conhecido atualmente como “Problema de Apolônio”, apresenta dez casos distintos, variando em complexidade. Embora suas soluções originais não tenham sido preservadas, estudiosos posteriores, como Newton, desenvolveram métodos para resolvê-lo usando apenas régua e compasso.

Em *Inclinações*, Apolônio estudou problemas de *neusis*, que envolvem encontrar posições específicas de segmentos dentro de certas restrições. Um dos casos descritos por Papus consistia em inserir, dentro de um círculo dado, uma corda de comprimento fixo passando por um ponto determinado.

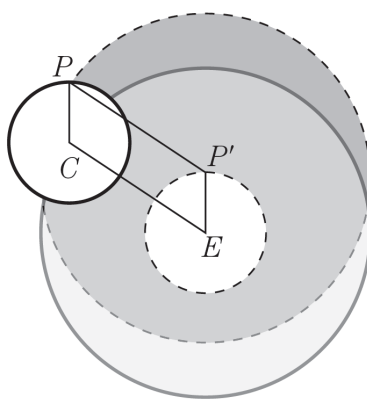
Outras obras de Apolônio, mencionadas por antigos matemáticos, incluem um estudo sobre a relação entre o dodecaedro e o icosaedro. Ele demonstrou que as faces pentagonais de um dodecaedro e as triangulares de um icosaedro inscrito na mesma esfera equidistam do centro, um teorema posteriormente relacionado ao livro XIV de *Os Elementos*.

4 Ciclos e epíclis

Apolônio também se destacou como astrônomo. Enquanto Eudoxo utilizava esferas concêntricas para descrever o movimento dos planetas, Apolônio propôs dois modelos alternativos: um baseado em epíclis e outro em órbitas excêntricas. No primeiro modelo, o planeta P se desloca com velocidade constante ao longo de um pequeno círculo, denominado epíclis. Simultaneamente, o centro desse epíclis, C , também se move de maneira uniforme ao longo de um círculo maior, chamado deferente, cujo centro é E .

No modelo excêntrico, por sua vez, o planeta P percorre um círculo maior com movimento uniforme, enquanto seu centro, P' , também se desloca uniformemente em torno de um círculo centrado em E . Apolônio percebeu que, se $PC = P'E$, os dois sistemas são equivalentes, ou seja, o planeta P faz o mesmo movimento nos dois casos. Os dois modelos podem ser representados pela figura a seguir:

Figura 1



Fonte: [1, p.113].

Embora a teoria das esferas concêntricas, favorecida por Aristóteles, fosse amplamente aceita como uma explicação geral dos movimentos planetários, os modelos de epíclis e excêntricos, posteriormente aprimorados por Ptolomeu, tornaram-se preferidos pelos astrônomos matemáticos por oferecerem previsões mais precisas. Durante quase 1800 anos, os esquemas de Eudoxo e Apolônio coexistiram como abordagens concorrentes na astronomia.

5 As Cônicas

A principal obra de Apolônio, *As Cônicas*, originalmente continha oito livros, mas apenas os quatro primeiros sobreviveram em grego. Felizmente, no século IX, Thabit ibn Qurra traduziu os três volumes seguintes para o árabe, permitindo sua preservação. Em 1710, Edmund Halley traduziu os sete livros para o latim, e desde então a obra foi publicada em diversas línguas.

As seções cônicas já eram estudadas há cerca de 150 anos antes de Apolônio escrever seu tratado. Outros matemáticos, como Aristeu e Euclides, já haviam sistematizado o assunto, mas *As Cônicas* acabou se tornando a referência definitiva em nível avançado, assim como *Os Elementos* de Euclides no ensino da geometria elementar.

Antes de Apolônio, as curvas elipse, parábola e hipérbole eram obtidas a partir de três tipos distintos de cones retos, dependendo do ângulo do vértice. Apolônio mostrou que todas essas curvas podem ser obtidas a partir de um único cone, bastando variar a inclinação do plano de corte. Ele também generalizou o conceito ao demonstrar que as propriedades das seções cônicas não dependem do cone ser reto ou oblíquo. Além disso, substituiu o cone de uma única folha por um cone duplo, como o conhecemos hoje, o que permitiu a caracterização da hipérbole como uma curva de dois ramos.

Outra contribuição importante foi a introdução dos nomes *elipse*, *parábola* e *hipérbole*, adotados a partir de termos usados na solução geométrica de equações quadráticas. A palavra *elipse* (do grego *ellipsis*, “falta”) era usada quando uma área dada era menor que um valor de referência, enquanto *hipérbole* (de *hyperbola*, “excesso”) indicava que a área ultrapassava esse valor. Já *parábola* (de *parabole*, “comparação”) representava uma igualdade. Apolônio aplicou esses termos para nomear as curvas, associando-os às desigualdades que caracterizam suas equações.

Embora tenha avançado significativamente na compreensão das cônicas, Apolônio ainda restringiu seu estudo a cones circulares. Ele poderia ter estendido seus resultados para cones elípticos ou qualquer cone quádrico, sem alterar as propriedades das curvas obtidas. Contudo, sua análise das *secções subcontrárias* já apontava nessa direção: ele mostrou que certos planos inclinados cortando um cone circular oblíquo geram secções circulares, um resultado que poderia ser facilmente demonstrado com argumentos da geometria analítica moderna.

O trabalho de Apolônio representou um salto na compreensão das seções cônicas e sua nomenclatura permanece em uso até hoje, mais de 2000 anos depois.

5.1 Propriedades fundamentais

Os geômetras gregos classificavam as curvas em três categorias: os “lugares geométricos planos”, que incluíam retas e círculos; os “lugares geométricos sólidos”, compostos pelas seções cônicas; e os “lugares geométricos lineares”, que englobavam todas as demais curvas. O nome da segunda categoria refletia o fato de que, na época, as cônicas eram definidas como interseções de um cone tridimensional com um plano, e não como conjuntos de pontos que satisfazem uma equação, como fazemos hoje.

Apolônio seguiu essa abordagem inicial, obtendo as seções cônicas a partir de um cone no espaço,

mas rapidamente abandonou a representação tridimensional. Seu método consistia em derivar uma propriedade essencial da curva — chamada de *symptome* — a partir do cone e, por meio disso, conduzir um estudo puramente planimétrico. Esse processo, que já era utilizado por matemáticos anteriores como Menaecmus, é exemplificado no caso da elipse.

Na Figura 2, seja ABC uma secção triangular de um cone circular oblíquo e seja P um ponto sobre a curva HPK , que intersecta todos os elementos do cone. Ao prolongar HK até encontrar BC em G e traçar um plano horizontal passando por P , obtemos o círculo DPE dentro do cone e a reta PM no plano da secção. Utilizando semelhança de triângulos e a propriedade do círculo, chega-se à relação

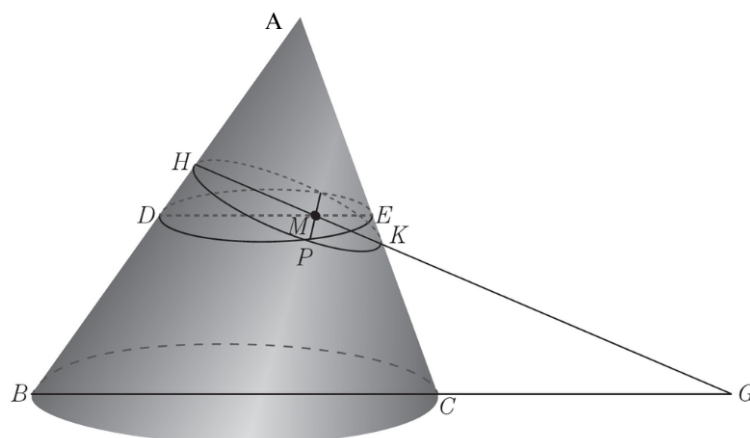
$$PM^2 = \frac{HM \cdot BG}{HG} \cdot \frac{MK \cdot CG}{KG}.$$

Se tomarmos $PM = y$, $HM = x$ e $HK = 2a$, obtemos a equação

$$y^2 = kx(2a - x),$$

que corresponde à equação de uma elipse com H como vértice e HK como eixo maior.

Figura 2



Fonte: [1, p.115].

De maneira semelhante, Apolônio derivou para a hipérbole a relação

$$y^2 = kx(x + 2a).$$

Essas expressões podem ser facilmente convertidas para as formas usuais ao tomar $k = \frac{b^2}{a^2}$. Dessa forma, Apolônio deu um passo importante para a caracterização algébrica das cônicas, aproximando-se da formulação moderna.

5.2 Diâmetros conjugados

Apolônio iniciou seu estudo das cônicas a partir de uma abordagem estereométrica, determinando suas equações fundamentais. Posteriormente, passou a desenvolver propriedades dessas curvas diretamente no plano, sem mais referência à estrutura tridimensional. No livro I de *As Cônicas*, ele aprofundou o estudo das propriedades fundamentais das cônicas e introduziu a teoria dos “diâmetros conjugados”, demonstrando que os pontos médios das cordas paralelas a um diâmetro formam outro diâmetro, que chamamos de diâmetro conjugado.

Diferentemente da abordagem moderna, que utiliza eixos perpendiculares para referir a uma cônica, Apolônio frequentemente empregava pares de diâmetros conjugados como um sistema de coordenadas oblíquo, facilitando sua análise. Ele também mostrou que uma reta traçada da extremidade de um diâmetro, paralela ao diâmetro conjugado, é tangente à cônica. Essa visão, baseada na concepção grega de tangência, contrastava com a abordagem cinemática de Arquimedes.

Além disso, Apolônio estudou transformações de coordenadas e demonstrou que qualquer cônica pode ser referida a diferentes sistemas de eixos. No caso da hipérbole, ao utilizá-la em relação às suas assíntotas, obteve a equação da hipérbole equilátera $xy = c^2$, resultado essencial para desenvolvimentos futuros na física e astronomia.

O livro II expandiu a teoria dos diâmetros conjugados e tangentes, incluindo propriedades geométricas das hipérboles e o uso da “divisão harmônica” para a construção de tangentes. Mesmo sem conhecer todas as limitações das construções com régua e compasso, Apolônio estabeleceu uma base matemática rigorosa para o estudo das cônicas, influenciando significativamente a matemática posterior.

5.3 O lugar geométrico a três e quatro retas

Apolônio considerava o livro III de *As Cônicas* especialmente importante, como ele próprio destacou no prefácio da obra. Nele, desenvolveu teoremas inéditos e fundamentais para a síntese de lugares geométricos sólidos e a determinação de limites, avançando além das tentativas parciais de Euclides.

Um dos problemas centrais abordados é o lugar geométrico a três e quatro retas, que consiste em determinar os pontos cuja posição obedece a uma relação proporcional entre as distâncias a essas retas. Esse problema, que permaneceu relevante de Euclides a Newton, pode ser resolvido modernamente através de equações analíticas, revelando que o lugar geométrico resultante é sempre uma cônica — real ou imaginária, redutível ou irredutível.

No entanto, Apolônio tratou essa questão de forma inteiramente geométrica, desenvolvendo mais de cinquenta proposições cuidadosamente demonstradas antes de chegar ao resultado final. Sua abordagem, baseada em métodos sintéticos, destaca a profundidade e elegância de sua obra.

Séculos depois, Papus generalizou o problema para um número arbitrário de retas, o que inspirou Descartes, em 1637, a aplicá-lo como teste para sua recém-criada geometria analítica. Assim, o estudo

dos lugares geométricos por Apolônio teve um impacto duradouro, influenciando o desenvolvimento da matemática por gerações.

5.4 Intersecção de cônicas

No livro IV de *As Cônicas*, Apolônio explora as diferentes formas em que as secções de um cone podem se encontrar, destacando teoremas inéditos sobre os pontos em que uma secção cônica intersecta os ramos de uma hipérbole, uma ideia inovadora introduzida por ele. Apolônio também responde a críticos que questionavam a utilidade de seus resultados, defendendo que seus teoremas devem ser aceitos pela força de suas demonstrações, assim como muitas outras coisas na matemática.

6 Conclusão

Apolônio de Perga foi uma figura central no desenvolvimento da matemática grega, consolidando a teoria das cônicas e influenciando profundamente a astronomia e a geometria. Seu trabalho, embora parcialmente perdido, deixou um legado que foi retomado por matemáticos islâmicos e renascentistas, culminando na formulação da matemática moderna.

A forma como Apolônio desenvolveu sua matemática, baseada na tradição geométrica grega, reflete a visão do mundo da época, na qual a matemática era uma busca pelo conhecimento absoluto e eterno. Esse caráter abstrato e rigoroso influenciou diretamente o desenvolvimento da matemática como ciência exata, estabelecendo princípios que ainda hoje são utilizados no ensino e na pesquisa.

Por fim, a análise da obra de Apolônio não apenas destaca sua genialidade, mas também demonstra a importância da continuidade histórica na matemática. Suas descobertas, preservadas por diferentes civilizações ao longo dos séculos, ilustram como o conhecimento matemático evolui e se transforma, sendo constantemente reinterpretado e ampliado.

Referências

- [1] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Trad. Helena Castro 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 2012.
- [2] FAUVEL, J; GRAY, J. **The History of Mathematics: A Reader**. Londres: Macmillan, 1990.
- [3] TOOMER, G. J. Apollonius of Perga. In: GILLISPIE, Charles Coulston. **Dictionary of Scientific Biography**. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons, 1970. p. 179-193.



O Ocidente Latino

Gabriel Henrique de Oliveira

UFU, IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
g25henrique@gmail.com

Hernán Roberto Montúfar López

UFU, IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
montufar@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

História da Matemática.
Sequência de Fibonacci.
Séries.

Durante a Idade Média, a matemática na Europa Ocidental sofreu um período de declínio, seguido por um renascimento impulsionado pelo contato com o mundo islâmico e bizantino. Neste texto exploraremos a recuperação do conhecimento matemático no Ocidente Latino, abordando a importância das traduções, o papel de matemáticos como Fibonacci e Jordanus Nemorarius, e os avanços teóricos que prepararam o caminho para o desenvolvimento da ciência moderna.

1 Introdução

Após a queda do Império Romano, o conhecimento matemático entrou em declínio na Europa Ocidental. Durante séculos, as principais fontes de conhecimento foram os mosteiros e pequenas comunidades intelectuais. No entanto, a partir do século XII, um grande esforço de tradução de textos árabes e gregos para o latim impulsionou um renascimento matemático. Este trabalho explora esse período de transformação, analisando os principais matemáticos e suas contribuições.

2 O século da tradução

O século XII é conhecido como o "Século da Tradução" pois, durante esse período, estudiosos europeus traduziram extensivamente obras árabes e gregas para o latim, permitindo a redescoberta de textos clássicos e a assimilação de avanços desenvolvidos no mundo islâmico. De acordo com [1], os principais centros de tradução estavam localizados em Toledo (Espanha) e na Sicília (maior ilha do Mediterrâneo), onde estudiosos cristãos, judeus e muçulmanos trabalharam juntos na recuperação do conhecimento antigo. Entre os tradutores mais notáveis estavam:

- **Gerardo de Cremona**, que traduziu mais de 70 obras científicas, incluindo os *Elementos* de Euclides e textos de Al-Khwarizmi.
- **Adelardo de Bath**, que introduziu conhecimentos matemáticos islâmicos na Europa.
- **Robert de Chester**, responsável pela primeira tradução de um tratado de álgebra para o latim.

3 Abacistas e Algoristas

No período medieval, duas escolas matemáticas disputavam o domínio no comércio e nos cálculos financeiros:

- **Abacistas**: Utilizavam o ábaco e os números romanos para realizar cálculos. Eram seguidores da tradição matemática europeia mais antiga e baseavam-se em métodos visuais e mecânicos para efetuar operações aritméticas.
- **Algoristas**: Defendiam o uso do sistema numérico indo-arábico e dos algoritmos desenvolvidos por matemáticos islâmicos, como Al-Khwarizmi. Esse sistema permitia cálculos mais rápidos e eficientes, principalmente devido ao uso do zero e da notação posicional decimal.

A transição entre essas duas escolas foi gradual, enfrentando resistência por parte dos abacistas, que viam os novos métodos como desnecessários ou difíceis de aprender. No entanto, com a publicação do *Liber Abaci* de Fibonacci em 1202, os números indo-arábicos começaram a se disseminar, demonstrando sua superioridade prática e facilitando cálculos financeiros e científicos.



Figura 1: Representação da disputa entre abacistas e algoristas na obra *Margarita Philosophica* (1508) de Gregor Reisch.

4 Leonardo de Pisa (Fibonacci)

Fibonacci foi um dos matemáticos mais influentes da Idade Média. Entre suas principais contribuições, destacam-se:

4.1 Liber Abaci

Publicada em 1202, foi uma das obras mais influentes da matemática medieval. Esse tratado introduziu e popularizou na Europa o **sistema de numeração indo-arábico**, em substituição ao sistema romano, e apresentou métodos avançados de cálculo que facilitaram transações comerciais e científicas, dentre os quais, se destacam:

- **Sistema de Numeração Indo-Árábico:** Fibonacci demonstrou as vantagens dos algarismos indo-arábicos e do sistema decimal posicional, incluindo o uso do **zero**, que era pouco conhecido na Europa Ocidental.

- **Operações Aritméticas:** Explicou como realizar operações matemáticas básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão, com maior eficiência.
- **Cálculos Comerciais:** Introduziu regras para conversão de moedas, cálculos de juros, proporções e regras de três, facilitando a vida dos mercadores.
- **Frações e Algoritmos:** Introduziu métodos para lidar com frações e cálculos algébricos, antecipando técnicas usadas posteriormente na matemática.

4.1.1 A Sequência de Fibonacci

Fibonacci propôs o seguinte problema sobre a reprodução de coelhos:

Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par de coelhos que se tornam produtivos a partir do segundo mês?

Solução:

Definimos o conjunto

$$A_n = \{C_j | C_j \text{ é um casal de coelhos, para } j = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Seja F_n a cardinalidade do conjunto A_n , ou seja, F_n é o número de casais de coelhos do n -ésimo mês. Como inicialmente temos um casal de coelho, segue que

$$A_1 = \{C_1\} \Rightarrow F_1 = 1.$$

O casal de coelhos C_1 no segundo mês ainda não se reproduz. Portanto

$$A_2 = \{C_1\} \Rightarrow F_2 = 1.$$

No terceiro mês, C_1 gera um novo casal. Daí,

$$A_3 = \{C_1, C_2\} \Rightarrow F_3 = 2.$$

No quarto mês, C_1 gera novamente um novo casal, e C_2 não gera nenhum. Assim,

$$A_4 = \{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow F_4 = 3.$$

No quinto mês, temos dois novos casais, gerados respectivamente por C_1 e C_2 . Logo,

$$A_5 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\} \Rightarrow F_5 = 5.$$

Por recorrência, concluímos que:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_1 = 1, F_2 = 1. \quad (1)$$

Sendo essa a lei de formação da sequência de Fibonacci, que possui aplicações em diversas áreas, como biologia, arquitetura e finanças.

4.2 Liber Quadratorum

Escrito por Fibonacci em 1225, *Liber Quadratorum* ("O Livro dos Números Quadrados") é uma das obras mais avançadas da matemática medieval, focada na teoria dos números. Segundo [1], suas principais contribuições incluem:

- Investigação detalhada das propriedades dos números quadrados e suas relações algébricas.
- Formulação de métodos para encontrar soluções de equações diofantinas, um ramo da teoria dos números.
- Desenvolvimento de métodos indutivos para resolver problemas matemáticos, antecipando técnicas utilizadas no período renascentista.
- Representação de um avanço significativo na aritmética e na álgebra.

5 Jordanus Nemorarius e a Matemática Medieval

Jordanus Nemorarius foi um dos matemáticos mais influentes da Idade Média, contribuindo significativamente para a álgebra e a mecânica matemática. Ele buscou formalizar o raciocínio matemático com maior rigor lógico, antecipando ideias que seriam fundamentais para o desenvolvimento da ciência nos séculos seguintes. Dentre os avanços creditados a Jordanus, destacam-se:

- Autor da obra *De Numeris Datis*, na qual apresentou princípios algébricos inovadores para a época.
- Utilizou uma notação algébrica rudimentar para expressar relações entre números e equações.
- Escreveu *De Ratione Ponderis*, um tratado sobre equilíbrio e centro de gravidade.
- Investigou o comportamento das forças e das alavancas, antecipando conceitos da mecânica clássica.
- Suas ideias foram adotadas e ampliadas por estudiosos da Escola de Oxford e matemáticos renascentistas.

- Sua abordagem lógica ajudou a moldar a matemática europeia e influenciou a física matemática.

Em uma tradução do livro *Os Elementos* feita por Campanus de Novara, que viveu por volta de 1260, houve uma descrição de uma trissecção do ângulo exatamente igual a feita por Jordanus em sua obra *De triangulis*, diferindo apenas pelas letras usadas no diagrama, que na tradução de Campanus são latinas, enquanto na obra de Jordanus são greco-árabicas. A trissecção é essencialmente como se segue.

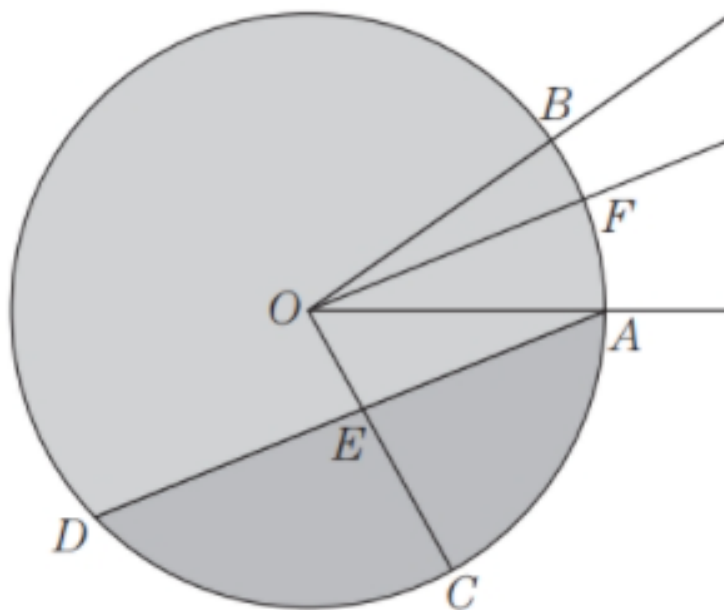


Figura 2: O problema da trissecção do ângulo.

Considere o ângulo AOB , a ser trissectado, colocado com o vértice no centro de um círculo de raio qualquer $OA = OB$. De O trace um raio $OC \perp OB$, e por A passe uma reta AED de tal modo que $DE = AO$. Finalmente, por O trace a reta OF paralela a AED . Então o ângulo FOB é um terço do ângulo AOB , como queríamos.

6 Cinemática Medieval e a Latitude das Formas

Durante a Idade Média, os matemáticos começaram a desenvolver estudos sobre o movimento e suas variações, preparando o caminho para as descobertas de Galileu e Newton. A Escola de Oxford e os chamados "Calculatores" desempenharam um papel fundamental no avanço desses conceitos. Os trabalhos mais relevantes feitos nesse período foram:

- O estudo de conceitos como velocidade e aceleração.
- Desenvolvimento de métodos matemáticos para descrever variações de grandezas físicas.
- Pesquisas que contribuíram para o entendimento da mecânica e influenciaram o pensamento científico renascentista.

- Desenvolvimento do conceito de Latitude das Formas no século XIV.
- Estudo da variação contínua de grandezas, como velocidade e densidade.
- Representações gráficas das mudanças dessas grandezas ao longo do tempo.

Os avanços desse período tiveram impacto duradouro na matemática e na física, influenciando diretamente os estudos de movimento que culminariam nas leis da mecânica clássica.

7 Oresme e as séries infinitas

No século *XIV* os matemáticos apresentaram grande interesse pelas séries infinitas, apesar de faltar-lhes técnicas algébricas e geométricas para um bom desenvolvimento teórico e da análise destas séries. Dentre os matemáticos que estudaram o assunto nesse período, destaca-se Nicole Oresme (c. 1320–1382), considerado um dos pensadores mais importantes da Idade Média. Segundo [2], Oresme contribuiu para o melhor entendimento das séries infinitas, chegando a apresentar uma demonstração de que a série harmônica é divergente, cuja a ideia se assemelha com a que veremos a seguir.

Definição 7.1. Chamamos de *série harmônica* a série

$$SH = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Teorema 7.2. A *série harmônica* diverge.

Prova:

Vejamos que

$$SH = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdots$$

Vamos mostrar que uma série S menor do que a série harmônica diverge, o que implica portanto, que SH diverge.

Definiremos a série S substituindo os termos da série harmônica da seguinte forma: se $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2^i}$, com i sendo o ínfimo do conjunto $A_n = \{j \in \mathbb{N} | \frac{1}{j} \geq \frac{1}{2^i}\}$ e n sendo um número natural maior que 2, então substituímos $\frac{1}{n}$ na série por $\frac{1}{2^i}$. Temos então que:

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) + 8\left(\frac{1}{16}\right) + 16\left(\frac{1}{32}\right) \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \frac{16}{32} \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2^n} \end{aligned}$$

Podemos então reescrever S como

$$S = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{2}.$$

Claramente $S \leq SH$, pois da maneira que construímos a sequência S , sempre que uma troca é feita, estamos trocando um termo da SH por um termo menor na soma. Como $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2}$ é uma série constante, segue que $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2} \rightarrow \infty$, logo $S = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{2} \rightarrow \infty$. Portanto, como S diverge e $S \leq SH$, pelo teste da comparação, temos que a série harmônica diverge.

8 Levi ben Gerson e a Trigonometria

Levi ben Gerson (1288–1344), também conhecido como Gersonides, foi um matemático e astrônomo medieval que fez importantes contribuições para a trigonometria e a astronomia. Suas principais realizações incluem:

- Desenvolvimento de tabelas trigonométricas precisas baseadas na função seno, facilitando cálculos astronômicos.
- Uso de métodos trigonométricos para resolver problemas geométricos e astronômicos.
- Construção do bastão de Jacob, um instrumento inovador utilizado para medir ângulos celestes, auxiliando na navegação e na observação astronômica.
- Influência sobre matemáticos posteriores, ajudando a consolidar a trigonometria como ferramenta essencial para a astronomia e a cartografia.

9 Considerações finais

O Ocidente Latino se beneficiou da interação com o mundo islâmico e bizantino para recuperar e expandir o conhecimento matemático. O século XII foi crucial para a disseminação de textos matemáticos, permitindo o avanço da álgebra, trigonometria e aritmética. Matemáticos como Fibonacci, Jordanus Nemorarius e Levi ben Gerson desempenharam papéis fundamentais na construção do conhecimento que influenciaria a ciência renascentista e a Revolução Científica.

Referências

- [1] C. B. Boyer, **História da Matemática**, 12ª edição, São Paulo: Edusp, 2008.
- [2] V. J. Katz, **A History of Mathematics**, 3ª edição, Addison-Wesley, 2008.
- [3] Euclides, **Os Elementos**, Edusp, 2009.



O Problema de Napoleão com Números Complexos

Elizeu Gonçalves Muniz Neto

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
elizeugmnufu@ufu.br

Guilherme Chaud Tizziotti

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
guilhermect@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Números Complexos.
Trigonometria.
Teorema de Napoleão.

A geometria no plano pode ser abordada com números complexos devido a sua natureza, pois a representação geométrica destes números é constituída de forma semelhante a um plano cartesiano, sendo este menos prático para se fazer operações se comparado aos números complexos. Apresentaremos um teorema da área da trigonometria, o Teorema de Napoleão, e a sua demonstração usando a geometria complexa, introduzindo definições e resultados importantes para chegarmos à demonstração desejada. Os resultados mostram que os números complexos podem ser usados para comprovar resultados geométricos no \mathbb{R}^2 , logo, se vê favorável o uso destes números para uma abordagem mais prática e algebricamente mais fácil ao se trabalhar com a geometria plana.

1 Introdução

Dentro da matemática, diversos problemas e situações podem ser trabalhados no \mathbb{R}^2 , desde a trigonometria e a geometria em geral até o gráfico de funções. Em casos onde a efetuação de cálculos é necessária, o uso de coordenadas para tal propósito pode ficar bem complicado de ser manejado, então este trabalho traz uma demonstração do Teorema de Napoleão usando números complexos como forma de incentivar o uso destes números para a resolução de problemas trabalhados no plano. O conjunto dos números complexos, \mathbb{C} , é construído da seguinte forma: seus elementos são os mesmos do \mathbb{R}^2 e sejam z_1 e z_2 elementos quaisquer de \mathbb{R}^2 , onde $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$. Definimos as operações de adição e multiplicação da seguinte forma:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{R}^2$$

Então, \mathbb{C} é o \mathbb{R}^2 munido das operações de adição e multiplicação que acabamos de definir, onde seus elementos são chamados de números complexos.

Considerando o conjunto $\mathbb{R} \times 0$ com as operações de \mathbb{C} , a função

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}, f(x) = (x, 0)$$

é bijetiva e também temos que $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ e $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$.

Então, devido à bijeção mencionada, temos que cada par $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ pode ser associado a um único número real, sendo ele, x , e vice-versa. Definindo i como o número associado a $(0, 1)$, temos que

$$\begin{aligned} z &= (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \\ &= x + yi = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy. \end{aligned}$$

Então, temos que qualquer número complexo z dado por um par (x, y) pode ser unicamente representado na forma $x + yi$, onde x e y são números reais e $i^2 = -1$. Esta forma de representar um número complexo z é chamada de representação algébrica de z . Também há a representação polar de um número complexo que é dada em função de seu módulo e o ângulo feito pelo segmento de reta que começa na origem e termina no ponto de sua coordenada correspondente no \mathbb{R}^2 com o eixo x . Com estas representações de pontos do plano, é mais prática a efetuação de cálculos necessários para a resolução de problemas no \mathbb{R}^2 e o incentivo que este trabalho traz é o uso de números complexos para se trabalhar com estas questões no plano, trazendo uma facilidade em relação à representação usual de pontos no \mathbb{R}^2 e uma diversidade de resultados que emergem dos números complexos para uma abrangência maior de formas de se resolverem tais problemas. As definições e resultados que aparecem no decorrer deste trabalho podem ser vistas em [1].

2 Metodologia

2.1 Teorema de Napoleão

Este trabalho tem como um dos objetivos demonstrar o Teorema de Napoleão, que diz:

Seja ABC um triângulo positivamente orientado. A partir de cada lado deste triângulo são construídos triângulos equiláteros positivamente orientados, $AC'B$, $BA'C$ e $CB'A$. Então, os centroides destes triângulos são vértices de um triângulo equilátero.

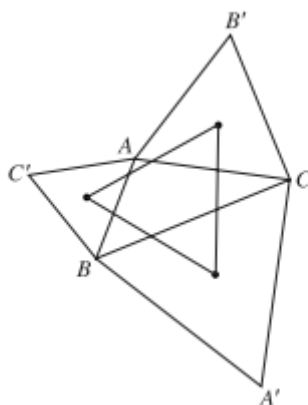


Figura 1: Teorema de Napoleão.

2.2 Forma trigonométrica, rotação de um ponto

Para se demonstrar o Teorema de Napoleão, usaremos resultados sobre rotação de um ponto no plano utilizando números complexos. Para isso precisamos dos conceitos que serão explicados a seguir. Consideremos O como a origem do plano cartesiano. A imagem geométrica de um número complexo $z = x + yi$, que chamaremos de M , é o ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Definimos o módulo de um número complexo $z = x + yi$, chamado de r , como sendo $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Geometricamente, este valor representa a distância da imagem geométrica de z até a origem do plano cartesiano, ou seja, o comprimento do vetor \overrightarrow{OM} .

Seja θ o menor ângulo orientado no sentido anti-horário entre o eixo x e vetor \overrightarrow{OM} , este ângulo é chamado argumento polar do número z e é representado por $\arg(z)$.

O par (r, θ) é chamado coordenada polar do ponto M .

Além do mais, temos que a função

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (0, \infty) \times [0, 2\pi), \quad h((x, y)) = (r, \theta)$$

é bijetiva, o que garante que cada número complexo está unicamente associado à coordenada polar de sua imagem geométrica. Logo não há dois números complexos distintos com o mesmo módulo e o mesmo argumento.

Para cada ponto M há uma única interseção P da semirreta \overrightarrow{OM} com o círculo unitário centrado na origem. O ponto P tem o mesmo argumento polar θ .

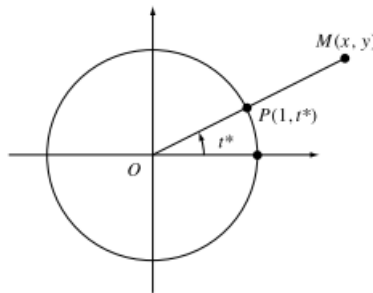


Figura 2: Círculo unitário e pontos M e P em um plano

Usando as definições de seno e cosseno, temos que

$$x = r \cdot \cos \theta \text{ e } y = r \cdot \sin \theta$$

Então, para cada número $z = x + yi$, podemos escrever o que é chamado a sua representação polar da seguinte maneira:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

onde $r \in [0, \infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ são as coordenadas polares da imagem geométrica de z .

Esta forma se chama representação polar ou forma trigonométrica do número complexo.

Com a representação polar já introduzida, podemos ver a rotação de um ponto qualquer no \mathbb{R}^2 de um ângulo dado em torno de um outro ponto. Para isto, definimos o seguinte número complexo, levando em consideração o ângulo α :

$$\varepsilon = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$$

Seja $z = x + yi$ um número complexo qualquer e M a sua imagem geométrica. Temos que o produto $z \cdot \varepsilon = r(\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha))$, onde $|z\varepsilon| = r$ e $\arg(z\varepsilon) = \arg(z) + \alpha$. Logo o produto $z \cdot \varepsilon$ tem como imagem geométrica o ponto cuja distância dele até a origem tem o mesmo valor que o módulo de z e têm argumento polar igual a $\theta + \alpha$, o que corresponde à rotação de M de um ângulo α em torno da origem.

Com este resultado, podemos afirmar o seguinte: Suponha que o ponto C é a rotação de B de um ângulo α em torno do ponto A.

Proposição 2.1. Se a, b, c são as coordenadas dos pontos A, B, C , respectivamente, então

$$c = a + (b - a)\varepsilon, \text{ onde } \varepsilon = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha).$$

Demonstração. A translação do vetor $-a$ mapeia os pontos A, B, C nos pontos O, B', C' , com as coordenadas complexas $O, b-a, c-a$, respectivamente. O ponto C' é a imagem de B' sobre a rotação do ângulo α em torno da origem, então $c-a = (b-a)\varepsilon$, ou seja, $c = a + (b-a)\varepsilon$. ■

Também precisaremos da definição de triângulo orientado, tanto positivamente quanto negativamente, que se dá como se segue:

Definição 2.2. Um triângulo é orientado se a ordem de seus vértices é especificada. Ele é orientado positivamente se seus vértices são orientados no sentido anti-horário. Se não, dizemos que ele é orientado negativamente.

Consideremos dois pontos distintos $M_1(z_1)$ e $M_2(z_2)$ que não sejam a origem de um plano complexo. O ângulo $\widehat{M_1OM_2}$ é orientado se os pontos M_1 e M_2 estão ordenados no sentido anti-horário.

Agora, com essas definições, temos o seguinte resultado sobre triângulos equiláteros:

Proposição 2.3. Sejam z_1, z_2, z_3 as coordenadas dos vértices A_1, A_2, A_3 de um triângulo orientado positivamente. As seguintes afirmações são equivalentes:

- a) $A_1A_2A_3$ é um triângulo equilátero;
- b) $z_3 - z_1 = \varepsilon(z_2 - z_1)$, onde $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$;
- c) $z_2 - z_1 = \varepsilon(z_3 - z_1)$, onde $\varepsilon = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$;
- d) $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$, onde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

Demonstração. $A_1A_2A_3$ é um triângulo equilátero e positivamente orientado se e, somente se A_3 é obtido da rotação de A_2 em um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ em torno de A_1 , ou seja,

$$z_3 = z_1 + \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_2 - z_1),$$

então a) \Leftrightarrow b). A rotação em um ângulo de $\frac{5\pi}{3}$ radianos em torno de A_1 leva A_3 em A_2 . Analogamente ao caso anterior podemos ver que a) \Leftrightarrow c).

Para provar que b) \Leftrightarrow d), veja que b) é equivalente a

$$z_3 = z_1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_2 - z_1) = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2.$$

Então,

$$\begin{aligned} z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 &= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_3 = \\ &= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2\right] \end{aligned}$$

$$= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 - z_1 + \left(\frac{1}{2 - i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)z_2 = 0,$$

ou seja $b) \Leftrightarrow d)$. ■

E, agora, podemos demonstrar o Teorema de Napoleão:

Demonstração. Sejam a, b, c as coordenadas dos pontos A, B, C , respectivamente. Usando a proposição anterior, nós temos que

$$a + c'\varepsilon + b\varepsilon^2 = 0, b + a'\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0, c + b'\varepsilon + a\varepsilon^2 = 0,$$

onde a', b', c' são as coordenadas dos pontos A', B', C' , respectivamente.

Os centroides dos triângulos $A'BC, AB'C, ABC'$ têm coordenadas

$$a'' = \frac{1}{3}(a' + b + c), b'' = \frac{1}{3}(a + b' + c), c'' = \frac{1}{3}(a + b + c'),$$

respectivamente. Nós temos que checar se $c'' + a''\varepsilon + b''\varepsilon^2 = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} 3(c'' + a''\varepsilon + b''\varepsilon^2) &= (a + b + c') + (a' + b + c)\varepsilon + (a + b' + c)\varepsilon^2 \\ &= (b + a'\varepsilon + c\varepsilon^2) + (c + b'\varepsilon + a\varepsilon^2)\varepsilon + (a + c'\varepsilon + b\varepsilon^2)\varepsilon^2 = 0. \end{aligned}$$
■

3 Considerações finais

O trabalho desenvolvida na Iniciação Científica tem como objetivo trazer à luz novos métodos de resoluções usando números complexos, principalmente problemas da geometria plana, cujas soluções resolvidas por meio de coordenadas se tornam mais difíceis de serem trabalhadas em comparação com a ideia trazida por meio deste trabalho, onde podemos resolver algebricamente essas questões. E os estudos em desenvolvimento têm como finalidade o aprofundamento no tema.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PICME da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao CNPQ pelo fomento.

Referências

- [1] ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorin. **Complex Numbers from A to... Z**. Boston: Birkhäuser: 2014



Os três famosos problemas da Grécia Antiga

Oscar Hailuo Liu Zhang

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
oscar.zhang@ufu.br

Hernán Roberto Montúfar López

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
montufar@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Duplicação do cubo.
Trissecção do ângulo.
Quadratura do círculo.

Os três famosos problemas da Grécia Antiga são desafios matemáticos clássicos que intrigaram os gregos e matemáticos por séculos. Eles foram propostos na forma de construções geométricas utilizando apenas régua não graduada e compasso. Os problemas são a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo. Apesar de serem insolúveis nas condições impostas pelos gregos, esses problemas levaram ao aperfeiçoamento e ao desenvolvimento de novas áreas da matemática. Aqui falaremos sobre esses problemas e explicaremos por que são insolúveis.

1 Introdução

A matemática grega antiga, berço de muitos dos conceitos e fundamentos que utilizamos até hoje, nos legou um conjunto de desafios que se tornaram verdadeiros marcos na história da disciplina. Os chamados "três problemas clássicos" - a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo - transcenderam o tempo, mantendo-se como enigmas a serem decifrados por gerações de matemáticos, [1].

Esses problemas, aparentemente simples em sua formulação, revelaram-se extraordinariamente complexos, desafiando a capacidade de resolução dos maiores intelectuais da época. A busca por suas soluções impulsionou o desenvolvimento de novas áreas da matemática, como a álgebra e a geometria, e culminou na prova de sua impossibilidade de resolução utilizando apenas régua e compasso, as ferramentas tradicionais da geometria grega, [2].

Apesar dos inúmeros esforços, foi apenas no século XIX que se provou matematicamente a impossibilidade dessas construções dentro das regras estabelecidas, [3]. No entanto, a busca por soluções contribuiu significativamente para o avanço de diversas áreas da matemática, como a teoria dos números e a álgebra abstrata.

Aqui, exploraremos a fundo cada um desses problemas, desvendando seus mistérios, analisando suas implicações e celebrando o legado de desafio e aprendizado que eles representam.

2 A Natureza dos Problemas e Sua Impossibilidade

Para solucionar questões de geometria, os gregos antigos seguiam certas regras, nas quais só era permitido usar régua e compasso.

1. Ferramentas permitidas:

Régua não graduada: Serve apenas para traçar linhas retas entre dois pontos, sem medir distâncias.

Compasso: Permite traçar círculos e transferir distâncias, mas sem medi-las explicitamente.

2. Operações permitidas:

Traçar uma reta entre dois pontos dados.

Desenhar um círculo com centro em um ponto e raio até outro ponto.

Determinar pontos de interseção entre retas e círculos.

Transferir distâncias com o compasso (marcar um segmento em outra posição).

3. Construções Fundamentais:

Com essas ferramentas, é possível realizar diversas construções, como:

- Mediatrix de um segmento:

A mediatrix é uma reta perpendicular a um segmento, que o divide ao meio.

Para construí-la, traçam-se duas circunferências com o mesmo raio centradas nas extremidades do segmento.

A mediatriz é a reta que passa pelos pontos de interseção das circunferências.

- Bissetriz de um ângulo:

A bissetriz é uma reta que divide um ângulo em duas partes iguais.

Para construí-la, traça-se uma circunferência centrada no vértice do ângulo.

Em seguida, traçam-se duas circunferências com o mesmo raio centrados nos pontos de interseção da primeira circunferência com os lados do ângulo.

A bissetriz é a reta que passa pelo vértice do ângulo e pelo ponto de interseção das duas últimas circunferências.

- Retas paralelas:

Para construir retas paralelas, pode-se utilizar a construção da mediatriz e da bissetriz, ou construir ângulos correspondentes congruentes.

Analogamente também podemos obter:

- Triângulos:

É possível construir triângulos de diversos tipos, como equiláteros, isósceles e escalenos, utilizando as medidas dos lados ou dos ângulos.

- Quadrados e outros polígonos regulares:

Com régua e compasso, é possível construir diversos polígonos regulares, como quadrados, hexágonos e octógonos.

- Circunferências tangentes:

É possível construir circunferências tangentes entre si, ou tangentes a retas dadas.

Os três problemas envolvem construções geométricas que, à primeira vista, parecem plausíveis, mas que exigem operações matemáticas impossíveis de serem realizadas apenas com régua e compasso.

- Quadratura do Círculo: O desafio consiste em construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado. No entanto, essa construção requer a extração da raiz quadrada de π , tornando a tarefa impossível.
- Duplicação do Cubo: O problema envolve a construção de um cubo com o dobro do volume de um cubo dado. Isso implica encontrar a raiz cúbica de 2, uma operação impossível dentro das regras da geometria clássica.
- Trissecção do Ângulo: O problema consiste em dividir um ângulo qualquer em três partes iguais. Embora seja possível para alguns ângulos específicos, não há um método geral que funcione

para todos os ângulos usando apenas régua e compasso, pois isso requer a solução de equações cúbicas.

3 Os Três Problemas Clássicos da Grécia Antiga

Um Legado de Mistério e Desafio:

3.1 Quadratura do Círculo

Hipócrates de Quio, matemático da Grécia Antiga que viveu no século V a.C., é conhecido por suas contribuições à geometria, em particular por seu trabalho na quadratura de lúnulas e suas tentativas de resolver o problema da quadratura do círculo.

Dizem que Anaxágoras de Clazômenas conseguiu resolver o problema enquanto estava preso, porém como ele não deixou registros dos seus cálculos, não sabemos como ele calculou, nem se ele realmente fez com apenas régua e compasso.

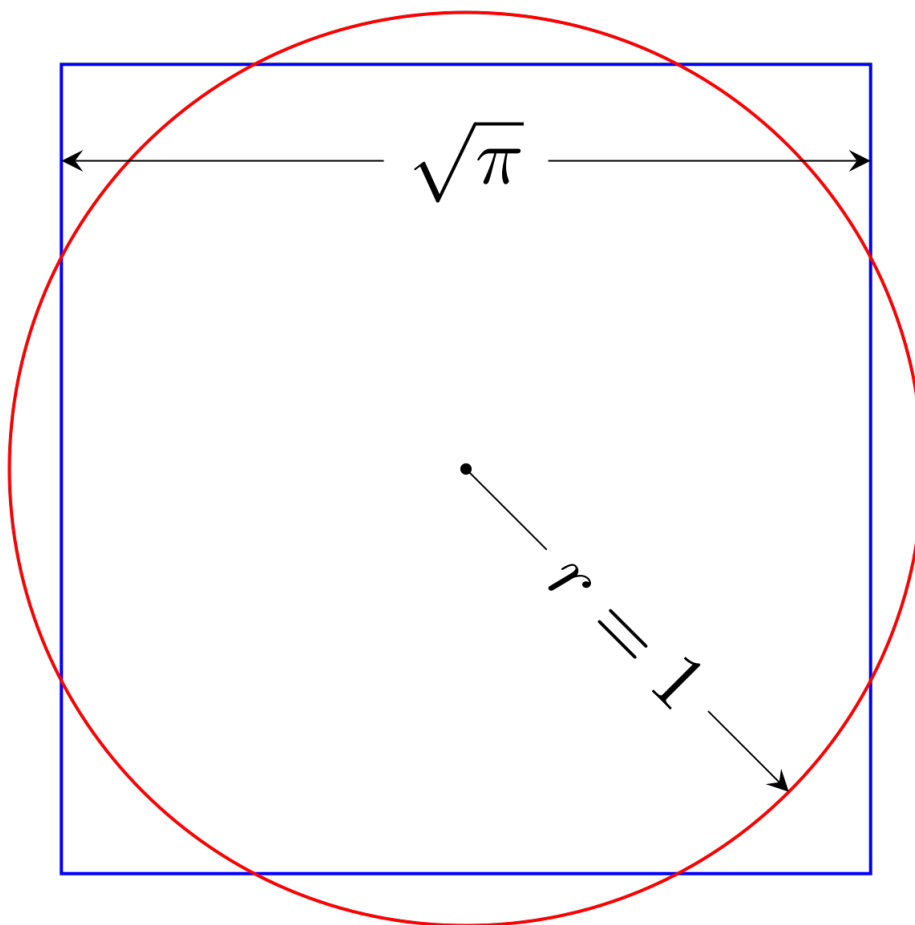


Figura 1: Quadratura do Círculo

Suponha que temos um círculo de raio r . A área desse círculo é dada por:

$$A = \pi r^2.$$

Para encontrar um quadrado de mesma área, seu lado s deve satisfazer a equação:

$$s^2 = \pi r^2.$$

Logo, o lado do quadrado seria:

$$s = r\sqrt{\pi}.$$

O problema está no fato de que π é um número transcendental, ou seja, não pode ser obtido por operações algébricas finitas. Como consequência, a construção do quadrado equivalente é impossível utilizando apenas régua e compasso.

3.2 Duplicação do Cubo

Segundo a lenda, a cidade de Delos foi atingida por uma terrível peste. Desesperados, os habitantes consultaram o famoso oráculo de Apolo na ilha de Delos. O oráculo revelou que a peste cessaria se eles dobrassem o tamanho do altar cúbico de Apolo.

Os habitantes de Delos, acreditando que o oráculo pedia um altar com o dobro do volume, construíram um novo altar com o dobro das dimensões lineares do original. No entanto, dobrar as dimensões de um cubo não dobra seu volume, mas o multiplica por oito ($2 \times 2 \times 2 = 8$).

Arquitas de Tarento, um filósofo, matemático, estadista e estrategista militar grego que viveu no século IV a.C., é conhecido por ter oferecido uma solução engenhosa para o problema da duplicação do cubo.

A ideia de Arquitas era encontrar um ponto no espaço que satisfizesse simultaneamente as condições impostas pelas três superfícies: o cilindro, o cone e o toro. Esse ponto permitiria construir a aresta do cubo duplicado.

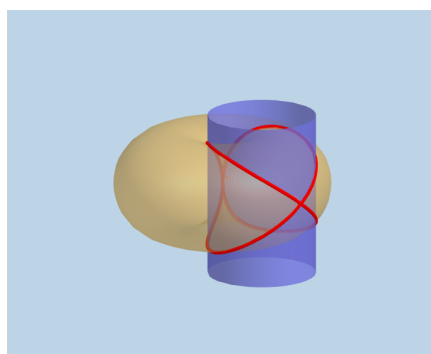


Figura 2: Curva de Arquitas

Se tivermos um cubo de aresta a , seu volume é dado por:

$$V = a^3.$$

Duplicar esse volume significa encontrar um novo cubo com volume $2V$. Seja x a aresta do novo cubo, então:

$$x^3 = 2V = 2a^3.$$

Portanto, x deve ser:

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

No entanto, a raiz cúbica de 2 não pode ser construída apenas com régua e compasso, pois envolve soluções de equações cúbicas, impossíveis dentro da geometria clássica grega.

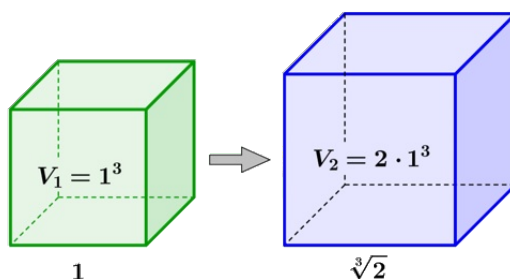


Figura 3: Duplicação do Cubo

3.3 Trisseção do Ângulo

Hípias de Elis, um sofista e matemático grego do século V a.C., é conhecido por sua invenção da quadratriz.

Imagine um quadrado ABCD. Um segmento de reta gira uniformemente em torno do ponto A, começando na posição AB e terminando na posição AD. Ao mesmo tempo, outro segmento de reta se move uniformemente de BC para AD, sempre perpendicular a AD. A quadratriz é a curva traçada pelo ponto de interseção desses dois segmentos em movimento.

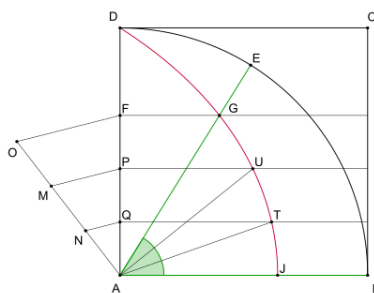


Figura 4: A Quadratriz de Hípias

Considere um ângulo de 60° . O objetivo é dividi-lo em três ângulos de 20° cada, utilizando apenas régua e compasso. No entanto, a construção de um ângulo de 20° a partir de uma divisão exata requer a solução da equação cúbica:

Sabemos que:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Usando a fórmula do cosseno do ângulo triplo:

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Substituindo $x=20^\circ$, temos:

$$\cos 60^\circ = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ.$$

Substituindo $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, obtemos a equação cúbica:

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}.$$

Ou seja,

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0.$$

onde $x = \cos 20^\circ$.

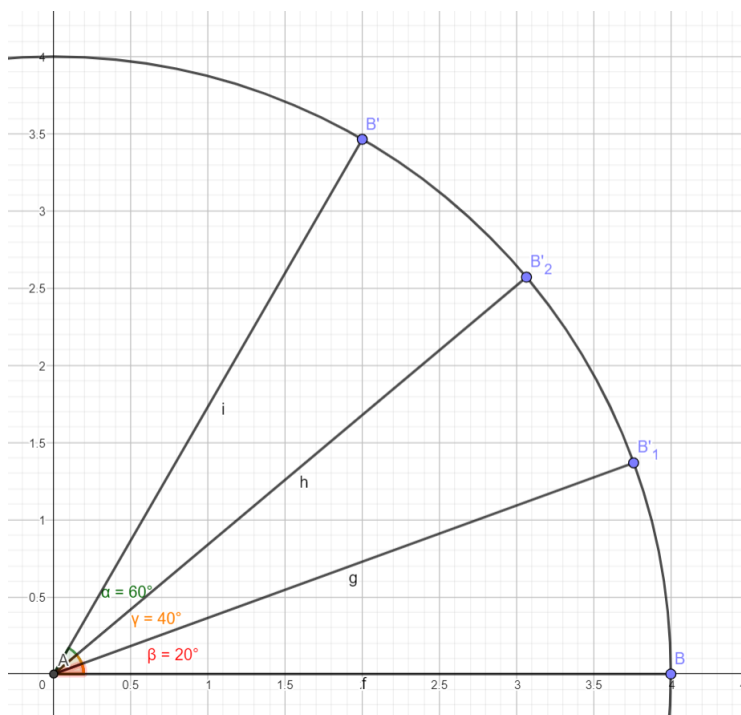


Figura 5: Trissecção do Ângulo

Essa equação cúbica não pode ser resolvida apenas com operações geométricas permitidas pelos gregos, tornando a trisseção impossível para ângulos arbitrários.

4 Considerações finais

Estes fatos demonstram como os três problemas envolvem conceitos avançados que vão além das possibilidades da matemática da época, exigindo ferramentas algébricas e teóricas que só foram desenvolvidas séculos depois.

Referências

- [1] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.
- [2] BOYER, Carl; MERZBACH, Uta. **História da matemática**. 3ª Edição. São Paulo: Blucher, 2012.
- [3] REZENDE, Eliane; QUEIROZ, Maria. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Coleção Matemática Universitária. Campinas: Unicamp, 2000.



Possibilidades metodológicas na pesquisa em Educação Matemática: a revisão sistemática de literatura

Matheus Carvalho Carrijo Silveira

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
matheuscarrijo@ufu.br

Fabiana Fiorezi de Marco

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
fabiana.marco@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Educação Matemática.
Metodologia de pesquisa.
Revisão Sistemática da literatura.

O objetivo deste trabalho é apresentar e explicar uma compreensão sobre a metodologia revisão sistemática da literatura como possibilidade de pesquisa, em especial na área de Educação Matemática e, para isso, discutimos alguns fundamentos teóricos sobre tal metodologia. Essa metodologia foi adotada na pesquisa do trabalho de conclusão de curso do primeiro autor, a fim de estudar como um conceito da psicologia é abordado nas pesquisas em Educação Matemática. A expansão da produtividade acadêmica está diretamente ligada às oportunidades proporcionadas pelo uso das tecnologias digitais na produção e disseminação do conhecimento científico. Diante desse cenário, a seleção criteriosa de trabalhos para pesquisa torna-se mais complexa à medida que o volume de registros aumenta, aspecto importante a ser considerado por pesquisadores, especialmente os iniciantes. Ao longo deste trabalho, buscamos não apenas apresentar essa abordagem metodológica, mas também destacar sua relevância para a organização e síntese do conhecimento na área. A partir da discussão de referenciais teóricos, evidenciamos que uma revisão sistemática bem conduzida requer critérios rigorosos e etapas bem definidas, permitindo maior confiabilidade e credibilidade aos resultados obtidos.

1 Introdução

O crescimento exponencial das publicações nas Ciências da Educação na era digital intensifica o debate sobre a validade, credibilidade e confiabilidade dos resultados e análises em revisões de literatura. A expansão da produtividade acadêmica está diretamente ligada às oportunidades proporcionadas pelo uso das tecnologias digitais na produção e disseminação do conhecimento científico. Diante desse cenário, a seleção criteriosa de trabalhos para pesquisa torna-se mais complexa à medida que o volume de registros aumenta. Além disso, surge o desafio de estabelecer parâmetros para definir o que pode ser considerado cientificamente relevante e adequado ao escopo de uma revisão de literatura (Ramos; Faria; Faria, 2014).

No que se refere à relevância das revisões de literatura, conforme apontado por Galvão e Ricarte (2019), há diversos motivos que justificam sua ampla realização e busca pela comunidade acadêmica. Entre eles, destacam-se: (1) a prevenção da duplicação de pesquisas; (2) a identificação de falhas em estudos anteriores; (3) a possibilidade de familiarização com métodos e técnicas apropriados para investigações com características específicas; (4) a detecção de lacunas de pesquisa e potenciais contribuições futuras para a área; (5) a formulação de novos problemas, hipóteses e metodologias inovadoras; e (6) a otimização dos recursos das instituições que financiam a pesquisa científica.

O objetivo deste trabalho é apresentar e explicar uma compreensão sobre a metodologia revisão sistemática da literatura como possibilidade de pesquisa, em especial na área de Educação Matemática e, para isso, discutimos alguns fundamentos teóricos sobre tal metodologia. Essa metodologia foi adotada na pesquisa do trabalho de conclusão de curso do primeiro autor, a fim de estudar como um conceito da psicologia é abordado nas pesquisas em Educação Matemática (Silveira; Marco, 2025).

2 Desenvolvimento

Sobre o protocolo do modelo de pesquisa, Ramos, Faria e Faria (2014) propõem os seguintes tópicos: objetivos, equações de pesquisa pela definição dos operadores booleanos, âmbito, critérios de inclusão, critérios de exclusão, critérios de validade metodológica, resultados, tratamento de dados. Os autores reforçam que todas as etapas da pesquisa sejam registradas por dois motivos: para que ela possa ser reaplicada por outro investigador e para que seja possível verificar que o processo a seguir

segue e respeita o plano descrito em todos seus aspectos, estabelecidos anteriormente. Além disso, sobre o tratamento de dados, reforçam a importância dessa etapa para filtrar, analisar e descrever criticamente os resultados de cada produção selecionada.

De forma resumida, Galvão e Ricarte (2019, p. 3) definem a revisão sistemática de literatura como “[...] uma pesquisa científica composta por seus próprios objetivos, problemas de pesquisa, metodologia, resultados e conclusão, não se constituindo apenas como mera introdução de uma pesquisa maior, como pode ser o caso de uma revisão de literatura de conveniência”. Assim, a principal característica de uma revisão sistemática é empregar uma metodologia rigorosa e transparente, para que a literatura encontrada seja minimamente enviesada. Ou seja, no processo, as publicações científicas sobre o tema em questão são exaustivamente selecionadas (Ramos; Faria; Faria, 2014).

Siddaway, Wood e Hedges (2019) classificam as revisões sistemáticas de literatura em três grupos: meta-análises, revisões narrativas e meta-sínteses. Quando o revisor aborda os trabalhos selecionados quantitativamente, de forma a reunir estudos com resultados semelhantes ou que possuem o mesmo desenho de pesquisa e que testaram a mesma hipótese, então ele faz uso da meta-análise. Já as revisões narrativas sintetizam os resultados de estudos quantitativos que possuem diferentes metodologias e/ou fundamentações teóricas. Estas podem fornecer uma descrição histórica do desenvolvimento da pesquisa sobre um tema. A meta-síntese, também denominada meta-etnografia, é apropriada quando se deseja integrar a pesquisa qualitativa e seu objetivo é sintetizar pesquisas qualitativas sobre um tópico específico (Barbosa, 2018).

Além dos três tipos de revisão sistemática propostos por Siddaway, Wood e Hedges (2019), muitos pesquisadores têm utilizado a revisão de caráter misto, que “identifica, seleciona, avalia e sintetiza simultaneamente estudos qualitativos, estudos quantitativos e estudos mistos” (Galvão; Ricarte, 2019, p. 4). Galvão, Pluye e Ricarte (2017) sintetizam quatro tipos de revisões mistas: revisão mista de convergência quantitativa, revisão mista de convergência qualitativa, revisão mista sequencial exploratória e revisão mista sequencial explanatória.

A revisão mista de convergência quantitativa é aquela que transforma os resultados dos estudos qualitativos, quantitativos e de estudos empregando métodos mistos em achados quantitativos (sejam variáveis ou valores). Esse tipo de revisão é aplicável quando os estudos selecionados mencionam grande número de participantes.

A revisão mista de convergência qualitativa é aquela que transforma os resultados dos estudos qualitativos, estudos quantitativos e de estudos empregando métodos mistos em

achados qualitativos (por exemplo, em temas). Esse tipo de revisão é aplicável quando os estudos analisados possuem amostras pequenas e estão voltados para desenvolver, refinar e revisar um quadro conceitual, por exemplo.

A **revisão mista sequencial exploratória** é composta por duas etapas. Na etapa 1, os resultados dos estudos qualitativos, quantitativos e dos estudos empregando métodos mistos são transformados em achados qualitativos usando, por exemplo, a análise temática. Na etapa 2, os resultados quantitativos são tabulados e comparados, desde que haja uma entidade comum entre os estudos quantitativos.

A **revisão mista sequencial explanatória** é empregada nos casos em que se quer medir os efeitos de ações, intervenções ou programas (etapa 1) e explicar diferenças em seus efeitos (etapa 2). Nessa modalidade de revisão, a integração ocorre entre as etapas quantitativa e qualitativa, na medida em que a síntese quantitativa (etapa 1) fornece subsídios para a síntese qualitativa (etapa 2), e na interpretação dos achados das duas etapas (Galvão; Ricarte, 2019, p. 4-5, grifo nosso).

Por fim, Galvão e Ricarte (2019, p. 12) sugerem que as revisões sistemáticas sejam elaboradas por, pelo menos, três pesquisadores. “Dois deles aplicarão os critérios que foram estabelecidos no início da revisão. Um terceiro pesquisador será o árbitro caso haja uma seleção discrepante”.

Para Donato e Donato (2019, p. 1-2), existem alguns critérios essenciais para que uma revisão de literatura seja considerada sistemática: (1) deve ser exaustiva; (2) deve ter uma metodologia rigorosa; (3) deve tentar encontrar todos os artigos relevantes sobre o tópico; (4) pelo menos duas pessoas devem estar envolvidas, especialmente para triagem de artigos. Nesse sentido, as autoras também elencam etapas desse processo:

1. Formular uma questão de investigação;
2. Produzir um protocolo de investigação e efetuar seu registro;
3. Definir critérios de inclusão e exclusão;
4. Desenvolver uma estratégia de pesquisa e pesquisar a literatura;
5. Seleção dos estudos;
6. Avaliação da qualidade dos estudos;
7. Extração dos dados;
8. Síntese dos dados e avaliação da qualidade da evidência;
9. Disseminação dos resultados – publicação.

Em concordância com as concepções apresentadas, para Khan *et al.* (2003), para que uma revisão de literatura se torne sistemática ela precisa partir de uma pergunta bem formulada, obter estudos relevantes, avaliar sua qualidade e sintetizar os resultados a partir de uma metodologia explícita, ou seja, detalhadamente descrita. Em suma, é necessário que seja feita de tal forma que seja possível que outro pesquisador reaplique a revisão em outro conjunto de dados (Donato; Donato, 2019).

Diante do exposto, é necessário discutir a revisão sistemática no contexto da pesquisa em Educação Matemática. Nesse sentido, Mendes e Pereira (2020), consideram que a diferença entre estado da arte, estado do conhecimento e revisão sistemática de literatura pode surgir em relação ao alcance de materiais encontrados no estado da arte e na forma de pesquisar no estado do conhecimento. Por isso, “[...] é perfeitamente possível que haja um estado da arte que utilizou pressupostos da revisão sistemática da literatura para buscar os trabalhos” (Mendes; Pereira, 2020, p. 202). Sobre os critérios de elegibilidade, os quais servirão para a inclusão ou exclusão de trabalhos do conjunto de dados obtidos, eles devem ser definidos considerando-se a pergunta de pesquisa e “[...] cada um dos critérios adotados deve ser justificado” (Mendes; Pereira, 2020, p. 203).

Para Mendes e Pereira (2020, p. 209),

[...] a revisão sistemática consiste em sistematizar aspectos de interesse contidos na literatura tomada como referência, de modo a seguir uma organização e um processo de seleção que evidencie o que foi feito para, posteriormente, ter possibilidade de apontar rumos de investigações.

Mendes e Pereira (2020) propõe uma série de etapas para os procedimentos de uma revisão sistemática em Educação Matemática: “I – Objetivo e pergunta; II – Busca dos trabalhos; III – Seleção dos estudos; IV – Análise das produções; V – Apresentação da revisão sistemática” (p. 210-225).

Em síntese, a revisão sistemática de literatura é um processo de pesquisa pelo qual o pesquisador pode mapear, analisar e sintetizar criticamente a produção acadêmica existente, garantindo um panorama abrangente e fundamentado sobre determinado tema. Esse tipo de revisão permite identificar lacunas no conhecimento, tendências emergentes e abordagens metodológicas predominantes, fornecendo subsídios para futuras investigações. Em outras palavras, é um processo de pesquisa que pode desencadear diferentes investigações, hipóteses, abordagens e objetivos de novas pesquisas, já que busca sintetizar e analisar, com critérios rigorosos, a literatura já publicada sobre um determinado tema.

3 Considerações finais

A revisão sistemática de literatura se apresenta como uma importante metodologia de pesquisa para a Educação Matemática, especialmente em um contexto de crescente produção científica impulsionada pela era digital. Ao longo deste trabalho, buscamos não apenas apresentar essa abordagem metodológica, mas também destacar sua relevância para a organização e síntese do conhecimento na área. A partir da apresentação de referenciais teóricos, evidenciamos que uma

revisão sistemática bem conduzida requer critérios rigorosos e etapas bem definidas, permitindo maior confiabilidade e credibilidade aos resultados obtidos. Assim, compreender essa metodologia e seus fundamentos não apenas qualifica as pesquisas, mas também contribui para o avanço do campo ao possibilitar a identificação de lacunas e a proposição de novas investigações.

No caso da pesquisa do primeiro autor, a metodologia permite compreender e analisar o uso de um conceito da psicologia nas pesquisas em Educação Matemática, a fim de entender como este contribui para a pesquisa nessa área e identificar lacunas no embasamento teórico que serão exploradas na pesquisa do autor (Silveira; Marco, 2025).

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), por meio do projeto APQ-05693-23.

Referências

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Abordagens teóricas e metodológicas na Educação Matemática: aproximações e distanciamentos. In: OLIVEIRA, Andréia Maria Pereira de; ORTIGÃO, Maria Isabel Ramalho (Org.). **Abordagens Teóricas e Metodológicas nas Pesquisas em Educação Matemática**, Brasília: SBEM, 2018, p. 17-57.

DONATO, Helena; DONATO, Mariana. Stages for Undertaking a Systematic Review. **Acta Médica Portuguesa**, v. 32, n. 3, p. 227-235, 2019. DOI: <https://doi.org/10.20344/amp.11923>. Disponível em: <https://www.actamedicaportuguesa.com/revista/index.php/amp/article/view/11923>. Acesso em: 20 jun. 2024.

GALVÃO, Maria Cristiane Barbosa; PLUYE, Pierre; RICARTE, Ivan Luiz Marques. Métodos de pesquisa mistos e revisões de literatura mistas: conceitos, construção e critérios de avaliação. **InCID: Revista de Ciência da Informação e Documentação**, v. 8, n. 2, p. 4-24, 2017. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/incid/article/view/121879>. Acesso em: 20 jun. 2024.

GALVÃO, Maria Cristiane Barbosa; RICARTE, Ivan Luiz Marques. Revisão Sistemática da Literatura: Conceituação, Produção e Publicação. **LOGEION: Filosofia da informação**, v. 6, n. 1, p. 57-73, 2019. DOI: <https://doi.org/10.21728/logeion.2019v6n1.p57-73>. Disponível em: <https://revista.ibict.br/fiinf/article/view/4835>. Acesso em: 20 jun. 2024.

KHAN, Khalid; KUNZ, Regina; KLEIJNEN, Jos; ANTES, Gerd. Five steps to conducting a systematic review. **Journal of the Royal Society of Medicine**, v. 96, n. 3, p. 118-121, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1177/014107680309600304>. Disponível em: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC539417/>. Acesso em: 27 jul. 2024.

MENDES, Luiz Otavio Rodrigues; PEREIRA, Ana Lucia. Revisão sistemática na área de Ensino e Educação Matemática: análise do processo e proposição de etapas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 22, n. 3, p. 196-228, 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.23925/1983->

[3156.2020v22i3p196-228](#). Disponível em:

<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/50437>. Acesso em: 24 jul. 2024

RAMOS, Altina; FARIA, Paulo Manuel Miranda; FARIA, Ádila. Revisão sistemática de literatura: contributo para a inovação na investigação em Ciências da Educação. **Revista Diálogo Educacional**, [S. l.], v. 14, n. 41, p. 17–36, 2014. DOI: 10.7213/dialogo.educ.14.041.DS01. Disponível em: <https://periodicos.pucpr.br/dialogoeducacional/article/view/2269>. Acesso em: 20 jun. 2024.

SIDDAWAY, Andy; WOOD, Alex; HEDGES, Larry. How to do a systematic review: a best practice guide for conducting and reporting narrative reviews, meta-analyses, and meta-syntheses. **Annual Review of Psychology**, v. 70, n. 1, p. 747–770, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-psych-010418-102803>. Disponível em: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/30089228/> Acesso em: 23 dez. 2024.

SILVEIRA, Matheus Carvalho Carrijo; MARCO, Fabiana Fiorezi de. Mediação na Perspectiva da Teoria Histórico-Cultural e Educação Matemática: um breve olhar. **Encontro Mineiro de Educação Matemática**, [S. l.], n. 10, 2025. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/emem/article/view/606>. Acesso em: 7 abr. 2025.

caption



Representações de álgebras de Lie

Theo Marques Rodrigues Teófilo

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

theo.teofilo@ufu.br

Luciana Aparecida Alves

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

luciana.alves@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Álgebras de Lie.
Representações.
Construções com representações.

Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial dotado de uma operação que satisfaz a bilinearidade, a anti-simetria e a identidade de Jacobi. Já uma representação de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre um espaço vetorial V é um homomorfismo de \mathfrak{g} na álgebra das transformações de V . A metodologia baseia-se na formulação rigorosa dos conceitos, seguida de exemplos para o melhor entendimento dessas estruturas algébricas.

1 Introdução

O presente trabalho tem como objetivo apresentar os conceitos fundamentais das álgebras de Lie, suas propriedades essenciais e principais exemplos, além de explorar representações associadas a essas estruturas. Abordamos formalmente definições como subálgebras, ideais e homomorfismos, destacando suas características e implicações teóricas. Também investigamos a representação adjunta e outras construções importantes, como o produto tensorial e as representações duais. A compreensão dessas ferramentas matemáticas é essencial para o avanço do estudo de sistemas dinâmicos, transformações lineares e teorias físicas modernas. A principal referência usada neste trabalho [1].

2 Álgebras de Lie

Definição 2.1. *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial \mathfrak{g} munido de um produto (colchete ou comutador)*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

com as seguintes propriedades:

1. *é bilinear;*
2. *anti-simétrico, isto é, $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ (o que implica $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ e é equivalente se o corpo de escalares não é de característica dois) e*
3. *satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,*

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Esta igualdade pode ser reescrita alternativamente de uma das duas formas

- $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$
- $[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]]$

Definição 2.2. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de \mathfrak{g} é um subespaço vetorial \mathfrak{h} de \mathfrak{g} que é fechado pelo colchete, isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ se $X, Y \in \mathfrak{h}$.*

Definição 2.3. *Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um ideal se para todo $Y \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}$, temos que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.*

OBS. É claro que todo ideal é subálgebra.

Exemplo 2.4. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$: *O espaço das transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo \mathbb{K} , que é o mesmo que o espaço das matrizes $n \times n$ com coeficientes em \mathbb{K} , é uma álgebra de Lie definindo o colchete por*

$$[X, Y] = XY - YX,$$

com X e Y matrizes. Estas álgebras aparecerão mais adiante com bastante frequência. Muitas vezes elas serão indicadas por $\mathfrak{gl}(n)$ apenas, sem especificar o corpo quando este não for relevante. Da mesma forma, a álgebra das transformações lineares de um espaço vetorial V será denotada por $\mathfrak{gl}(V)$.

Exemplo 2.5. Subálgebras de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$:

- $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X + X^t = 0\}$ onde X^t indica a transposta da matriz X .
O espaço das matrizes simétricas

$$\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X = X^t\}$$

não é subálgebra se $n \geq 2$, pois se X e Y são simétricas, então $[X, Y]$ é anti-simétrica.

- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : \text{tr } X = 0\}$. Como no caso de $\mathfrak{gl}(n)$, muitas vezes denotaremos estas álgebras apenas por $\mathfrak{sl}(n)$.
- O subespaço das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal

$$\left\{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \cdots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma subálgebra.

- O subespaço das matrizes triangulares superiores

$$\left\{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \cdots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \right\}$$

é uma subálgebra.

Exemplo 2.6. Álgebras de dimensão ≤ 2 :

1. Se $\dim \mathfrak{g} = 1$, então, \mathfrak{g} é abeliana.
2. Se $\dim \mathfrak{g} = 2$, existem duas possibilidades:
 - i. \mathfrak{g} é abeliana
 - ii. Existe uma base $\{X, Y\}$ de \mathfrak{g} tal que

$$[X, Y] = Y$$

e, a partir daí, o colchete de dois elementos quaisquer de \mathfrak{g} é dado por

$$[aX + bY, cX + dY] = (ad - bc)[X, Y] = (ad - bc)Y.$$

Antes de passarmos para a próxima seção, apresentamos o conceito geral de morfismos em álgebras de Lie.

Definição 2.7. Uma transformação linear $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ (com \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie) é um

- homomorfismo se $\psi[X, Y] = [\psi X, \psi Y]$;
- isomorfismo se for um homomorfismo inversível;
- automorfismo se é um isomorfismo e $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.

As álgebras \mathfrak{g} e \mathfrak{h} são isomorfas se existe um isomorfismo $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$.

3 Representações

Seja V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V . Seja também \mathfrak{g} uma álgebra de Lie (sobre o mesmo corpo de escalares que V). Uma representação de \mathfrak{g} em V é um homomorfismo

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Na terminologia usual, V se denomina o espaço da representação enquanto que sua dimensão é a dimensão da representação. Uma representação ρ é dita *fiel* se $\ker \rho = \{0\}$.

3.1 Representação adjunta

Para um elemento X na álgebra de Lie \mathfrak{g} , considere a transformação linear

$$\text{ad}(X) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

definida por

$$\text{ad}(X)(Y) = [X, Y].$$

A aplicação

$$\text{ad} : X \in \mathfrak{g} \longmapsto \text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

define uma representação de \mathfrak{g} em \mathfrak{g} , denominada *representação adjunta*. O fato de ad ser linear provém da bilinearidade do colchete. Já a propriedade de homomorfismo de ad é equivalente à identidade de Jacobi.

De fato, a igualdade

$$\text{ad}([X, Y]) = \text{ad}(X)\text{ad}(Y) - \text{ad}(Y)\text{ad}(X)$$

é a mesma que

$$[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]], \quad \forall Z \in \mathfrak{g}.$$

Esta expressão é exatamente uma das formas da identidade de Jacobi apresentada na definição de álgebras de Lie.

Exemplo 3.1. *Sejam \mathfrak{g} a álgebra não-abeliana bidimensional e $\{X, Y\}$ uma base de \mathfrak{g} tal que $[X, Y] = Y$. Nesta base, as matrizes de $\text{ad}(X)$ e $\text{ad}(Y)$ são*

$$[\text{ad}(X)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{ad}(Y)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Construções com representações

Restrições de representações. Seja ρ uma representação de \mathfrak{g} em V e suponha que W seja um subespaço invariante por ρ , isto é, $\forall X \in \mathfrak{g}, \rho(X)W \subset W$. A aplicação

$$\rho|_W : X \in \mathfrak{g} \mapsto \rho(X)|_W \in \mathfrak{gl}(W)$$

define uma representação de \mathfrak{g} em W . A soma e a interseção de subespaços invariantes são também invariantes.

Quocientes de representações. Seja ρ uma representação de \mathfrak{g} em V e $W \subset V$ um subespaço invariante pela representação. A aplicação

$$\bar{\rho}_W : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V/W)$$

defina por $X \mapsto \overline{\rho(X)}$ é uma representação. Aqui, $\overline{\rho(X)} : V/W \mapsto V/W$ é a única transformação linear que comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ V/W & \longrightarrow & V/W \end{array}$$

onde $\pi : V \rightarrow V/W$ denota a projeção canônica. A existência de $\overline{\rho(X)}$ vem do fato de W ser invariante.

Proposição 3.2. *Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é invariante pela representação adjunta se e só se \mathfrak{h} é um ideal de \mathfrak{g} . Nesse caso, a imagem da representação quociente é a representação adjunta de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ subespaço invariante pela representação $\text{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Então, para todo $Y \in \mathfrak{h}$, temos que $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y] \in \mathfrak{h}$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, mostrando que \mathfrak{h} é um ideal. A recíproca é

análoga. A imagem da representação quociente $\overline{\text{ad}}_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ são as transformações $\overline{\text{ad}}(\overline{X})$ tais que

$$\overline{\text{ad}}(\overline{X})(\overline{Y}) = \overline{\text{ad}}(\overline{X})(\pi(Y)) = \pi(\text{ad}(X)(Y)) = \pi([X, Y]) = \overline{[X, Y]} = [\overline{X}, \overline{Y}] = \text{ad}(\overline{X})(\overline{Y}), \forall \overline{Y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h},$$

mostrando que $\overline{\text{ad}}(\overline{X}) = \text{ad}(\overline{X})$, ou seja, é a representação adjunta $\text{ad} : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. ■

Veremos a seguir como construir um produto tensorial de representações. Para isso, definiremos brevemente o que é um *produto tensorial de espaços vetoriais*. Para mais detalhes sobre esse tema, veja [2].

Produto tensorial. Sejam V_1, \dots, V_n espaços vetoriais de dimensão n_1, \dots, n_n , respectivamente. Chamamos o *produto tensorial* de V_1 a V_n a todo par (Z, ϕ) satisfazendo:

- i. Z é um espaço vetorial e $\phi : V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow Z$ é uma aplicação multi-linear, isto é, linear em cada variável;
- ii. $\dim Z = \dim V_1 \cdots \dim V_n$;
- iii. $\phi(V_1 \times \dots \times V_n)$ gera Z , isto é, todo elemento de Z pode ser obtido como combinação linear (e, portanto, como soma) de elementos de $\phi(V_1 \times \dots \times V_n)$.

Indicaremos um produto tensorial de V_1 a V_n por $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$; assim, $\phi(v_1, \dots, v_n)$ será substituído por $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$.

Sejam $T_i : V_i \longrightarrow V_i$, $i = 1, \dots, n$, transformações lineares. Indicamos por $T_1 \otimes \dots \otimes T_n$ o endomorfismo de $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ definido por

$$T_1 \otimes \dots \otimes T_n(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = T_1(v_1) \otimes \dots \otimes T_n(v_n).$$

Produto tensorial de representações. Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e ρ_i , $i = 1, \dots, n$ representações de \mathfrak{g} em V_i . Defina

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n)$$

por

$$\rho(X) = \rho_1(X) \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + 1 \otimes \rho_2(X) \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \rho_n(X),$$

onde 1 representa a identidade em cada um dos espaços. Então, como pode ser verificado diretamente a partir das definições, ρ define uma representação de \mathfrak{g} em $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$. Este é o produto tensorial das representações.

No caso particular em que $n = 2$, o produto tensorial é dado por

$$\rho(X)(u \otimes v) = \rho_1(X)u \otimes v + u \otimes \rho_2(X)v.$$

Vale a pena observar que a aplicação $\rho(X) = \rho_1(X) \otimes \rho_2(X)$ não define uma representação, já que não é linear.

Representações duais. Dada uma representação ρ de \mathfrak{g} em V , pode-se tomar a representação ρ^* de \mathfrak{g} no dual V^* de V dada pela fórmula

$$\rho^*(X)(\lambda) = -\lambda \circ \rho(X) \quad \forall \lambda \in V^*.$$

A verificação de que ρ^* definido desta forma é, de fato, uma representação, é imediata. O sinal negativo que aparece nessa definição é necessário para que os colchetes apareçam na ordem certa.

A representação ad^* em \mathfrak{g}^* , dual da representação adjunta, é denominada *representação co-adjunta*.

Exemplo 3.3. *O produto tensorial de uma representação com a representação dual coincide com (ou melhor, é equivalente a) a representação adjunta na álgebra das transformações lineares do espaço da representação. Para ver isso, tome uma representação ρ de \mathfrak{g} em V . Inicialmente, observe que o espaço $\mathfrak{gl}(V)$ das transformações lineares de V é naturalmente isomorfo ao produto tensorial $V \otimes V^*$. O isomorfismo é definido da seguinte forma*

$$\begin{aligned} V \otimes V^* &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ v \otimes \lambda &\longmapsto A, \end{aligned}$$

onde $A(w) = \lambda(w)v$, $w \in V$, para $v \in V$ e $\lambda \in V^*$.

Tomando a representação $\sigma = \rho \otimes 1 + 1 \otimes \rho^*$ em $V \otimes V^*$,

$$\sigma(X)(v \otimes \lambda) = \rho(X)v \otimes \lambda - v \otimes (\lambda \circ \rho(X)).$$

Usando o isomorfismo natural entre $V \otimes V^*$ e $\mathfrak{gl}(V)$, temos que o segundo membro da igualdade acima é dado por

$$\begin{aligned} \rho(X)v \otimes \lambda(w) - v \otimes (\lambda \circ \rho(X))(w) &= \lambda(w)\rho(X)v - \lambda(\rho(X)w)v \\ &= \rho(X)\lambda(w)v - \lambda(\rho(X)w)v \\ &= \rho(X)A(w) - A\rho(X)(w) = [\rho(X), A](w), \quad w \in V. \end{aligned}$$

Ou seja, σ é equivalente à representação adjunta de \mathfrak{g} em $\mathfrak{gl}(V)$ induzida por ρ .

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PIBIC, agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo fomento.

Referências

- [1] SAN MARTIN, Luiz A. B. **Álgebras de Lie**. Campinas: Editora da Unicamp, 2010.
- [2] LIMA, E. L.; **Cálculo Tensorial**. 3ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2012



SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO UNIDIMENSIONAIS COM TERMO FONTE SINGULAR VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS E REFINAMENTO LOCAL DE MALHA

Gabriel Melo Gomes Pereira

UFU, IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
gabriel.pereira3@ufu.br

Santos Alberto Enriquez Remigio

UFU, IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
santos.er@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Delta de Dirac.
Equações diferenciais.
Refinamento de malha.

Resolver equações diferenciais que incluem termos de força como a função delta de Dirac é essencial em muitos campos da ciência e da engenharia. Esse tipo de modelagem é particularmente útil em problemas que envolvem forças concentradas em pontos específicos, como cargas elétricas pontuais ou impactos localizados. Em áreas como a interação fluido-estrutura e a eletrostática, a função delta de Dirac permite representar fontes pontuais de forma precisa nos modelos matemáticos. No entanto, a presença desse termo torna mais difícil obter soluções analíticas e compromete a exatidão dos métodos numéricos, reduzindo a taxa de convergência das diferenças finitas. Para mitigar esse problema, este estudo propõe o uso de refinamento local da malha, adotando um espaçamento duas vezes menor na região refinada. Além disso, investiga-se a influência da aproximação utilizada para a função delta de Dirac nos resultados obtidos.

1 Introdução

A solução de equações diferenciais com termos fontes do tipo delta de Dirac é de grande importância em diversas áreas da ciência e engenharia. Essas equações surgem naturalmente em problemas onde fenômenos concentrados ou impulsivos precisam ser modelados, tais como forças pontuais em sistemas mecânicos, cargas elétricas pontuais em eletrostática, ou impactos localizados em fluidos. Por exemplo, no estudo de interações fluido-estrutura, o método da fronteira imersa utiliza o delta de Dirac para representar forças concentradas na interface entre o fluido e a estrutura. Outro exemplo é a modelagem de cargas pontuais em problemas de potencial elétrico, onde o delta de Dirac descreve a distribuição de carga em um ponto específico. Apesar da relevância prática dessas equações, a obtenção de soluções analíticas para problemas com termos fontes do tipo delta de Dirac é frequentemente complicada, especialmente quando a geometria do domínio ou as condições de contorno são complexas. Diante dessa dificuldade, métodos numéricos tornam-se uma ferramenta essencial para a obtenção de soluções aproximadas. Neste trabalho, utilizaremos o método das diferenças finitas centradas de segunda ordem para discretizar e resolver numericamente tais problemas. No entanto, a presença do termo fonte do tipo delta de Dirac introduz descontinuidades na derivada da solução, o que impacta diretamente a precisão do método numérico. Em particular, quando o termo fonte é modelado por uma função delta de Dirac, a taxa de convergência do método das diferenças finitas, que seria de segunda ordem para problemas suaves, pode ser reduzida para primeira ordem devido às singularidades presentes na solução. Essa perda de precisão é um desafio significativo na solução numérica desses problemas. O objetivo deste trabalho é investigar como o refinamento local da malha pode ser utilizado para mitigar esse problema, permitindo a redução do erro numérico. Além disso, exploraremos como a escolha da aproximação regular para o delta de Dirac influencia a qualidade da solução numérica. A combinação de refinamento local e uma aproximação adequada do delta de Dirac pode levar a resultados mais precisos e eficientes, contribuindo para a solução de problemas práticos que envolvem termos fontes singulares.

2 Delta de Dirac: Aproximações Regularizadas e Aplicações

O Delta de Dirac $\delta(x - \alpha)$ é uma "função" (ou distribuição) que modela um impulso pontual ou uma fonte concentrada no ponto $x = \alpha$. Ele é definido como:

$$\delta(x - \alpha) = \begin{cases} +\infty, & x = \alpha \\ 0, & x \neq \alpha \end{cases},$$

e satisfaz a propriedade de normalização:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \alpha) dx = 1$$

Ele é usado para "capturar" o valor de uma função em um ponto específico. Por exemplo, se $f(x)$ é uma função contínua, então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

A função é zero em todos os lugares, exceto em x_0 , onde é infinitamente alta e tem área total igual a 1. O Delta de Dirac é útil em modelagem porque permite representar fontes pontuais ou condições de contorno concentradas de forma matemática precisa. Por exemplo, em problemas físicos, muitas vezes temos fontes de energia, carga, massa, etc., que estão concentradas em um único ponto; em eletrostática, uma carga pontual pode ser modelada usando o Delta de Dirac; em problemas de difusão, uma fonte de calor concentrada em um ponto também pode ser modelada com o Delta de Dirac.

O Delta de Dirac permite tratar problemas com fontes pontuais de forma compacta e elegante, sem precisar dividir o domínio em várias regiões. Sem o Delta de Dirac, seria necessário resolver equações separadas para cada região e impor condições de contorno adicionais, o que pode ser complicado. Vejamos o seguinte exemplo que modela um problema onde a segunda derivada de $u(x)$ é igual a um impulso pontual em $x = \alpha$.

$$u_{xx} = \delta(x - \alpha)$$

Em termos físicos, isso pode representar, por exemplo: a deflexão de uma viga sob uma carga pontual aplicada em $x = \alpha$; a distribuição de temperatura em uma barra com uma fonte de calor pontual em $x = \alpha$.

Sem o Delta de Dirac, o problema seria representado por duas equações diferenciais, uma para cada região: $x < \alpha$ e $x > \alpha$ e resolver duas equações separadas:

$$u_{xx} = 0 \quad \text{para} \quad x \neq \alpha$$

A busca por uma solução única ao problema depende da imposição de condições adicionais em $x = \alpha$, como continuidade da função $u(x)$ e descontinuidade na derivada $u_x(x)$. O uso do Delta de Dirac encapsula essas condições de forma automática e simplifica a análise.

3 Refinamento local de malha

Em abordagens numéricas, como o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos, a discretização do domínio é um passo fundamental. A malha é composta por nós e elementos que aproximam a geometria e as propriedades da solução. A discretização de um domínio contínuo é um passo fundamental em métodos numéricos como diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos. A seleção da malha tem um impacto direto na precisão e na eficiência computacional da solução. Um refinamento de malha consiste em uma discretização na qual certas regiões do domínio possuem

elementos menores, aumentando a densidade de pontos de cálculo onde a solução apresenta variações mais intensas. Esse refinamento pode ser aplicado de forma global (em todo o domínio) ou local (apenas nas regiões de interesse).

3.1 Considerações

Apesar das vantagens, o refinamento de malha também apresenta desafios, tais como aumento do custo computacional devido ao maior número de pontos de cálculo, necessidade de técnicas eficientes de refinamento adaptativo para evitar sobrecarga desnecessária e complexidade na implementação de algoritmos que garantam a continuidade e estabilidade da solução. Problemas físicos frequentemente apresentam regiões onde as variações da solução são significativas, como:

- Bordas e interfaces entre materiais com propriedades diferentes.
- Fontes pontuais de calor, carga elétrica ou forças concentradas, como aquelas modeladas pelo delta de Dirac.
- Regiões com camadas limites.

Estas regiões de variações da solução possuem variações bruscas de velocidade ou temperatura. Uma malha refinada aumenta a densidade de pontos de cálculo nessas regiões, permitindo capturar melhor os fenômenos físicos envolvidos. Os erros de truncamento em métodos de diferenças finitas são reduzidos, melhorando a convergência da solução e a dispersão e difusão numérica são minimizadas em simulações envolvendo equações hiperbólicas, como aquelas da dinâmica dos fluidos. Além disso, embora uma malha refinada aumente o número de pontos de cálculo, seu uso pode ser mais eficiente do que simplesmente aumentar a resolução globalmente. Com estratégias adaptativas, o refinamento ocorre apenas onde necessário, reduzindo o custo computacional sem comprometer a precisão da solução.

4 Implementação e Testes

Neste trabalho, foi realizado um estudo sobre o uso do delta de Dirac em equações diferenciais, analisando os efeitos da presença ou ausência de refinamento local na malha. Para isso, foram testados oito diferentes aproximações para o deltas de Dirac, onde $\delta(x) \approx \frac{\phi(\frac{x}{h})}{h}$, sendo h o espaçamento da discretização espacial, permitindo uma avaliação detalhada do impacto da escolha da função aproximadora na solução numérica. Além disso, utilizou-se o método das diferenças finitas centradas de segunda ordem para a discretização das equações diferenciais, garantindo uma abordagem numérica consistente. No entanto, para fins de apresentação e clareza, apenas a seguinte aproximação de delta de Dirac que apresentou os melhores resultados será discutido nesta seção:

$$\phi(r) = \begin{cases} 1 - |r|, & \text{se } |r| \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A ideia geral do Método de Diferenças Finitas é a discretização do domínio e a substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações denominadas diferenças finitas. A discretização do domínio consiste na escolha de pontos do intervalo $[a, b]$ onde se deseja aproximar a solução. Podemos, por exemplo, dividir o intervalo em um número finito de subintervalos de tamanhos diferentes e escolher pontos em cada um desses intervalos. No caso de considerar-se subintervalos do mesmo tamanho e os pontos como sendo os extremos desses subintervalos, o conjunto de pontos definidos é denominado de malha homogênea (pontos igualmente espaçados). O segundo passo é a discretização da equação que consiste em substituir as derivadas presentes na equação por aproximações dadas por diferenças finitas, obtidas através da expansão em série de Taylor da função incógnita. Segue abaixo uma lista com algumas destas expressões:

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2(h)} + O(h^2) \quad (1)$$

$$\frac{d^2u_i}{dx^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(h)^2} + O(h^2) \quad (2)$$

sendo h é o tamanho do passo, ou seja, a distância entre dois pontos consecutivos da malha. Se o intervalo $[a, b]$ for dividido em N subintervalos de mesmo tamanho, então $h = \frac{b-a}{N}$. i é o índice associado a um ponto x_i da malha, definido como $x_i = a + i \cdot h$, com $i = 0, 1, 2, \dots, N$. $i - 1$ e $i + 1$ referem-se aos pontos imediatamente anterior e posterior ao ponto x_i .

4.1 Refinamento implementado

O refinamento foi realizado da seguinte maneira: Primeiramente, define-se uma malha inicial, chamada *malha grossa*, com n_{pg} = numero de partições da malha grossa de tamanho constante e respectivo espaçamento $h_g = \frac{b-a}{n_{pg}}$. Os pontos da malha grossa são obtidos por $x_{g_i} = a + i h_g$, para $i = 0, 1, \dots, n_{pg}$.

Em seguida, selecione o intervalo $[c, d]$, contido em $[a, b]$, que represente a região onde se deseja realizar o refinamento da malha e determine os índices i_1 e i_2 tais que:

$$x_{g_{i_1}} \leq c < x_{g_{i_1+1}}, \quad (3)$$

$$x_{g_{i_2}} \leq d < x_{g_{i_2+1}}. \quad (4)$$

Os valores ajustados dos extremos do subintervalo refinado são então definidos como:

$$c_{\text{new}} = x_{g_{i_1}}, \quad d_{\text{new}} = x_{g_{i_2}}. \quad (5)$$

A malha é dividida em três regiões:

- $a \leq x \leq c_{\text{new}}$ - mantida com o espaçamento da malha grossa, $h = h_g$.
- $c_{\text{new}} \leq x \leq d_{\text{new}}$ - refinada com o dobro de pontos e portanto $h = h_f = \frac{h_g}{2}$.
- $d_{\text{new}} \leq x \leq b$ - mantida com o espaçamento da malha grossa $h = h_g$.



Figura 1: Exemplo de malha refinada no intervalo $[-2, 3]$ com refinamento em $[0, 1.7]$ em que estrelas representam malha grossa e X malha fina.

4.2 Formulação dos Problemas Testados

Para validar a abordagem proposta, foram resolvidos quatro problemas distintos envolvendo a aplicação do delta de Dirac em equações diferenciais. No entanto, para simplificação da apresentação dos resultados, apenas dois desses problemas serão detalhados. Estes problemas são descritos a seguir:

Problema 1

Considere-se o seguinte problema de valor de contorno: $u''(x) = -10\delta(x - \pi)$, sujeita as condições de contorno $u(0) = u(1) = 0$, cuja solução analítica é:

$$u(x) = \begin{cases} 10x(1 - \pi), & x \leq \pi \\ 10\pi(1 - x), & x \geq \pi \end{cases}$$

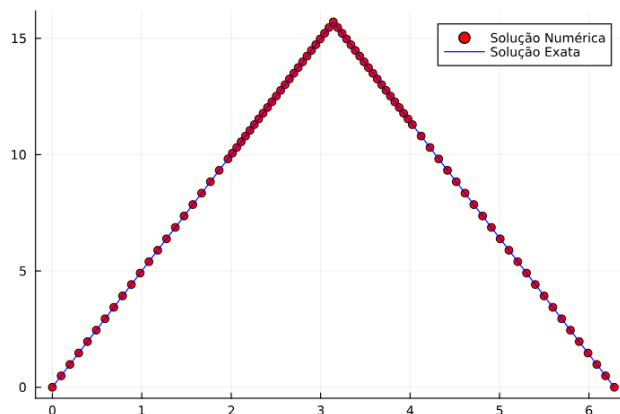


Figura 2: Solução do problema 1 com refino em $[2, 4]$ e $n_{pg} = 64$.

Problema 2

Consiste da seguinte equação diferencial ordinária: $\frac{d^2u}{dx^2}(x) - \alpha^2 u(x) = -2\alpha\delta(x - x_0)$, $x \in$

$[-0.5, 0.5]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, sujeita as condições de contorno $u(-0.5) = e^{-\alpha|-0.5-x_0|}$ e $u(0.5) = e^{-\alpha|0.5-x_0|}$. O valor considerado para $x_0 = 0$.

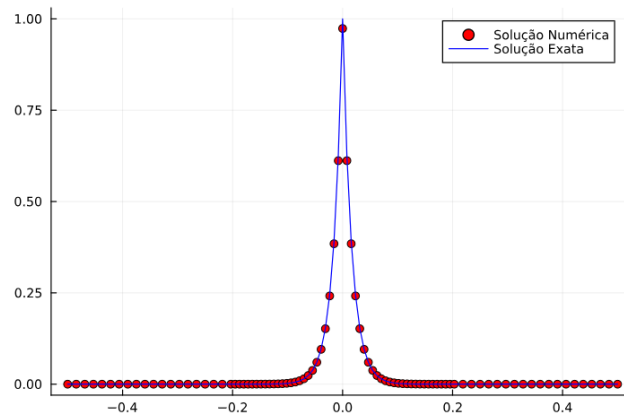


Figura 3: Solução do problema 2 com refino em $[-0.2, 0.2]$ e $n_{pg} = 64$.

As Figuras 2 e 3 mostram os esboços das soluções exatas e analíticas dos Problemas 1 e 2, respectivamente. Observa-se que o refinamento local proporciona uma boa aproximação da solução analítica correspondente.

4.3 Análise do Impacto do Refinamento Local

Para avaliar a influência do refinamento da malha na precisão da solução, foram conduzidos experimentos com diferentes partições do domínio. As soluções obtidas com e sem refinamento foram comparadas a fim de quantificar os erros numéricos introduzidos por cada abordagem.

Os testes numéricos foram realizados variando o espaçamento da malha, permitindo a análise da taxa de convergência e do impacto do refinamento na precisão final da solução. A tabela a seguir apresenta os erros obtidos para diferentes espaçamentos da malha, comparando as soluções com e sem refinamento local. O erro foi obtido com a diferença entre a solução exata (u_{exata}) e a solução aproximada ($u_{\text{aproximada}}$). Ou seja, o $\text{erro} = u_{\text{exata}} - u_{\text{aproximada}}$.

A norma do erro, utilizada para quantificar a precisão global da solução, é dada pela máxima diferença absoluta entre os erros nos diferentes pontos i , onde $i = 1, 2, \dots, N$ representa os N pontos de avaliação:

$$\|\text{erro}\| = \max_{1 \rightarrow N} |\text{erro}_i|$$

Essa norma fornece uma medida robusta da maior discrepância entre a solução exata e a solução aproximada ao longo de todo o domínio.

O comportamento dos erros sugere que a solução numérica obtida pelo método de diferenças finitas centradas de segunda ordem é extremamente precisa para este problema específico.

Observemos que para o erro sem refinamento, os quocientes são aproximadamente 1.96, 2.86 e 3.58. Isso sugere que a convergência pode estar próxima de segunda ordem para malhas mais grossas,

Nº de Partições sem refinamento	Erro	Nº de Partições com refinamento	Erro
16	4.44×10^{-15}	23	3.91×10^{-14}
32	3.55×10^{-14}	44	3.38×10^{-14}
64	1.28×10^{-13}	86	5.68×10^{-14}
128	5.51×10^{-14}	171	4.55×10^{-13}

Tabela 1: Comparação de erro com e sem refinamento do problema 1

Nº de Partições sem refinamento	Erro	Quociente	Nº de Partições com refinamento	Erro	Quociente
16	0.52941		25	0.27046	
32	0.27046	1.95743	47	0.09454	2.86080
64	0.09454	2.86080	91	0.02638	3.58331
128	0.02638	3.58331	181	0.00680	3.88193
256	0.00680	3.88193	361	0.00171	3.96946
512	0.00171	3.96946	719	0.00043	3.99230

Tabela 2: Comparação de erro com e sem refinamento do problema 2

mas tende a aumentar conforme a malha refina. Já para o erro com refinamento, os quocientes são aproximadamente 2.86, 3.58 e 3.88. Esses valores indicam que o refinamento melhora a taxa de convergência, aproximando-se de um método de ordem mais alta.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

Referências

[1] BEYER, R. P.; LEVEQUE, R. J. Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 29, n. 2, p. 332–364, abr. 1992. Acesso em: 26 de nov. 2024.

[2] PACULL, F. A numerical study of the immersed boundary method and application to blood flow. **Thesis**, maio 2006. Acesso em: 30 de nov. 2024.



Sobre Arquimedes de Siracusa

Jackson Johnson Cunha Silva

Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística - IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

jackson.silva@ufu.br

Hernán Roberto Montúfar López

Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística - IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

montufar@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Alavancas.
Aproximação.
Trisseção.

Este trabalho tem como objetivo explorar as contribuições de Arquimedes para a física e a matemática, com ênfase no princípio das alavancas, na aproximação do número π , na trisseção de ângulos e na quadratura da circunferência. A partir da obra História da Matemática, de Boyer e Merzbach (2012), foi realizada um estudo para compreender as metodologias empregadas por Arquimedes na resolução de problemas físicos e geométricos. A pesquisa se concentrou inicialmente no estudo do princípio das alavancas, e seguiu com a análise de seus métodos para aproximar a razão entre a circunferência e o diâmetro, a aplicação da espiral para a trisseção de ângulos e a quadratura da circunferência. Os resultados evidenciam a importância das suas ideias, que anteciparam conceitos essenciais para o desenvolvimento posterior da matemática e da física. Conclui-se que Arquimedes desempenhou um papel fundamental na evolução dessas áreas do conhecimento.

1 Introdução

Arquimedes de Siracusa, nascido por volta de 287 a.C. na cidade de Siracusa, destacou-se como um dos maiores matemáticos de sua época. Seus feitos abrangeram diversas áreas, como matemática, física e engenharia. Entre suas contribuições, destacam-se o Princípio de Arquimedes, relacionado aos corpos flutuantes, e a criação de engenhos notáveis, como o parafuso de Arquimedes e as catapultas.

Entre 218 e 201 a.C., ocorreu a Segunda Guerra Púnica, durante a qual Siracusa se envolveu na disputa de poder entre Roma e Cartago. Em 214 a.C., a cidade foi cercada pelos romanos, que mantiveram o cerco por três anos. Durante esse período, Arquimedes projetou diversas máquinas de guerra para defender Siracusa, como catapultas para lançar pedras, sistemas de cordas, polias e ganchos usados para erguer e destruir navios romanos, além de dispositivos capazes de incendiar as embarcações inimigas. No entanto, apesar das ordens de um general romano para poupar a vida de Arquimedes, ele acabou sendo morto por um soldado romano durante o cerco, em 214 a.C.

Neste trabalho, veremos alguns de seus feitos com mais detalhes, com base nos dados apresentados no Capítulo 6 de História da Matemática, de Boyer e Merzbach (2012).

2 Sobre os equilíbrios dos planos

Arquimedes, em sua obra intitulada Sobre os Equilíbrios dos Planos, explorou a lei da alavanca, abordando o tema em dois volumes. Embora ele não tenha sido o primeiro a estudar alavancas, as obras de Aristóteles já continham a afirmação de que dois pesos em uma alavanca se equilibram quando são inversamente proporcionais às suas distâncias em relação ao fulcro. Arquimedes foi além, deduzindo a lei a partir de um postulado estático muito mais consistente: corpos bilateralmente simétricos estão em equilíbrio.

Arquimedes partiu de um princípio de simetria: se uma barra rígida tem pesos iguais distribuídos simetricamente ao redor do fulcro, ela permanecerá em equilíbrio. Para demonstrar sua teoria, ele imaginou a seguinte situação:

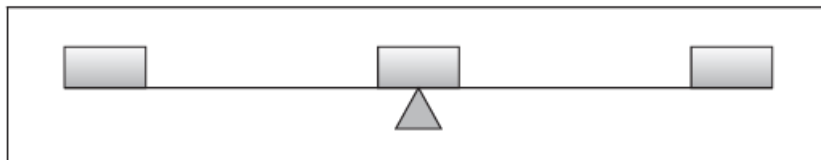


Figura 1: Fonte: BOYER; MERZBACH (2012, p. 100).

1. Suponha uma barra leve, de comprimento 4, com pesos de 1 unidade posicionados nos pontos conforme a imagem acima, e o fulcro centralizado.
2. Pela simetria, o sistema está equilibrado.

3. Se considerarmos apenas a metade direita da barra, podemos substituir os dois pesos por um único peso equivalente no ponto médio dessa metade.
4. Assim, um peso de 1 unidade a uma distância de 2 unidades do fulcro pode ser substituído por um peso de 2 unidades a uma distância de 1 unidade.

Segue de [2] que a lei da alavanca pode ser expressa matematicamente como:

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2, \quad (1)$$

onde:

- F_1 e F_2 são as forças aplicadas nos lados opostos da alavanca,
- d_1 e d_2 são as distâncias dessas forças em relação ao ponto de apoio (fulcro).

Arquimedes, portanto, provou a relação de equilíbrio sem recorrer a conceitos de movimento, apenas por princípios estáticos.

Exemplo 2.1. Qual deve ser o valor da força do operador aplicada à alavanca da figura abaixo de forma a mantê-la em equilíbrio?

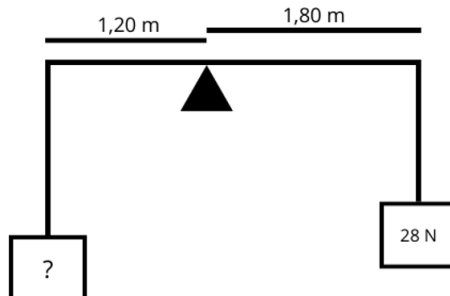


Figura 2: Forças em equilíbrio

Nesse exemplo, queremos descobrir a força F aplicada a 1,20 m do ponto de apoio.

Sabemos, pela figura, que a força de resistência é igual a 28 N e está aplicada a 1,80 m do ponto de apoio.

Na condição de equilíbrio, temos a equação de equilíbrio:

$$F_r \cdot d_r = F \cdot d.$$

Substituindo os valores conhecidos, ficamos com:

$$28 \cdot 1,80 = F \cdot 1,20 \Rightarrow 50,4 = F \cdot 1,20 \Rightarrow F = \frac{50,4}{1,20} = 42 \text{ N}.$$

Portanto, a força necessária para equilibrar o sistema é de **42 N**.

3 Medida do Círculo

Arquimedes usou um método iterativo para aproximar a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo. Ele calculou os perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos, dobrando o número de lados até alcançar um polígono de 96 lados. Seu algoritmo envolvia médias harmônicas e geométricas para refinar os cálculos.

Para visualizar melhor o processo de aproximação de Arquimedes, considere a figura abaixo, que mostra uma circunferência sendo circunscrita e inscrita por diferentes polígonos regulares: um triângulo, um quadrado, um hexágono e um octógono. A cada novo polígono, tanto o perímetro do polígono inscrito quanto o do polígono circunscrito vão se aproximando cada vez mais do valor do comprimento da circunferência.



Figura 3: Processo de aproximação

À medida que o número de lados dos polígonos aumenta, a diferença entre os perímetros interno e externo diminui, e os perímetros dos polígonos se tornam cada vez mais próximos do valor exato da circunferência. Esse método de aproximação, utilizado por Arquimedes, mostra como podemos chegar cada vez mais perto do valor de π .

Segue de [3] que Arquimedes obteve o seguinte resultado para a aproximação de π :

$$\frac{3}{10}71 < \pi < \frac{3}{10}70$$

o qual é o mais preciso entre os conhecidos até então. Esse resultado foi apresentado na *Medida do Círculo*, uma de suas obras mais influentes na Idade Média.

4 Sobre espirais

Arquimedes, assim como seus predecessores, foi atraído pelos três famosos problemas da geometria clássica. A bem conhecida espiral de Arquimedes forneceu soluções para dois desses problemas, embora, é claro, não com o uso de apenas régua e compasso. A espiral é definida como o lugar geométrico de um ponto que se move ao longo de um raio, ou semirreta, de forma uniforme, enquanto esse raio gira uniformemente em torno de sua extremidade. Em coordenadas polares, a equação da espiral é dada por $r = a\theta$, onde r é a distância radial e θ o ângulo de rotação a partir do eixo polar.

4.1 Trissecção do ângulo

Com essa espiral, Arquimedes encontrou uma maneira prática de resolver a trissecção de um ângulo. O ângulo é colocado de modo que seu vértice e primeiro lado coincidam com o ponto inicial O da espiral e a posição inicial da semirreta OA . O segmento OP , onde P é o ponto em que o segundo lado do ângulo corta a espiral, é então dividido em terços pelos pontos R e S (Fig. 4), e são traçados círculos com O como centro e raios OR e OS . Se esses círculos cortam a espiral nos pontos U e V , as retas OU e OV trissectam o ângulo AOP .

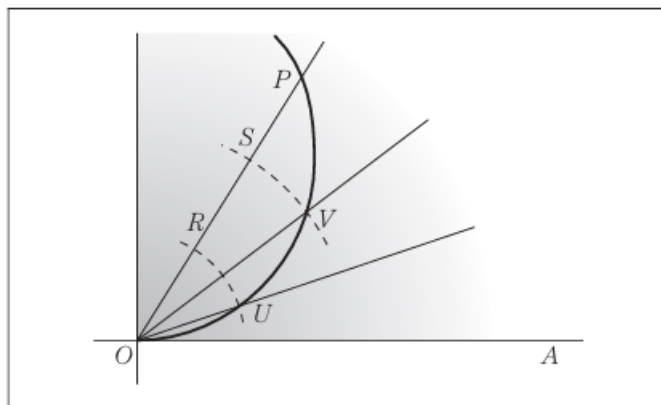


Figura 4: Fonte: BOYER; MERZBACH (2012, p. 102).

Antes de demonstrarmos a trissecção do ângulo, primeiro veremos uma propriedade da espiral. Seguindo [4], considere a espiral com extremidade O e R e o círculo correspondente de raio OR (fig. 5). Então, Arquimedes mostra que se dois segmentos de reta, OO_2 e OO_1 são traçados da origem até os pontos da espiral e se estes segmentos prolongados cortam o círculo respectivamente em R_2 e R_1 , temos que estes segmentos estarão entre si na mesma razão que os arcos de circunferência correspondentes.

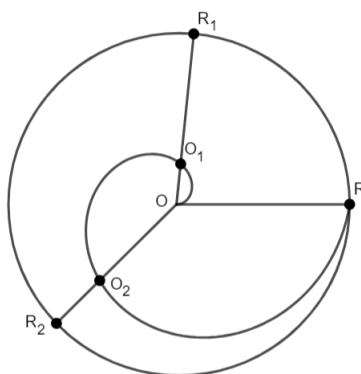


Figura 5: Fonte: NOGUEIRA (2010, p. 3).

Ou seja,

$$\frac{OO_2}{OO_1} = \frac{arcoRR_2}{arcoRR_1}$$

Com essa propriedade podemos iniciar a demonstração. Seja AOP o ângulo que desejamos dividir em três. Marque os pontos R e S de modo que dividam OP em três partes iguais. Traçamos, então dois arcos de circunferência com centro em O e com raios OR e OS que cortarão o trecho de espiral em dois pontos U e V . Agora, prolongamos o lado AO do ângulo e traçamos uma circunferência de raio OE , e marcamos os pontos F e G pela intersecção das retas OU e OV com a circunferência, respectivamente (Fig.). Seja H o ponto de encontro do prolongamento de OP com a circunferência de raio OE .

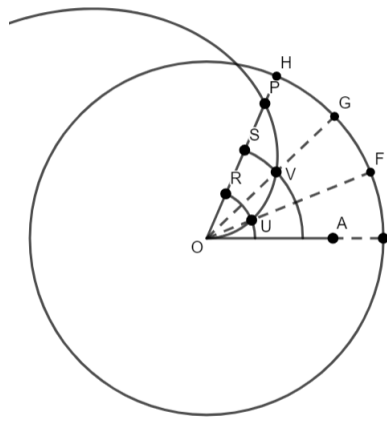


Figura 6: Fonte: NOGUEIRA (2010, p. 4), adaptado.

Assim, pela propriedade da espiral, temos que

$$\frac{\widehat{EF}}{\widehat{EH}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{OP}}.$$

Mas, por construção, temos que

$$\overline{OU} = \overline{OR} = \frac{\overline{OP}}{3}.$$

Assim,

$$\frac{\widehat{EF}}{\widehat{EH}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{OP}} = \frac{\frac{\overline{OP}}{3}}{\overline{OP}} = \frac{1}{3}.$$

Logo,

$$\widehat{EH} = 3\widehat{EF}.$$

Portanto, para o ângulo AOP temos,

$$\angle AOP \cdot \overline{EO} = \widehat{EH} = 3\widehat{EF} \Rightarrow \widehat{EF} = \frac{\angle AOP}{3} \cdot \overline{EO}.$$

Para o ângulo AOU temos

$$\angle AOU \cdot \overline{EO} = \widehat{EF} \Rightarrow \angle AOU \cdot \overline{EO} = \frac{\angle AOP}{3} \cdot \overline{EO} \Rightarrow \angle AOU = \frac{\angle AOP}{3}.$$

Repetindo o mesmo processo para os arcos FG e GH , verificamos que os ângulos UOV e VOP são a terça parte do ângulo AOP , o que demonstra a trisseção do ângulo.

4.2 Quadratura do círculo

Embora a principal aplicação da espiral de Arquimedes fosse para a trisseção de ângulos, ela também se mostrou útil para a quadratura do círculo. Arquimedes mostrou que, pelo ponto P , trace a tangente à espiral OPR e suponha que essa tangente corte no ponto Q a reta por O que é perpendicular a OP . Então, demonstrou Arquimedes, o segmento de reta OQ (chamado subtangente polar para o ponto P) tem comprimento igual ao do arco circular PS com centro O e raio OP (Fig. 7) que é cortado entre a semirreta inicial (eixo polar) e a semirreta OP (raio vetor).

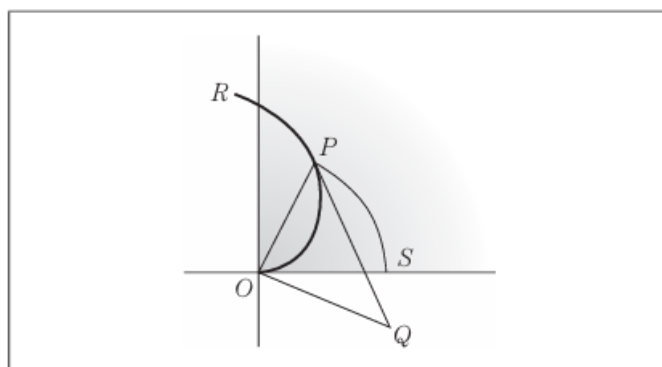


Figura 7: Fonte: BOYER; MERZBACH (2012, p. 103).

Esse teorema foi demonstrado por Arquimedes através de um argumento de redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*) e, embora possa ser verificado usando ferramentas de cálculo moderno, foi um avanço significativo para a matemática da época. Arquimedes, portanto, não só contribuiu para a geometria clássica, mas também antecipou conceitos de cálculo diferencial, como a derivada e a tangente, em seu estudo da espiral.

Esse estudo levou Arquimedes à descoberta de um método para a quadratura do círculo, usando a espiral. Se o ponto P sobre a espiral for escolhido como intersecção da espiral com a reta de ângulo 90° em coordenadas polares, a subtangente polar OQ será precisamente igual ao quarto da circunferência do círculo de raio OP . Portanto, se constrói a circunferência fazendo quatro vezes o segmento OQ , e, pelo teorema de Arquimedes, se acha um triângulo de área igual à do círculo.

O teorema de Arquimedes afirma que a área de qualquer círculo é igual à de um triângulo retângulo, com um dos catetos correspondendo ao raio do círculo e o outro ao comprimento da sua circunferência.

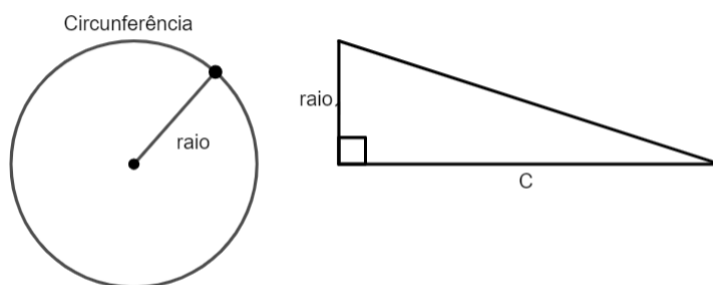


Figura 8: Circunferência e Triângulo

A partir daí, é possível determinar a área do círculo e, por meio de uma transformação geométrica simples, obter um quadrado no lugar do triângulo, gerando, assim, um quadrado de área igual à do círculo, completando a quadratura do círculo.

5 Conclusão

Arquimedes se destacou por feitos notáveis que marcaram a história da matemática. Seu princípio da alavanca demonstrou como pequenas forças podem mover grandes pesos, revolucionando a mecânica. Na matemática, ele aproximou, com precisão de duas casas, o valor de π , usando polígonos inscritos e circunscritos. Além disso, explorou a trisseção do ângulo, um problema clássico da geometria, e desenvolveu um método para a quadratura do círculo, mostrando sua profunda compreensão das áreas e formas. Seu legado permanece como um dos mais impressionantes da antiguidade.

Referências

- [1] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3º Edição. Tradução de Helena Castro. Prefácio de Isaac Asimov. São Paulo: Blucher, 2012.
- [2] Cardoso, H. B.; Freire, P. T. C.; Mendes Filho, J. Arquimedes e a Lei da Alavanca: Erros Conceituais em Livros Didáticos. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 23, n. 2, p. 218-237, ago. 2006.
- [3] Assis, A. K. T.; Magnaghi, C. P. **O Método Ilustrado de Arquimedes: Utilizando a Lei da Alavanca para Calcular Áreas, Volumes e Centros de Gravidade**. Montreal: Apeiron, 2014.
- [4] NOGUEIRA, Leandro Aparecido. **Tópicos de História da Matemática**. Seminário (PROF-MAT) – Universidade de São Paulo, 2010. Disponível em: https://sites.icmc.usp.br/wvlunes/pma5631/10.o_seminario.pdf. Acesso em: 24 mar. 2025.



Transformação de Equações em Problemas de Mínimo e sua Solução com Gradiente Descendente

Thamires Sartori Pereira

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
thamires.sartori@ufu.br

Santos Alberto Enriquez Remigio

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
santos.er@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Gradiente Descendente.
Processo iterativo.
Minimização.

Existem diferentes abordagens para resolver equações, e uma delas consiste em reformulá-las como um problema de minimização, permitindo a aplicação de métodos eficientes de otimização. Neste trabalho, exploramos essa abordagem, utilizando o método do gradiente descendente para encontrar soluções de equações por meio da minimização de funções associadas. Inicialmente, apresentamos uma revisão teórica sobre o método, seguida de uma análise do impacto do fator de atualização na convergência da solução. Nossos resultados demonstram que a escolha desse fator é crucial para a estabilidade e eficiência do método, evidenciando a necessidade de estratégias mais eficazes para sua definição.

1 Introdução

A resolução de equações é um problema fundamental em diversas áreas do conhecimento, desde a matemática pura até aplicações em engenharia, física e ciência de dados. Dentre as diversas abordagens existentes, uma estratégia eficaz consiste em reformular o problema como uma minimização, permitindo o uso de técnicas de otimização para encontrar soluções aproximadas. Essa abordagem é amplamente utilizada em estatística e inteligência artificial, onde a minimização de funções de erro é essencial para ajustar modelos e realizar previsões.

O método do gradiente descendente é uma das ferramentas mais importantes no cálculo, sendo amplamente empregado para encontrar mínimos locais de funções. Seu princípio baseia-se na direção da maior taxa de variação da função objetivo, permitindo a atualização iterativa das soluções até a convergência. Essa técnica desempenha um papel central no treinamento de redes neurais, ajuste de modelos estatísticos e otimização de funções complexas.

Neste artigo, apresentamos o método do gradiente descendente aplicado à solução de equações, demonstrando como a formulação do problema como uma minimização pode ser vantajosa. Para isso, iniciamos com uma breve revisão teórica sobre o conceito de gradiente e sua relação com a direção de maior inclinação da curva. Além disso, analisamos como a escolha do fator de atualização influencia a convergência do método, destacando a necessidade de metodologias alternativas para otimizar essa escolha e garantir maior eficiência computacional.

2 Método Gradiente Descendente

2.1 Gradiente

Começamos com uma função de uma variável $y = f(x)$. Seja $(x_0, f(x_0))$ um ponto do gráfico de f , como mostrado na Figura 1, e queremos encontrar o mínimo dessa função. A derivada de uma função em um ponto, denotada por $f'(x_0)$, representa a inclinação da reta tangente ao gráfico da função naquele ponto. Se desejamos encontrar um mínimo local da função, devemos mover-nos para a direção onde a função está decrescendo. Essa informação é dada pela derivada no ponto de partida. Se $f'(x_0) > 0$, significa que a função está crescendo naquele ponto; se $f'(x_0) < 0$, significa que a função está decrescendo. Em geral, $-f'(x_0)$ indica a direção para a qual a função decresce. Com isso, podemos realizar um movimento iterativo de atualização da variável x de acordo com a inclinação da derivada. Se estamos no ponto $x_0 = a$ e queremos encontrar um vale (mínimo), devemos mover para a esquerda se $f'(a) > 0$, pois a função está crescendo, e para a direita se $f'(a) < 0$, pois a função está decrescendo. A atualização de x é feita da seguinte forma:

$$x_{\text{novo}} = x_{\text{atual}} - \alpha f'(x_{\text{atual}}),$$

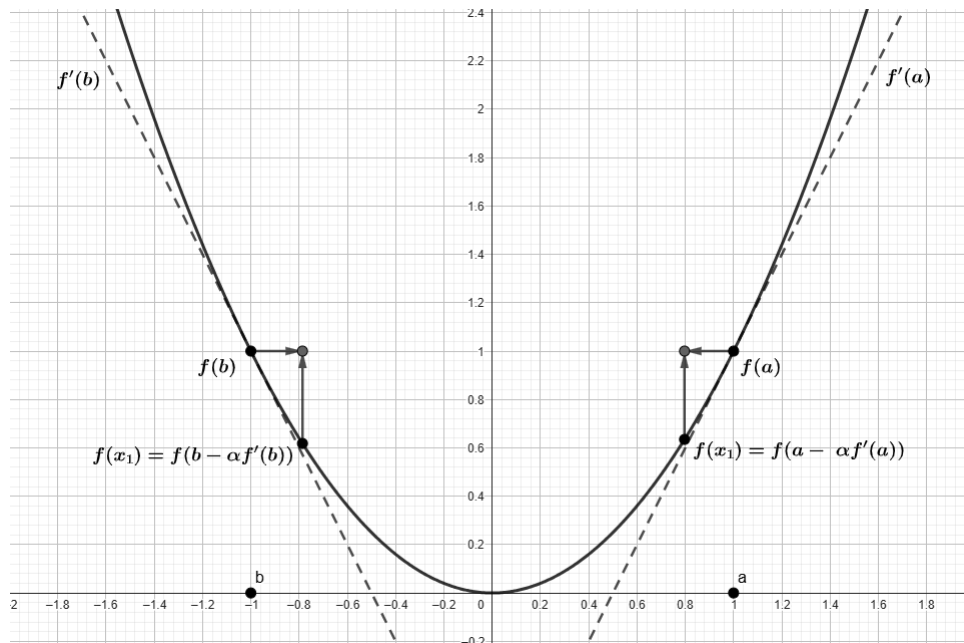


Figura 1: Gradiente Descendente para a função x^2

onde α é a taxa de aprendizagem e controla o tamanho do passo que damos em cada iteração. O valor de α deve ser escolhido de forma que não seja nem muito grande (para evitar saltos grandes e perder o mínimo) nem muito pequeno (para garantir que a convergência aconteça em tempo razoável). Geralmente, α está no intervalo $(0, 1)$.

No caso de uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$. Queremos encontrar o mínimo dessa função, ou seja, um ponto (x^*, y^*) tal que $f(x^*, y^*)$ seja o menor valor de $f(x, y)$. O gradiente de uma função de várias variáveis é um vetor que contém as derivadas parciais da função em relação a cada uma das variáveis. Para a função $f(x, y)$, o gradiente é dado por:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Onde: 1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ é a derivada parcial de f em relação a x ; 2) $\frac{\partial f}{\partial y}$ é a derivada parcial de f em relação a y .

O gradiente nos dá a direção de maior taxa de variação de $f(x, y)$. Se queremos encontrar um mínimo, precisamos nos mover na direção oposta ao gradiente, já que o gradiente aponta na direção de maior crescimento da função. Os passos do algoritmo de gradiente descendente: 1) Comece em um ponto inicial (x_0, y_0) . 2) Calcule o gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$. 3) Atualize as variáveis x e y da seguinte forma:

$$(x_{\text{novo}}, y_{\text{novo}}) = (x_{\text{atual}}, y_{\text{atual}}) - \alpha \cdot \nabla f(x_{\text{atual}}, y_{\text{atual}}).$$

Onde, α é a taxa de aprendizado (um fator que controla o tamanho do passo), e

$$\nabla f(x_{\text{atual}}, y_{\text{atual}}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

é o gradiente no ponto atual. Esse processo é repetido iterativamente, movendo-se na direção oposta ao gradiente até que a convergência seja alcançada ou até que um critério de parada seja atendido.

A ideia para uma função de mais de duas variáveis é exatamente a mesma. Se tivermos uma função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com n variáveis, o gradiente será um vetor com as derivadas parciais de f em relação a cada uma das n variáveis:

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

E a atualização de x_1, x_2, \dots, x_n será:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)_{\text{novo}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\text{atual}} - \alpha \cdot \nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Portanto, a ideia de gradiente descendente se aplica de forma semelhante, independentemente do número de variáveis. O gradiente nos dá a direção de maior variação da função, e o método de gradiente descendente utiliza a direção oposta ao gradiente para se mover em direção ao mínimo.

2.2 Taxa de aprendizagem

A taxa de aprendizagem é um parâmetro constante pré-definido que determina o quanto a função se moverá para a esquerda ou para a direita, dependendo da inclinação da reta tangente. A escolha de um valor adequado para a taxa de aprendizagem impacta diretamente a otimização do método. Uma escolha inadequada pode dificultar a convergência para o resultado desejado.

- Se α for muito pequeno, o método eventualmente convergirá, mas será muito lento, necessitando de muitas iterações.
- Se α for muito grande, a convergência será rápida, mas o método pode oscilar ou até mesmo divergir, não alcançando o mínimo correto.

3 Transformando equações em problema de minimização

Suponhamos que desejamos resolver $f(x) = 0$. Isso é equivalente a resolver $(f(x))^2 = 0$. Consideremos a função $J(x) = (f(x))^2$, sabemos que $J(x) \geq 0$. Logo, se x é tal que $f(x) = 0$, então x é um ponto onde a função J atinge o valor mínimo, que é 0. Assim, o cálculo da raiz de $f(x)$ equivale ao cálculo de x onde a função $J(x)$ atinge seu valor mínimo. A derivada de J é $J'(x) = 2f(x)f'(x)$. Logo, a determinação do mínimo de $J(x)$ requer o cálculo dos pontos críticos, isto é, devemos determinar x tal que $J'(x) = 0$. Isso ocorre quando $f(x) = 0$ ou $f'(x) = 0$. Assim, o cálculo do mínimo de $J(x)$ pode ocorrer em x onde: 1) $f(x) = 0$, então x é uma raiz da equação original; 2) $f'(x) = 0$, o que pode indicar um ponto de máximo ou mínimo de $J(x)$, mas não necessariamente uma raiz de $f(x)$. Observemos que minimizar $J(x) = (f(x))^2$ pode ser uma estratégia válida para

encontrar raízes de $f(x) = 0$, mas também pode introduzir pontos críticos adicionais que não são soluções desejadas.

Para um sistema de n equações e n incógnitas, dado por $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, com $i = 1, 2, \dots, n$, a função J é dada por:

$$J(x) = \sum_{i=1}^n (f_i(x_1, x_2, \dots, x_n))^2.$$

O gradiente de J é:

$$\nabla J = 2 \sum_{i=1}^n f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \nabla f_i.$$

4 Aplicação

4.1 Equação não linear de uma variável

O algoritmo a seguir calcula a solução da equação $x^4 + x^2 = 0,7031$. Queremos encontrar o valor de x , então transformamos nossa equação em uma função para calcular sua raiz, ou seja, $f(x) = 0$. Seja $f(x) = x^4 + x^2 - 0,7031$. Para resolvermos como um problema de minimização, consideramos a função de custo:

$$J(x) = f(x)^2 = (x^4 + x^2 - 0,7031)^2.$$

Minimizar $J(x)$ equivale a encontrar x tal que $f(x) = 0$, ou seja, a raiz da equação original.

Aplicamos o método do gradiente descendente para minimizar $J(x)$. O método atualiza iterativamente o valor de x usando a regra:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha \cdot \nabla J(x_n),$$

onde α é a taxa de aprendizado e $\nabla J(x_n)$ é o gradiente de $J(x)$ em x_n . O gradiente de $J(x)$ é dado por:

$$\nabla J(x) = 2(x^4 + x^2 - 0,7031) \cdot (4x^3 + 2x).$$

Desse modo, o algoritmo realiza iterações até que o valor de x convirja para o que minimiza $J(x)$, ou seja, até que $J(x)$ atinja a tolerância previamente definida ou seja alcançado o número máximo de iterações estipulado. Assim, é possível obter uma aproximação numérica da raiz da equação original. Para esse fim, emprega-se o método do gradiente descendente, cuja implementação é apresentada no Algoritmo 1.

Algoritmo 1 Método do gradiente descendente para resolver uma equação não linear de uma variável.

Entrada: chute inicial x , função $f(x)$, derivada $dfdx$, derivada $dJdx$, taxa de aprendizagem α , tolerância TOL, número máximo de iterações N .

Saída: valor final de x , iterações IT, $custo$.

```

1: Seja  $IT = 0$ 
2:  $custo = J(x)$ 
3: while  $custo > TOL$  e  $IT < N$  do
4:    $x = x - \alpha \cdot dJdx$ 
5:    $custo = J(x)$ 
6:    $IT = IT + 1$ 
7: end while
8: SAÍDA ( $x$ , IT,  $Custo$ )
9: PARE

```

A Tabela 1 mostra o resultado ao aplicar o método do gradiente descendente variando a taxa de aprendizagem. Para este código adotamos a tolerância = 0.001 e um número máximo de iterações igual a 10000. Sabemos que a solução exata dessa equação é $x = 0.7$ (e $x = -0.7$, pois a equação é simétrica). Nota-se que o resultado obtido mais próximo da resposta correta foi com a maior taxa de aprendizagem ($\alpha = 0.02$). Por outro lado, a menor taxa de aprendizagem ($\alpha = 0.001$) exigiu o maior número de iterações, pois o progresso em direção ao mínimo é mais lento, mas com menos risco de oscilações.

Taxa de Aprendizagem	x	$J(x)$	Iterações
$\alpha = 0.02$	0.6898476404264042	0.0008202016379244296	12
$\alpha = 0.01$	0.6897305575061337	0.0008383571546298475	25
$\alpha = 0.001$	0.6888403271712594	0.0009826850750192216	254

Tabela 1: Resultados do cálculo da raiz, com variação da taxa de aprendizado.

As taxas de aprendizado utilizadas neste experimento ($\alpha = 0.02, \alpha = 0.01, \alpha = 0.001$) foram selecionadas com base em valores comumente adotados na literatura para algoritmos de otimização, especialmente em métodos de gradiente descendente.

4.2 Sistema Linear de Equações

O algoritmo a seguir calcula a solução do sistema de equações lineares formado pelas equações:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 9, \\ -3x + 4y + 2z = 3, \\ x - y + 5z = -6. \end{cases}$$

Queremos encontrar os valores de x , y e z . Para resolvermos como um problema de minimização, definimos as funções:

$$f_1(x, y, z) = 2x + 3y - z - 9,$$

$$f_2(x, y, z) = -3x + 4y + 2z - 3,$$

$$f_3(x, y, z) = x - y + 5z + 6.$$

A função de custo $J(x, y, z)$ é então definida como:

$$J(x, y, z) = f_1(x, y, z)^2 + f_2(x, y, z)^2 + f_3(x, y, z)^2.$$

Aplicamos o método do gradiente descendente para minimizar $J(x, y, z)$. O método atualiza iterativamente os valores de x , y e z usando a regra:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha \cdot \frac{\partial J}{\partial x}, \quad y_{n+1} = y_n - \alpha \cdot \frac{\partial J}{\partial y}, \quad z_{n+1} = z_n - \alpha \cdot \frac{\partial J}{\partial z},$$

onde α é a taxa de aprendizado e $\frac{\partial J}{\partial x}$, $\frac{\partial J}{\partial y}$, $\frac{\partial J}{\partial z}$ são as derivadas parciais de $J(x, y, z)$.

A fim de resolver numericamente o sistema linear apresentado, utilizamos novamente o método do gradiente descendente. Para isso, adaptamos o Algoritmo 1, ajustando-o ao caso com três variáveis. Nessa adaptação, o algoritmo recebe como entrada as três funções que definem o sistema, suas respectivas derivadas parciais, além de parâmetros como o chute inicial, a taxa de aprendizagem, a tolerância e o número máximo de iterações. A função de custo $J(x, y, z)$ é então minimizada iterativamente até que sua variação atinja a tolerância especificada ou o número máximo de iterações seja atingido, resultando em uma aproximação para os valores de x , y e z que satisfazem o sistema. Para este código adotamos as mesmas condições iniciais do código anterior.

A Tabela 2 mostra o resultado ao aplicar o método do gradiente descendente variando a taxa de aprendizagem. Sabemos que a solução exata desse sistema de equações é $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$. Podemos concluir que o resultado obtido mais próximo da resposta correta foi com a maior taxa de aprendizagem. No entanto, é importante destacar que uma taxa de aprendizagem maior nem sempre resulta em menos iterações, pois pode causar oscilações em torno do mínimo, aumentando o número de iterações necessárias para atingir a tolerância desejada para $J(x)$. Por outro lado, a menor taxa de aprendizagem exigiu o maior número de iterações, pois o progresso em direção ao mínimo é mais lento, mas com menos risco de oscilações.

Taxa de Aprendizagem	\tilde{x}	\tilde{y}	\tilde{z}	$J(x)$	Iterações
$\alpha = 0.02$	0.99475	1.99765	-1.00080	0.0003505328791562188	10
$\alpha = 0.01$	0.99151	1.99619	-1.00130	0.0009181348849078652	21
$\alpha = 0.001$	0.99115	1.99603	-1.00135	0.0009977675040806471	231

Tabela 2: Resultado do sistema linear, com variação da taxa de aprendizado.

5 Considerações finais

Neste artigo, exploramos o uso do método do gradiente descendente para a resolução de equações, destacando sua formulação como um problema de minimização. Apresentamos dois algoritmos que ilustram a aplicação prática dessa abordagem, além de analisar os resultados obtidos em diferentes cenários.

Uma aplicação fundamental do gradiente descendente é no treinamento de redes neurais, onde a minimização da função de erro quadrático é amplamente utilizada para ajustar os pesos do modelo. Nesse contexto, a atualização dos parâmetros ocorre iterativamente na direção oposta ao gradiente da função de erro, reduzindo progressivamente a discrepância entre as previsões da rede e os valores reais. Esse processo é essencial para melhorar a capacidade preditiva do modelo e garantir que ele generalize bem para novos dados.

Apesar de sua ampla utilização em otimização e aprendizado de máquina, o gradiente descendente não é, necessariamente, a melhor técnica para a resolução de equações em todos os casos. Observamos que, embora o método seja eficiente para encontrar soluções aproximadas, sua convergência e precisão dependem fortemente da escolha do fator de atualização e das condições do problema. Métodos numéricos clássicos, como Newton-Raphson, e técnicas baseadas em decomposição matricial podem apresentar desempenho superior em determinadas situações, especialmente quando se busca alta precisão ou quando a função objetivo possui propriedades que dificultam a convergência do gradiente descendente.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

Referências

- [1] KNEUSEL, R. T.; **How AI Works: From Sorcery to Science**. San Francisco, California, U.S.A: No Starch Press, 2023.
- [2] CESTERO, E. V.; CABALLERO, A. M.; **Inteligencia Artificial**. Amherst, NY, U.S.A: Books Unplugged, 2020.
- [3] GUIDORIZZI, H. L.; **Um Curso de Cálculo: Volume 3**. 5.ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2012.



Trabalhando com números na China Antiga

Robert Vieira de Araujo

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
robert.araujo@ufu.br

Hernán Roberto Montúfar López

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
montufar@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Aproximações de π .
Obras Antigas.
Matemática Chinesa.

Este trabalho investiga a história da matemática chinesa, com foco em seus desenvolvimentos aritméticos e geométricos. A metodologia baseia-se na análise de fontes primárias, como o *Zhoubi Suanjing* e o *Jiuzhang suanshu*, e em estudos clássicos (Boyer, 2012; Eves, 1990). Os resultados revelam técnicas avançadas para a época, incluindo resolução de sistemas lineares por matrizes, aproximações de π (como 355/113 por Zu Chongzhi) e a construção de quadrados mágicos com propriedades algébricas complexas. Conclui-se que a matemática chinesa antiga combinava aplicações práticas (agrimensura, astronomia) com rigor teórico, destacando-se pela precisão numérica e métodos inovadores, cujo legado influenciou posteriormente outras culturas.

1 Introdução

A história nos mostra civilizações as margens dos rios Nilo, Tigre e Eufrates com diversos avanços tecnológicos, inclusive avanços matemáticos mas existiram também em épocas próximas, civilizações as margens dos rios Iang-tse e Amarelo, porém os registros cronológicos da história da matemática na china são menos confiáveis que os registros egípcios e babilônicos.

Assim como em outras civilizações, há registros das primeiras atividades matemáticas na forma de contagem, medições e pesagem de objetos. Entretanto, datar estes documentos não é uma tarefa fácil devido a pouca confiabilidade. Na época, era uma prática comum fazer registros em bambu, um material perecível que pode facilmente se perder. Um conjunto de textos em faixas de bambu, descoberto no início da década de 1980, da a esperança sobre uma estimativa da idade de alguns clássicos, pois foram encontrados selados em tumbas que datam do século dois a.C.

Zhoubi Suanjing, um destes livros encontrados, é geralmente considerado o mais antigo dos clássicos matemáticos e trata de cálculos astronômicos, embora contenha uma introdução relativa às propriedades do triângulo retângulo, o teorema de Pitágoras e uso de frações. A obra tem a forma de um diálogo entre um príncipe e seu ministro sobre o calendário; o ministro diz ao governante que a arte dos números deriva do círculo e do quadrado, o quadrado pertencendo à terra e o círculo aos céus (BOYER, 2012, p.143).

Trataremos então acerca dos resultados aritméticos cujos registros datam de depois de *Zhoubi*. Para isso, utilizaremos as referências [1], [2] e [3].

2 Os Nove Capítulos

Talvez o mais influente livro de matemática chinês, foi o *Jiuzhang suanhu* (*Chui-chang suan-shu*) ou *Nove Capítulos sobre a arte matemática*. Esse livro contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações e propriedades dos triângulos retângulos. Em suma, é uma coletânea de problemas específicos da época e região.

Assim como em outras obras, no *Nove Capítulos* chama a atenção a justaposição de resultados exatos e aproximações. Nele são usadas regras corretas para as áreas de triângulos, retângulos e trapézios, já a área do círculo era calculada tomando três quartos do quadrado sobre o diâmetro da circunferência, resultado correto se for adotado o valor três para π .

Exemplo 2.1. *Seja C uma circunferência de raio r e um quadrado sobre o diâmetro da circunferência, ou seja, um quadrado de lado $l = 2r$.*

Tomando três quartos da área do quadrado tem-se $\frac{3}{4} \cdot 4r^2 = 3r^2$. Por outro lado, a área da circunferência como conhecemos hoje é dada por πr^2 . Considerando $\pi = 3$, a melhor aproximação da época do resultado, temos que a igualdade é verdadeira.

O capítulo 8 do *Nove Capítulos* se destaca por conter a solução de problemas sobre equações lineares simultâneas, usando tanto números positivos quanto negativos.

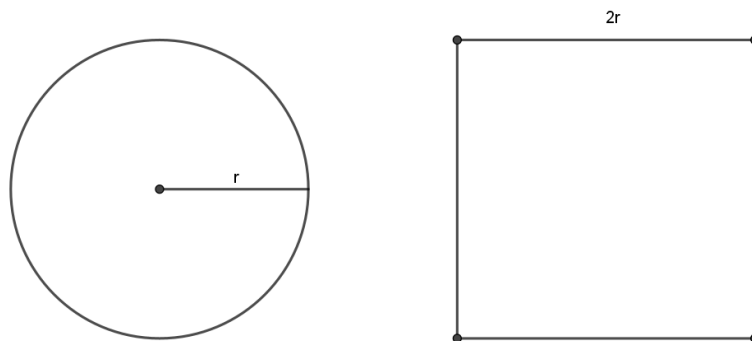


Figura 1: Circunferência e quadrado sobre seu diâmetro

Estas soluções de sistemas lineares, apesar de chegar às soluções de um escalonamento como fazemos atualmente, era um procedimento diferente do que conhecemos. O sistema é transformado em uma matriz de modo que a primeira linha do sistema seja a última coluna da matriz e as operações elementares são feitas sobre as colunas da direita para a esquerda.

Exemplo 2.2. *O sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} 2x + 10y - 5z = 3 \\ -x + 7y - 2z = 1 \\ 5x + 5y - 10z = 3 \end{cases}$$

é transformado e reduzido da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 10 \\ -10 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\approx} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -40 & 24 & 10 \\ 5 & -9 & -5 \\ -9 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\approx} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 24 & 10 \\ -30 & -9 & -5 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, a últimaa forma representava o sistema

$$\begin{cases} 2x + 10y - 5z = 3 \\ 0x + 24y - 9z = 5 \\ 0x + 0y - 30z = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{30} \\ z = \frac{1}{15} \end{cases}$$

Os chineses gostavam especialmente de padrões. Assim, não é surpreendente que o primeiro registro (de origem antiga, mas desconhecida) de um quadrado mágico tenha aparecido lá (BOYER, 2012, p.144). Quadrado este cuja soma dos números seja igual a 15 para qualquer linha, coluna ou diagonal que se tome é:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Um quadrado mágico é uma tabela quadrada em que a soma dos termos de cada linha, coluna e diagonal é sempre igual. Essa soma é chamada de constante mágica. Atualmente se sabe que para construir tais quadrados é um trabalho complexo que exige diversos conhecimentos matemáticos como teoria de números, combinatória, álgebra linear, entre outros. Apesar da complexidade, alguns casos possuem algoritmos para construção. Como exemplo tomemos um quadrado de ordem n ímpar para aplicar o método de De La Loubère:

Para preencher um quadrado de ordem n , utilizaremos os números entre 1 e n^2 . Considerando uma tabela de n linhas e n colunas.

Passo 1: iniciamos posicionando o número 1 na célula central da linha superior.

Passo 2: para o próximo número, mova-se na direção diagonal superior direita e analise os casos:

- Caso o movimento ultrapasse a primeira linha, mantenha-se na mesma coluna e vá para a última linha.
- Caso o movimento ultrapasse a última coluna, mantenha-se na mesma linha e vá para a primeira coluna.

Passo 3: Se a célula já estiver preenchida, basta colocar o novo número na célula imediatamente abaixo do último número posicionado.

Seguindo este algoritmo, construímos o quadrado mágico apresentado anteriormente, assim como os seguintes de ordens 5 e 7, em que suas constantes mágicas são 65 e 175, respectivamente:

<table><tr><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td></tr></table>		1		5			4	6				3		2		→	<table><tr><td></td><td>1</td><td>8</td><td>15</td></tr><tr><td></td><td>5</td><td>7</td><td>14</td><td>16</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>13</td><td></td><td></td></tr><tr><td>10</td><td>12</td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>11</td><td></td><td></td><td>2</td><td>9</td></tr></table>		1	8	15		5	7	14	16	4	6	13			10	12			3	11			2	9	→	<table><tr><td>17</td><td>24</td><td>1</td><td>8</td><td>15</td></tr><tr><td>23</td><td>5</td><td>7</td><td>14</td><td>16</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>13</td><td>20</td><td>22</td></tr><tr><td>10</td><td>12</td><td>19</td><td>21</td><td>3</td></tr><tr><td>11</td><td>18</td><td>25</td><td>2</td><td>9</td></tr></table>	17	24	1	8	15	23	5	7	14	16	4	6	13	20	22	10	12	19	21	3	11	18	25	2	9											
	1																																																																														
5																																																																															
4	6																																																																														
		3																																																																													
	2																																																																														
	1	8	15																																																																												
	5	7	14	16																																																																											
4	6	13																																																																													
10	12			3																																																																											
11			2	9																																																																											
17	24	1	8	15																																																																											
23	5	7	14	16																																																																											
4	6	13	20	22																																																																											
10	12	19	21	3																																																																											
11	18	25	2	9																																																																											
<table><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>10</td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>9</td><td></td></tr><tr><td></td><td>6</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>14</td><td>16</td><td></td></tr><tr><td>13</td><td>15</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>12</td></tr><tr><td></td><td></td><td>2</td><td>11</td></tr></table>			1	10		7	9			6	8		5	14	16		13	15		4			3	12			2	11	→	<table><tr><td>30</td><td>39</td><td>48</td><td>1</td><td>10</td><td>19</td><td>28</td></tr><tr><td>38</td><td>47</td><td>7</td><td>9</td><td>18</td><td>27</td><td>29</td></tr><tr><td>46</td><td>6</td><td>8</td><td>17</td><td>26</td><td>35</td><td>37</td></tr><tr><td>5</td><td>14</td><td>16</td><td>25</td><td>34</td><td>36</td><td>45</td></tr><tr><td>13</td><td>15</td><td>24</td><td>33</td><td>42</td><td>44</td><td>4</td></tr><tr><td>21</td><td>23</td><td>32</td><td>41</td><td>43</td><td>3</td><td>12</td></tr><tr><td>22</td><td>31</td><td>40</td><td>49</td><td>2</td><td>11</td><td>20</td></tr></table>	30	39	48	1	10	19	28	38	47	7	9	18	27	29	46	6	8	17	26	35	37	5	14	16	25	34	36	45	13	15	24	33	42	44	4	21	23	32	41	43	3	12	22	31	40	49	2	11	20
		1	10																																																																												
	7	9																																																																													
	6	8																																																																													
5	14	16																																																																													
13	15		4																																																																												
		3	12																																																																												
		2	11																																																																												
30	39	48	1	10	19	28																																																																									
38	47	7	9	18	27	29																																																																									
46	6	8	17	26	35	37																																																																									
5	14	16	25	34	36	45																																																																									
13	15	24	33	42	44	4																																																																									
21	23	32	41	43	3	12																																																																									
22	31	40	49	2	11	20																																																																									

3 Valores de π

A busca de valores mais precisos, desde os primeiros séculos da era cristã, era mais persistente na China que nos demais lugares. Valores como $3; 3, 1547$; $\sqrt{10}$; $\frac{92}{29}$ e $\frac{142}{45}$ são encontrados; e, no terceiro século, Liu Hui, um importante comentador do *Nove Capítulos*, obteve $3, 14$ usando um polígono regular de 96 lados e a aproximação $3, 14159$ considerando um polígono de 3.072 lados.

Um importante matemático chinês nos estudos sobre o número π foi Zu Chongzhi (Tsu Ch'ung-chih) (430-501). Um de seus valores era o familiar valor arquimediano $\frac{22}{7}$, descrito por Zu Chongzhi como "inexato"; seu valor "preciso" era $\frac{355}{113}$. No entanto, Zu Chongzhi foi ainda mais longe em seus cálculos, pois deu $3, 1415927$ como valor "em excesso" e $3, 1415926$ como "em falta", resultados notáveis para a época.

O trabalho de Liu Hui e de Zu Chongzhi representa um interesse maior na teoria e demonstrações do que exemplos conhecidos de atividade matemática antiga na China. O cálculo do valor de π obscurece esse fato, pois a precisão no valor de π é mais questão de perseverança nos cálculos do que visão teórica. O Teorema de Pitágoras por si só é suficiente para dar uma aproximação tão boa quanto se queira, como veremos a seguir.

Partindo do perímetro conhecido de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo, o perímetro do polígono regular inscrito de $2n$ lados pode ser calculado com duas aplicações do Teorema de Pitágoras. Seja C um círculo de centro O e raio r e seja $PQ = s$ um lado do polígono regular inscrito de n lados, de perímetro conhecido. Então o apótema $OM = u$ é dado por $u = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$. Logo, o segmento $MR = v = r - u$ é conhecida. Assim, o lado $RQ = w$ do polígono regular inscrito de $2n$ lados é dado por $w = \sqrt{v^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$. Então o perímetro do polígono de $2n$ lados é conhecido.

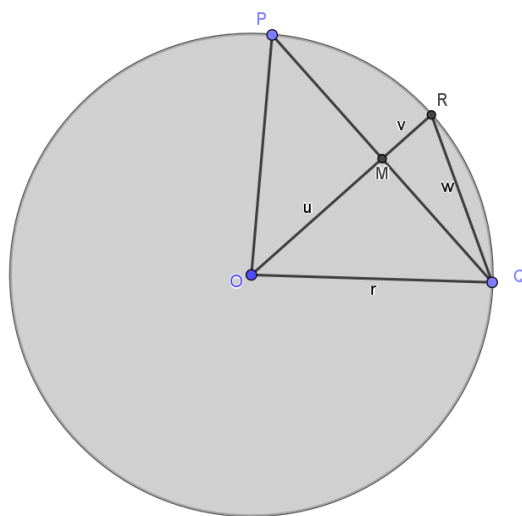


Figura 2: Perímetro de polígonos inscritos em um círculo

Uma iteração deste processo fornece aproximações cada vez melhores do perímetro do círculo, em termos de qual π é definido. Pode-se ainda simplificar os cálculos para $w^2 = 2rv$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} v = r - u \\ u = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} \\ w = \sqrt{v^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \end{cases} \implies \left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2 - u^2$$

$$\implies w^2 = v^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = v^2 + [r^2 - u^2] = r^2 - 2ru + u^2 + [r^2 - u^2]$$

$$\implies w^2 = 2r^2 - 2ru = 2r(r - u) = 2rv$$

Referências

- [1] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. 3. ed. Tradução de Helena Castro. Prefácio de Isaac Asimov. São Paulo: Blucher, 2012.
- [2] EVES, Howard. **An introduction to the history of mathematics**. 6. ed. Philadelphia: Saunders College Publishing, 1990.
- [3] PICKOVER, Clifford A. **The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars: An Exhibition of Surprising Structures Across Dimensions**. Princeton: Princeton University Press, 2002.



O uso do ChatGPT para trabalhar o erro no Ensino de Matemática

Gabriela Alonso Pereira Badiglian

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

gabriela.badiglian@ufu.br

Ana Claudia Molina Zaqueu Xavier

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

ana.zaqueu@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Erro.
Educação Matemática.
Inteligência Artificial.

O trabalho discute a presença do erro no Ensino de Matemática e busca apresentar atividades didáticas, baseadas na análise de erros, que utilizam a Inteligência Artificial, mais especificamente o ChatGPT como ferramenta. Compreendendo que errar é inevitável no ambiente escolar, o trabalho trata como inserir dinâmicas em sala de aula que instiguem os alunos a explorar o erro com o auxílio de uma tecnologia presente no cotidiano. As ideias e propostas partem de um estudo bibliográfico e de testes com o ChatGPT realizados a partir de exemplos presentes em pesquisas que investigam os erros comuns em Matemática, na Educação Básica. Como resultado, inferimos que o ChatGPT pode auxiliar a realizar testes com os erros e observar padrões que possibilitem o aluno a validar ou invalidar suas hipóteses.

1 Introdução

Um dos grandes desafios para alunos e professores é como tratar o erro no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Não há um consenso quanto a forma de lidar com ele, entretanto é de senso comum que errar é inevitável na prática escolar (Spinillo *et al.*, 2014).

A partir disso, esse estudo tem por objetivo refletir sobre o papel do erro no ensino de Matemática. Além disso, o texto abordará o modelo de Inteligência Artificial (IA), ChatGPT que, por sua interface amigável e capacidade de resolução de problemas, pode ser um instrumento potente para as aulas de Matemática. Por fim, será apresentada uma proposta de atividade utilizando o ChatGPT que se valerá do erro para se trabalhar com a Matemática. Com isso, defendemos que o professor pode usar a IA como um aliado na organização do ensino e propor práticas em que os alunos participem ativamente, em especial, no que diz respeito à compreensão dos porquês de determinadas soluções. Finalmente, assumimos que o uso da Inteligência Artificial pode permitir o desenvolvimento de propostas mais interativas, além de contribuir para uma conscientização dos estudantes em torno dos seus usos.

2 O erro no Ensino de Matemática

Errar é fracassar? O erro de um aluno indica sua incapacidade e incompreensão do conteúdo apresentado? No cenário da Educação Matemática, algumas pessoas partem do pressuposto de que os erros indicam a ausência de conhecimento acerca de um assunto e, por isso, eles devem ser eliminados do processo, ou seja, a compreensão se dá quando não há erros, caso contrário, existe um problema a ser enfrentado. Mas será que errar é mesmo um problema?

Esta noção se baseia na crença de que a aprendizagem é a formação de hábitos através de conexões entre estímulos e respostas, com uma série de reforços positivos frente ao acerto e reforços negativos frente aos erros de modo a diminuir seu aparecimento (Spinillo *et al.*, 2014). Nessa direção, ainda hoje, é comum, em especial entre estudantes, a compreensão de que “o propósito de se ensinar Matemática é apontar erros e corrigi-los” (Alro; Skovsmose *apud* Spinillo *et al.*, 2014, p. 58), o que tende a gerar uma visão de que a única forma de lidar com o erro é, simplesmente, mostrar a resposta correta.

Entretanto, será que é tão “simples”, para o aluno, simplesmente anular sua forma de

raciocínio e começar a pensar de outra? Essa prática consiste, em linhas gerais, em valorizar o produto, ou seja, a resposta final, sem considerar o processo de resolução como um todo, entendendo como correto, apenas, a forma usual de resolução e, por vezes, ignorando ou inibindo a existência de outros caminhos possíveis (Spinillo *et al.*, 2014).

Diante disso, cabe ressaltar que, obviamente, enquanto docentes, não podemos negligenciar o erro, tão pouco ignorá-lo. A não correção das atividades impossibilita o aluno de aprender e, segundo Spinillo (2014, p. 59), "a visão espontaneísta que preconiza uma aceitação incondicional dos erros é tão indesejável quanto o absolutismo pedagógico que gera uma aversão ao erro."

Assim sendo, é sabido que "o homem tem errado e continuará errando, porém, é na sua capacidade para aprender dos erros, dos fracassos, o que o torna diferente das demais espécies" (De La Torre *apud* Pinto, 1998, p. 25) e, por isso, temos defendido que o erro deve ser trabalhado em sala de aula de forma positiva, não excludente e, sobretudo, construtiva. Com isso, defendemos que a análise das respostas emitidas pelos estudantes não mais devem se baseadas apenas no resultado, mas que é preciso levantar questionamentos sobre o que, como e, quais as possíveis causas que podem ter levado ao erro cometido. Isso permite desenvolver uma educação que vai além da avaliação de um resultado.

Os erros na aula de Matemática não são aleatórios. Em geral, é possível observar padrões de respostas equivocadas em situações-problemas apresentadas no ambiente escolar. Ou seja, cada conteúdo de Matemática possui certos tipos de erros que, normalmente, o acompanham. Esses erros indicam que houve alguma confusão em etapas do processo de resolução de um problema, entretanto, ele não indica, pelo menos não diretamente, que o aluno não saiba o conceito abordado. Isso pode ser observado na pesquisa sobre adição de frações realizada por Cruz e Spinillo (2004, p.15), onde os alunos de Ensino Fundamental apresentam raciocínios que confundem as noções de fração com os números naturais:

Operação $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

Criança: Doze (escreve 12 no papel).

Examinadora: Como você fez?

Criança: $1+1+1$, 3 (referindo-se aos numeradores). $3+3+3$, 9 (referindo-se aos denominadores). Aí é para somar os resultados.

Percebe-se que respostas incorretas podem representar diferentes níveis de compreensão de um conceito ou mesmo, ausência dele (Spinillo *et al.*, 2014). Assim, uma análise do raciocínio utilizado pelo aluno é fundamental para que nós, professores, possamos perceber se o erro indica

uma confusão de conceitos, um erro de cálculo, dentre outros.

Com isso, queremos destacar que "os erros são complexos: eles não têm, jamais, uma única causa. Eles colocam em jogo numerosos parâmetros" (Baruk *apud* Pinto, 1998, p. 19) e, por isso, defendemos que, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, ele não deve ser evitado ou eliminado do ambiente escolar, pois não há situações de aprendizagem sem erros (Spinillo *et al.*, 2014). Diante disso, acreditamos que o ideal é o professor buscar transformar o erro em algo didático e positivo para o ensino.

3 Inteligência Artificial: o ChatGPT

Não há dúvidas que um dos maiores avanços da tecnologia nos últimos anos foi a implementação da Inteligência Artificial (IA). Sua interface amigável e sua infinidade de usos permitiu que ela fosse facilmente inserida no cotidiano dos indivíduos. É difícil definir o que é IA, visto suas diversas atuações e desenvolvimentos. De forma técnica,

A inteligência artificial é um campo da ciência que se concentra na criação de computadores e máquinas que podem raciocinar, aprender e atuar de maneira que normalmente exigiria inteligência humana ou que envolve dados com escala maior do que as pessoas podem analisar. A IA é um campo amplo que abrange muitas disciplinas diferentes, como ciência da computação, estatísticas e análises de dados, engenharia de hardware e software, linguística, neurociência e até mesmo filosofia e psicologia. (Google Cloud).

Introduzido em novembro de 2022, o ChatGPT conseguiu sua popularidade pelo mundo poucos dias após seu lançamento. Apesar de seus códigos não serem novos, sua interface foi o diferencial para ser difundida entre as pessoas, como aponta John Schulman, cofundador da OpenAI, empresa que fundou o ChatGPT: "As capacidades técnicas brutas, avaliadas por parâmetros convencionais, não apresentam muita diferença entre os modelos (já existentes), mas o ChatGPT é mais acessível e utilizável" (MIT Technology Review, 2023).

A interface do ChatGPT simula um programa de mensagens, ou seja, possui um campo de digitação, onde é possível escrever e inserir mídias, um botão de envio e o ambiente onde aparecerá o que foi enviado pelo usuário seguido da resposta dada pela máquina. O que chama a atenção é a forma que as respostas dadas se assemelham ao modo de fala de um humano e, por isso, é possível ter conversas casuais como se você estivesse conversando com um amigo.

O ChatGPT gera respostas originais baseadas em estímulos ou perguntas. Ele é capaz de

produzir textos coerentes e contextualmente relevantes, mesmo sem ter acesso direto a informações específicas. Por isso, as possibilidades de uso são infinitas. É possível pedir desde uma receita de um bolo até criar um código completo de um programa. Para a Educação Matemática, o interessante é sua capacidade de resolução de problemas e seu potencial para criar exercícios personalizados (Borba; Junior, 2023).

3.1 A Inteligência Artificial não é perfeita

Com o objetivo de avaliar a eficiência e precisão do ChatGPT, Borba e Junior (2023) realizaram diversos testes apresentando problemas matemáticos com diferentes graus de dificuldade para o programa responder. No geral, o autor aponta que o desempenho da máquina foi bastante satisfatório e que, nas respostas, foram apresentadas explicações claras e detalhadas que justificavam o resultado.

Entretando, é imprescindível destacar que a IA também erra. Ainda nos testes feitos por Borba e Junior (2023), um dos resultados se destacou por um erro simples cometido pelo ChatGPT em um problema de Geometria. Ao ser perguntado sobre a área de um hexágono regular com lados medindo 12cm, o programa, apesar de apresentar uma resolução detalhada, chegou ao resultado de $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$, o que mostra sua imprecisão, pois a resposta correta seria $216\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Na Figura 1, a Inteligência Artificial apresenta a fórmula correta para o cálculo da área, entretanto se confunde na parte algébrica. Veja que 12^2 é calculado para 144, porém no próximo passo é realizada a extração da raiz de 144, transformando o que inicialmente era 12^2 em 12.

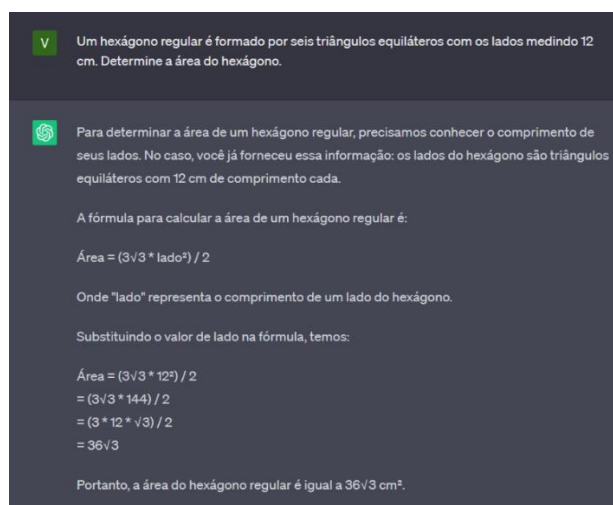


Figura 1: Resposta do ChatGPT a um problema de área

Dessa forma, ao trabalhar com IA, é importante considerar que os erros existem e, por isso, é importante superarmos a crença de que as máquinas são perfeitas.

4 Atividades didáticas com o ChatGPT

Uma vez que "não há por que ter medo ou evitar o erro. A questão é como transformá-lo em um problema, em um diálogo, em uma situação de aprendizagem" (Macedo *apud* Spinillo *et al.*, 2014, p. 63). Considerando o que foi abordado sobre erros, defendemos que pode-se trabalhar os erros em forma de atividades de exploração, por exemplo, que pode, inclusive, encorajar os alunos a expor suas próprias ideias, organizar pensamentos, criar hipóteses e descobrir questões matemáticas podem ser resolvidas de maneiras diferentes (Cury, 2007). Nesse contexto, o ChatGPT se apresenta como uma ferramenta potente a ser aliada ao processo de ensino.

Há algumas formas de trabalhar o erro no ensino de Matemática, entre elas, há situações em que são sugeridos novos dados ao problema até levar a um absurdo, descrever o caso geral para cada hipótese de resolução apresentada e observar padrões de operações incorretas causadas por um sentido estético (Cury, 2007). Em todos os casos podemos usar o ChatGPT para aprimorar as atividades.

Ao perceber diversos estudantes com a mesma dúvida, o professor pode sugerir que eles resolvam o mesmo problema incluindo novos dados, com o objetivo de chegar a um absurdo. Um exemplo é a situação apresentada por Cury (2007, p.81) ao passar a seus alunos um exercício com o seguinte enunciado: "Uma placa quadrada de metal, de espessura desprezível e medida do lado igual a 10cm, é aquecida e dilata-se uniformemente, de maneira que o comprimento de cada lado tem um acréscimo de 2%. Calcule o acréscimo percentual na área." A professora notou que alguns alunos tinham a ideia de que 2% significam $\frac{2}{100}$ independentemente do valor sobre qual é calculado. Com isso, foi proposto aos estudantes que calculassem essa porcentagem com outros valores de lado: 5cm, 1cm, 0,1cm, até que o valor do lado fosse menor do que o acréscimo como 0,01cm. Nesse momento, é possível solicitar ao ChatGPT que ele realize os cálculos por meio desse raciocínio. Após algumas interações, o próprio programa informará o equívoco dos cálculos e permitirá que o estudante veja que há um erro em seu raciocínio.

O professor pode desenvolver essas investigações de hipóteses em exercícios em que os estudantes apresentam várias respostas distintas. Em uma situação descrita por Lopes (1998 *apud*

Cury, 2007, p.82), foi solicitado aos alunos o cálculo de 2^{-3} e as respostas foram as mais diversas, tais como: -8, 8, -6, -1, $\frac{1}{2}$. Nesse contexto, o professor sugeriu escrever o caso geral para cada hipótese e testar para diversos números. Esses testes podem ser solicitados ao ChatGPT. Para $2^{-3} = -8$, a hipótese é a de que $a^{-n} = -a^n$, então os alunos podem pedir, por exemplo, que a IA faça "Calcule os valores da hipótese $2^{-n} = -2^n$ para todo n pertencente aos naturais, no intervalo [1, 20]." Com base nos resultados, o professor pode conduzir discussões a fim de trabalhar as propriedades que anulam as hipóteses. Outro exemplo dado para o levantamento de hipóteses está na questão proposta por Cury (2007, p.84):

Um aluno faltou à aula sobre simplificação de frações e, quando voltou à escola, viu no caderno de um colega a igualdade $16/64 = \frac{1}{4}$. Analisando o exemplo, ele concluiu que simplificar consiste em "cortar" o algarismo da unidade, no numerador, com o algarismo, igual, das dezenas, no denominador.

A situação em um caso geral se apresenta como $\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$, com a, b e c naturais. Nesse contexto também é possível solicitar ao ChatGPT que analise os possíveis casos dessa hipótese. Desse modo, o professor pode dialogar com os alunos os padrões que eles observaram e desenvolver a forma correta de raciocínio.

Na área da Álgebra, observa-se que os estudantes tem dificuldade em "ver" um determinado padrão e cometem erros com base no sentido estético da forma (Cury, 2007). Assim, a propriedade $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, sob esta ótica, tende a induzir ao erro $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$. Para ajudar no trabalho com esses erros que são relativamente comuns, pode-se pedir ao ChatGPT para apresentar exemplos em que $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ e, neste caso, ele próprio indicará que a condição não é verdadeira e ainda, mostrará o passo a passo para concluir que só será verdade se a ou b for igual a zero. Nesse tipo de situação, o aluno é convidado a refletir sobre a propriedade a partir da resolução da IA.

Nessas situações, o uso do ChatGPT no trabalho com erros assume um papel importante ao passo que não só realiza as operações como também, na forma de registro, possibilita a análise das soluções. Ao pedir para a IA realizar os cálculos, testar as hipóteses e checar afirmações, entende-se que se potencializa a participação dos alunos nas atividades. Ademais, o professor pode solicitar a IA para gerar questões que trabalhem os conteúdos que geram dúvidas, possibilitando a identificação de lacunas formativas.

5 Considerações finais

A partir do exposto, defendemos que o professor pode usar a IA como um aliado na organização do ensino e propor práticas em que os alunos participem ativamente, em especial, no que diz respeito à compreensão dos porquês de determinadas soluções.

Além disso, assumimos que o uso da Inteligência Artificial pode permitir o desenvolvimento de propostas mais interativas, além de contribuir para uma conscientização dos estudantes em torno dos seus usos.

Finalmente, como resultado, inferimos que o ChatGPT pode auxiliar a realizar testes com os erros e observar padrões que possibilitem o aluno a validar ou invalidar suas hipóteses.

Agradecimentos

Na condição de bolsista de Iniciação Científica, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais, FAPEMIG, pelo fomento.

Referências

- [1] BORBA M. C.; JUNIOR V. R. B.; O ChatGPT e Educação matemática. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 25, n. 3, p. 142–156, 2023.
- [2] CRUZ M. S.; SPINILLO A. G. Resolvendo adição de frações através do simbolismo matemático e através de âncoras. **Quadrante**, Portugal, v. 13, n.2, p. 13-29, 2004.
- [3] CURY, H. N. **Análise de erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos**. 2ª edição. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2007.
- [4] Google Cloud. **O que é inteligência artificial (IA)?** Google Cloud, 2023. Disponível em: <<https://cloud.google.com/learn/what-is-artificial-intelligence?hl=pt-BR#artificial-intelligence-defined>>. Acesso em: 21 mar. 2025.
- [5] MIT Technology Review. **A verdadeira história de como o ChatGPT foi desenvolvido, contada pelas pessoas que o criaram**. MIT Technology Review, 2023. Disponível em: <<https://mittechreview.com.br/a-verdadeira-historia-de-como-o-chatgpt-foi-desenvolvido-contada-pelas-pessoas-que-o-criaram/>>. Acesso em: 21 mar. 2025.
- [6] PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar**. Universidade Federal de São Paulo, São Paulo, 1998.
- [7] SPINILLO, A. G. O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso? **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 64, p. 57–70, 2014.