



XIII Semana de Matemática do Pontal



Organizadores:
Vladimir Marim
Milena Almeida Leite Brandão
Tânia Maria Machado de Carvalho

XIII Semana de Matemática do Pontal

Ituiutaba

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS DO PONTAL

Universidade Federal de Uberlândia
Av. João Naves de Ávila, 2121 – Campus Santa Mônica
CEP 38408-100 – Uberlândia – MG

Reitor

Valder Steffen Júnior

Vice-reitor

Carlos Henrique Martins da Silva

Pró-Reitor de Graduação

Kárem Cristina de Sousa Ribeiro

Diretora do ICENP

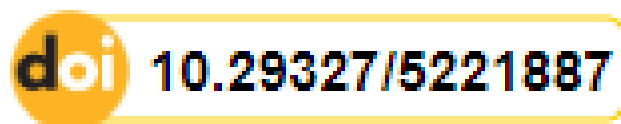
Rosana Maria Nascimento de Assunção

Coordenador do curso de matemática

Alisson Rafael Aguiar Barbosa



Esta obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-Não Comercial-
CompartilhaIgual 4.0 Internacional



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S471d
2023

XII semana de matemática do pontal [recurso eletrônico] / Vlademir Marim, Tania Maria Machado de Carvalho, Milena Almeida Leite Brandão (Organizadores). -- Ituiutaba: Figshare, 2023.
122 p.; il.

ISBN: 978-65-86084-94-8
Livro digital (e-book)
Disponível em: <https://figshare.com/>
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Publicações científicas. 3. Matemática - Congressos. II. Marim, Vlademir, (org.). III. Carvalho, Tania Maria Machado de, (org.). IV. Brandão, Milena Almeida Leite, (org.).

CDU: 51:37

Paulo Sérgio Coelho de Sá Filho
Bibliotecário/Documentalista – CRB 6/933

CONSELHO EDITORIAL

Prof. Dr. Vlademir Marim – UFU/ICENP

Prof. Dr. João Carlos Moreira – UFU/ICENP

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires – UFU/ICENP

Profa. Dra. Gabriella de Freitas Alves – UFU/ICENP

Profa. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira – UFU/ICENP

Profa. Dra. Franciella Marques da Costa – UFU/ICENP

Profa. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho – UFU/ICENP

Prof. Dr. Thiago Santos - UFOP

EDITORAÇÃO

Maria Brenda Macedo – UFU/ICHPO

Tânia Maria Machado de Carvalho – UFU/ICENP

CAPA

Maria Brenda Macedo – UFU/ICHPO

COMITÊ ORGANIZADOR DA XIII SEMAP

PRESIDÊNCIA

Profa. Dra. Milena Almeida Leite Brandão - ICENP/UFU

COMISSÃO DE ASSUNTOS GERAIS

Prof. Dr. Alisson Rafael Aguiar Barbosa - ICENP/UFU

COMISSÃO CULTURAL

Prof. Dr. Wallisom da Silva Rosa - ICENP/UFU

Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro - ICENP/UFU

COMISSÃO TÉCNICA

Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira - ICENP/UFU

Prof. Dr. Moisés Rodrigues Cirilo do Monte - ICENP/UFU

Profa. Dra. Vanda Maria Luchesi - ICENP/UFU

Profa. Dra. Patrícia Borges dos Santos - ICENP/UFU

Profa. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira - ICENP/UFU

Prof. Dr. Edward Luís de Araújo - ICENP/UFU

Ana Cláudia Gonçalves Moreira - PET Matemática Pontal

Carla Soares Lima - PET Matemática Pontal

Eduarda Cristina Silva - PET Matemática Pontal

Eulina Neta de Paula Santos - PET Matemática Pontal

Henrique Vieira dos Santos Brito - PET Matemática Pontal

Laurinda Aparecida Ferreira de Moraes - PET Matemática Pontal

Lorraine Silva Gonçalves - PET Matemática Pontal

Matheus Felipe Calu Rocha - PET Matemática Pontal

Paulo Henrique Cavalini Elias Junior - PET Matemática Pontal

Silas Silveira Campos - PET Matemática Pontal

COMISSÃO CIENTÍFICA

Profa. Dra. Franciella Marques da Costa - ICENP/UFU

Profa. Dra. Gabriella de Freitas Alves - ICENP/UFU

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires - ICENP/UFU

Profa. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho - ICENP/UFU

Prof. Dr. João Carlos Moreira - ICENP/UFU

Profa. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira – ICENP/UFU

Prof. Dr. Vlademir Marim – ICENP/UFU

Prof. Dr. Thiago Santos – UFOP

Sumário

APRESENTAÇÃO: AS CONTRIBUIÇÕES DA SEMANA DA MATEMÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO E DIVULGAÇÃO DA MATEMÁTICA NO BRASIL.....	9
---	---

PARTE I - TRABALHOS COMPLETOS

1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SUAS APLICAÇÕES NA FÍSICA E ENGENHARIA – Elias Melo Moraes, Alisson Rafael Aguiar Barbosa	14
2. ALGUMAS PROPRIEDADES DO NÚMERO π – Silas Silveira Campos, Evaneide Alves Carneiro.....	21
3. MODELO MATEMÁTICO CLÁSSICO COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS: Oscilador harmônico simples e crescimento populacional malthusiano – Fernanda de Andrade Flor, Rafael Antônio Rossato.....	28
4. ANÁLISE GEOESTATÍSTICA DA PREVALÊNCIA DE ZIKA VÍRUS NO ESTADO DE MINAS GERAIS, NOS ANOS DE 2016 A 2021 – Eduarda Cristina Silva & Gabriella de Freitas Alves.....	38
5. OS ESPAÇOS TOPOLÓGICOS CONTRÁTEIS – Mateus Fernando Araújo Silva, Francielle Rodrigues de Castro Coelho	48
6. O CONCEITO DE DUALIDADE NA GEOMETRIA PROJETIVA PLANA - Matheus Felipe Calu Rocha, Tânia Maria Machado de Carvalho.....	54
7. O TEOREMA DAS CINCO CORES - Matheus Henrique Silva do Nascimento, Evaneide Alves Carneiro.....	65
8. MULHERES NA MATEMÁTICA: ganhadoras da Medalha Fields - Lorraine Silva Gonçalves, Ana Laura Thezolin	71
9. MACETES MATEMÁTICOS ALIADOS ÀS REDES SOCIAIS DURANTE A PANDEMIA DO CORONAVÍRUS: Um relato de experiência - Tácito de Deus Ferreira Soares, Luis Henrique de Souza Carvalho, Pablo Ricardo Nunes dos Santos, Victor Dourado Coelho	79
10. BASES DE GRÖBNER E SUAS PROPRIEDADES - Victor Cruz Borges, Victor Gonzalo Lopez Neumann.....	89
11. A SURPREENDENTE RELAÇÃO ENTRE A DIRETRIZ DE UMA CÔNICA E AS	

RETAS TANGENTES NAS CORDAS FOCAIS - Laurinda Aparecida Ferreira de Moraes, Tânia Maria Machado de Carvalho	100
---	-----

PARTE II - RESUMOS EXPANDIDOS

1. RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES UTILIZANDO SOFTWARE NUMÉRICO - Carla Soares Lima, Vanda Maria Luchesi	112
2. EDUCAÇÃO FINANCEIRA E MATEMÁTICA FINANCEIRA: revisão bibliográfica do conceito de juro - Roney Andrade da Silva, Érika Maria Chioca Lopes.....	118

AS CONTRIBUIÇÕES DA SEMANA DA MATEMÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO E DIVULGAÇÃO DA MATEMÁTICA NO BRASIL

Tânia Maria Machado de Carvalho
Universidade Federal de Uberlândia

Em entrevista ao Jornal da USP, intitulada *Volume de publicações científicas dos países e bem-estar da população*^[1], concedida em 06/09/2022, o Professor Emérito do Instituto de Química da USP e ex-presidente do CNPq, Hernan Chaimovich chamou atenção para o fato de que, o Brasil ocupa lugar de destaque, estando há anos na décima quarta posição dos rankings que ordenam os países pelo número de publicações científicas. No entanto, segundo ele, quando o critério de ordenamento é o número de publicações per capita, o Brasil cai aproximadamente para a 80ª posição. Argumenta ainda que aumentar a produção de ciência por habitante, apesar de não ser uma tarefa trivial, é fundamental para o desenvolvimento socioeconômico do país. Segundo ele,

A produção científica brasileira, estimada pelo número de trabalhos indexados em bases de dados como o Web of Science ou o Scimago, cresceu de forma explosiva nos últimos quarenta anos. Entre 1980 e 2020, o número de contribuições indexadas passou de pouco mais de 2 mil para quase 97 mil. Essa variação pode ser representada por uma função exponencial muito próxima aos dados disponíveis. Em 2021, como resultado de uma política federal sustentada de ataque à ciência e às universidades, já se nota um afastamento da função exponencial, com clara diminuição do ritmo de crescimento. Parte da ciência produzida por brasileiros no Brasil, como já comentado, tem impacto social, econômico e intelectual gigantesco no País. (Chaimovich, 2022).

Vale recordar que^[2] na data de 25 de janeiro de 2018, foi anunciado, em entrevista coletiva realizada na sede do Instituto de Matemática pura e Aplicada (IMPA), no Rio de Janeiro, o ingresso do Brasil no Grupo 5, da União Matemática Internacional (IMU, na sigla em inglês). O Grupo 5 reúne as nações mais desenvolvidas em pesquisa matemática, sendo considerado uma elite da matemática mundial.

Na verdade, o Brasil já era membro da IMU desde o ano de 1954, tendo subido para o Grupo 2 em 1978; para o Grupo 3 em 1981 e para o Grupo 4 em 2005.

Em agosto de 2018 o Brasil sediou o Congresso Internacional de Matemáticos (ICM na sigla em inglês), sendo este o maior e mais importante encontro mundial da área da matemática. Foi exatamente em uma edição deste evento, em 2014, que o

¹<https://jornal.usp.br/articulistas/hernan-chaimovich-guralnik/volume-de-publicacoes-cientificas-dos-paises-e-bem-estar-da-populacao/>

²<http://www.fapeg.go.gov.br/brasil-e-promovido-ao-grupo-de-paises-da-elite-mundial-em-pesquisa-matematica/>

pesquisador brasileiro Artur Avila (IMPA), recebeu a primeira Medalha Fields concedida a um matemático latino americano. Medalha Fields, é como é conhecida a Medalha Internacional de Descobrimientos Proeminentes em Matemática (International Medal for Outstanding Discoveries in Mathematics) É um prêmio concedido a dois, três ou quatro jovens matemáticos com até 40 anos de idade durante cada edição do IMU, as quais ocorrem a cada quatro anos.

A medalha Fields e o prêmio Abel, em geral, são considerados as mais alta honrarias que um matemático pode receber, visto que pesquisadores da área de matemática não são contemplados com o prêmio Nobel. As duas honrarias diferem quanto à restrição de idade, pois a Medalha Fields é concedida somente a jovens matemáticos de até 40 anos de idade, e o Prêmio Abel não tem restrições de idade, e, pelo contrário, leva em conta o conjunto da obra do pesquisador da área de matemática.

As primeiras medalhas Fieldss foram conferidas aos matemáticos Lars Ahlfors (finlandês) Jesse Douglas (norte americano), em 1936. Até 2014, todas as medalhas foram concedidas a matemáticos do sexo masculino, sendo que, nesse ano, pela primeira vez uma mulher, Maryam Mirzakhani (iraniana) foi uma das contempladas com a medalha Fields.

Também pela primeira vez, em 2019, o prêmio Abel foi conferido a uma mulher³ Karen Uhlenbeck (americana). O prêmio foi concedido pelas contribuições da pesquisadora nas áreas de análise geométrica e teoria de calibre.

Alguns dos fatores que influíram para o notável progresso da produção científica brasileira na área da matemática, foram a expansão do sistema de graduação e pós-graduação (mestrado e doutorado) em matemática no Brasil, e, o crescimento da colaboração, tanto regional quanto internacional, dos matemáticos brasileiros com pesquisadores de outras regiões e outros países, em um intercâmbio de ideias e redes de colaboração. Nesse sentido é que entra a importância da realização de eventos, unindo pesquisa, ensino e extensão, voltados, principalmente, aos alunos de graduação e pós-graduação. Tais eventos estimulam os alunos a realizarem projetos de iniciação à ciência e incutem neles a "cultura" de produção e divulgação de trabalhos acadêmicos científicos, os quais servem de base para futuras investigações científicas e produções autorais.

Foi imbuído dessa ideia de congregação do conhecimento acadêmico entre alunos, professores, pesquisadores e comunidade externa que surgiu, em 2010, o evento **Semana de Matemática do Pontal** (I SEMAP). Desde então este evento vem ocorrendo, anualmente, sendo que a décima terceira edição (XIII SEMAP) ocorreu no período de 29 de novembro a 01 de dezembro de 2022.

O principal objetivo do evento⁴ é congrega pesquisadores (docentes e discentes) que estudam e atuam com a Matemática, fomentando a divulgação do conhecimento científico e o intercâmbio de ideias entre seus pesquisadores. Após dois anos de realização online (devido à pandemia), no ano de 2022, a semana de Matemática foi realizada de forma presencial, com algumas poucas atividades realizadas online.

³<https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2019-03/americana-e-1a-mulher-vencer-importante-premio-de-matematica>

⁴Informações extraídas do site do evento <http://www.semap.facip.ufu.br/>

As apresentações de trabalhos foram todas realizadas na forma presencial, em torno dos seguintes temas:

Matemática Pura: Esse eixo aceita a submissão de trabalhos nas áreas de Álgebra, Análise, Geometria, Topologia, Probabilidade, Teoria dos Conjuntos, Teoria da Medida, Teoria de Lie, Sistemas Dinâmicos, Equações Diferenciais e demais áreas da Matemática com foco em princípios, objetos, propriedades e resultados de caráter teórico-lógico. Os trabalhos apresentados nessa área foram:

- Algumas propriedades do número π . Silas Silveira Campos; Evaneide Alves Carneiro.
- A surpreendente relação entre a diretriz de uma cônica e as retas tangentes nas extremidades das cordas focais. Laurinda Aparecida Ferreira de Moraes; Tânia Maria Machado de Carvalho.
- Bases de Gröbner e suas propriedades. Victor Cruz Borges; Victor Gonzalo Lopez Neumann.
- Modelo matemático clássico com equações diferenciais Fracionárias: oscilador harmônico simples e crescimento populacional malthusiano. Fernanda de Andrade Flor; Rafael Antônio Rossato
- O conceito de dualidade na geometria projetiva plana. Matheus Felipe Calu Rocha; Tânia Maria Machado de Carvalho.
- Os espaços topológicos contráteis. Mateus Fernando Araújo Silva; Francielle Rodrigues de Castro Coelho
- O teorema das cinco cores. Matheus Henrique Silva do Nascimento. Evaneide Alves Carneiro.

Matemática Aplicada: Esse eixo aceita a submissão de trabalhos nas áreas de Mecânica dos Fluidos, Modelagem Matemática, Otimização, Biomatemática, Matemática Computacional, Física Matemática e demais áreas que utilizam a Matemática como ferramenta teórico-metodológica. Os trabalhos apresentados nessa área foram:

- Resolução de sistemas lineares utilizando software numérico. Carla Soares Lima. Vanda Maria Luchesi.
- Equações diferenciais e suas aplicações na física e engenharia. Elias Melo Moraes; Alisson Rafael Aguiar Barbosa.

Educação Matemática: Esse eixo aceita a submissão de trabalhos nas linhas de pesquisa em Educação Matemática tais como: História da Matemática, Etnomatemática, Ensino de Matemática, Ensino de Estatística, Psicologia da Educação Matemática, Formação de professores, dentre outras. Os trabalhos apresentados nessa área foram:

- Educação financeira e matemática financeira: Revisão bibliográfica do conceito de juro. Roney Andrade da Silva; Érika Maria Chioca Lopes.
- Macetes matemáticos aliados às redes sociais durante a pandemia do coronavírus: um relato de experiência. Tácito de Deus Ferreira Soares; Luís Henrique de Souza Carvalho; Pablo Ricardo Nunes dos Santos e Victor Dourado Coelho.
- Em particular, chamamos atenção para o artigo **Mulheres na matemática**: ganhadoras da Medalha Fields de autoria de Lorraine Silva Gonçalves e Ana Laura Thezolin. Nesse artigo as autoras trazem um resumo das trajetórias das duas únicas mulheres que ganharam a Medalha Fields, até hoje.

Estatística: Esse eixo aceita a submissão de trabalhos que tomem a Estatística como ferramenta teórico-metodológica nos contextos de estudos que envolvam a Matemática e ciências correlatas. Os trabalhos apresentados nessa área foram:

- Análise geoestatística da prevalência de zika vírus no estado de minas gerais, nos anos de 2016 a 2021. Eduarda Cristina Silva; Gabriella de Freitas Alves.

Em nome da Profa. Dra. Milena Almeida Leite Brandão - ICENP/UFU, presidente da **XIII SEMAP**, agradecemos a todos que colaboraram com a realização do evento.

PARTE 1

TRABALHOS COMPLETOS



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SUAS APLICAÇÕES NA FÍSICA E ENGENHARIA

Elias Melo Morais, Alisson Rafael Aguiar Barbosa .

Universidade Federal de Uberlândia, Universidade Federal de Uberlândia.
eliasmorais@ufu.br, aliaguia@ufu.br

Resumo. Se duas variáveis estão conectadas de alguma forma e o valor de uma pode ser unicamente determinado quando algum valor é atribuído a outra, nós dizemos que esta está em função daquela. Na linguagem matemática, entidades que mudam são chamadas variáveis e a taxa de mudança de uma variável com respeito a outra, sua derivada. Equações que expressam relações entre variáveis e suas derivadas são chamadas de equações diferenciais. Logo, as equações diferenciais se originam sempre que uma lei universal é expressa, a órbita de algum planeta é calculada, quando aferimos a viração de uma corda e até quando trabalhamos com as equações do campo de Newton. A partir disso, podemos imaginar que sistemas complexos possam ser analisados com a ajuda desta ferramenta.

Palavras-chave. Equações diferenciais aplicadas, Oscilador forçado amortecido, Sistema massa-mola-amortecedor.

Introdução

O surgimento das equações diferenciais, se dá pela necessidade do homem de se responsabilizar diretamente pelas consequências de suas ações, movimento este que acontece num contexto europeu iluminista. Formulações cada vez mais precisas na ciência aconteciam devido ao fato de que os primeiros experimentos realizados não se mostraram sensíveis o suficiente. Hoje, com o estudo das equações diferenciais, podemos prever o comportamento absoluto de sistemas, possibilitando novas descobertas e soluções.

Segundo Krantz (2005), se o cálculo é o coração da ciência moderna, as equações diferenciais são o estômago.

Para que houvesse um entendimento completo da citação acima, foram estudadas as referências de número 7 e 8, que também influenciaram na escolha da

notação de derivadas deste trabalho. A referência de número 1 foi estudada para a construção da seção 1.

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de apresentar uma abordagem do tema equações diferenciais, sendo esta esclarecedora e engajadora para o público da XIII SEMAP. A metodologia utilizada foi a pesquisa exploratória, sendo consultadas as referências de número 2, 3 e 6 para a elaboração desta introdução.

1 Breve história e definição

A história das equações diferenciais começa no século XVII, com os estudos do cálculo por Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Esse período é chamado também de século das luzes, de forma que a filosofia dessa época foi denominada filosofia das luzes, pois se considerava que nesse período o ser humano descobriu que através de sua razão ele é o detentor e produtor do conhecimento, isto é, se iluminou.

As ideias destes incríveis matemáticos, efervescem com a ajuda dos trabalhos e insights de importantes filósofos da época, como Thomas Hobbes (1588-1679), John Locke (1632-1704) e René Descartes (1643-1727).

Thomas Hobbes argumentava que o mundo e tudo nele poderia ser explicado através de reações mecânicas, ou seja, sequências de ações e reações. John Locke defendia a independência intelectual. Uma de suas ideias era a de que "onde não há lei, não há liberdade?". René Descartes aceitava o determinismo em termos do universo e do corpo humano. Do seu ponto de vista, o corpo pode ser determinado, mas a alma e a força de vontade são livres.

Agora, vejamos uma definição muito importante para este trabalho.

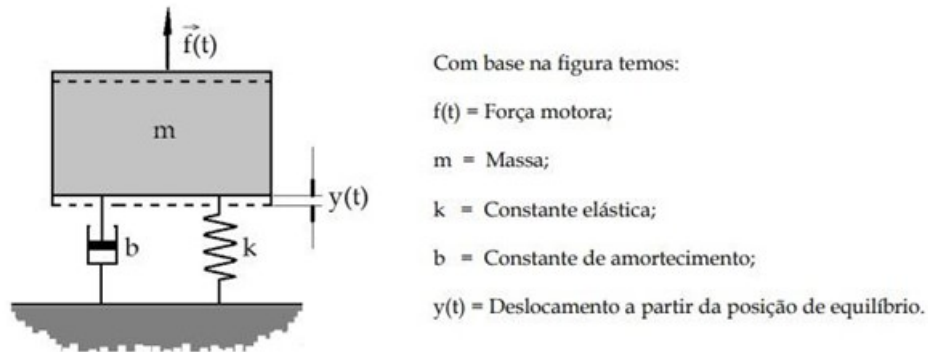
Definição 1. Uma equação diferencial é uma equação cujas incógnitas são funções e que contém, pelo menos, uma derivada dessas funções.

2 Obtenção de uma equação diferencial num sistema massa-mola-amortecedor

Vamos nos ater a uma aplicação de grande interesse na física e na engenharia, um sistema massa-mola-amortecedor. Este sistema representa um conceito aplicável a várias situações, tais como suspensão de veículos, circuitos elétricos, mesas vibratórias, vibrações de moléculas, etc.

Vamos considerar o seguinte sistema, representado pelo esquema idealizado:

Figura 1: Ilustração didática do sistema massa-mola-amortecedor.



Fonte: Rebello (2012)

Diante do sistema acima, podemos aplicar a segunda lei de Newton para massa constante.

$$F = m.a.$$

Considerando F como força resultante, obtemos:

$$F = f(t) - f_{mola} - f_{amort}.$$

Notemos aqui que, quando a força $f(t)$ promove o movimento para cima, existe uma reação contrária ao movimento, exercida pelas forças da mola e do amortecedor.

Assim, vamos analisar a natureza dessas forças.

Força elástica (da mola)

Essa é a força restauradora que tende a fazer a partícula voltar a posição de equilíbrio, obedecendo à lei de Hooke, a qual afirma que a força é proporcional à deformação da mola.

Como a deformação da mola é exatamente igual ao valor de $y(t)$, temos:

$$f_{mola} = k.y.$$

Força de amortecimento

O amortecimento se baseia no conceito de força viscosa que surge na transferência de um fluido entre duas câmaras dentro do amortecedor. No nosso caso,

vamos considerar uma força proporcional à velocidade, isto é:

$$f_{amort} = b.v.$$

Através de substituições, reescrevemos a equação proposta:

$$F = m.a \Rightarrow f(t) - k.y - b.v = m.a \Rightarrow f(t) = m.a + b.v + k.y,$$

lembrando que $v = \frac{dy}{dt}$ e $a = \frac{d^2y}{dt^2}$.

Obtemos então que,

$$f(t) = m.\frac{d^2y}{dt^2} + b.\frac{dy}{dt} + k.y,$$

que é uma equação diferencial, linear, de segunda ordem, com coeficientes constantes. A ausência da força motora $f(t)$ nos leva a uma equação diferencial homogênea, dada por

$$m.\frac{d^2y}{dt^2} + b.\frac{dy}{dt} + k.y = 0,$$

cuja equação característica é dada por

$$m.\lambda^2 + b.\lambda + k = 0.$$

Do ponto de vista mecânico, a análise do termo $b^2 - 4.m.k$ pode originar 3 tipos de movimentos:

Tabela 1: Tipos de amortecimento

$b^2 - 4.m.k > 0$	Supercrítico
$b^2 - 4.m.k = 0$	Crítico
$b^2 - 4.m.k < 0$	Subcrítico

3 Exemplo

Agora, para entendermos melhor isso, vamos ver um exemplo tirado da referência 5, o qual ilustra uma das condições anteriores.

Figura 2: Oscilador forçado amortecido.



Fonte: Rebello (2012)

Considere a mesa vibratória especial acima, munida de 4 molas, 2 amortecedores e um motor com massa excêntrica que gera uma força oscilante $f(t)$. A massa do conjunto em movimento corresponde a 5 kg. Nossa análise será feita com motor desligado $f(t) = 0$, com condições iniciais $y(0) = -0,02m$ e $y'(0) = 2m/s$.

Tomando $k = 1000 \text{ N/m}$ e $b = 150 \text{ (N.s)/m}$ obtemos a seguinte equação homogênea:

$$5 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + (2 \cdot 150) \cdot \frac{dy}{dt} + (4 \cdot 1000) = 0 \Rightarrow 5 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 300 \cdot \frac{dy}{dt} + 4000 = 0,$$

com equação característica

$$5 \cdot \lambda^2 + 300 \cdot \lambda + 4000 = 0.$$

Resolvendo a equação imediatamente acima, encontramos $\Delta = 10.000$, que gera

$$\lambda' = -20 \text{ e } \lambda'' = -40.$$

Portanto, temos a seguinte solução geral,

$$y(t) = C_1 \cdot e^{-20 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-40 \cdot t}.$$

Para determinar C_1 e C_2 , derivamos $y(t)$, obtendo:

$$y'(t) = -20 \cdot C_1 \cdot e^{-20 \cdot t} - 40 \cdot C_2 \cdot e^{-40 \cdot t}.$$

Aplicamos as condições iniciais, chegando em

$$-0,02 = C_1 + C_2 \quad \text{e} \quad 2 = -20.C_1 - 40.C_2.$$

Sistematizando e resolvendo, temos:

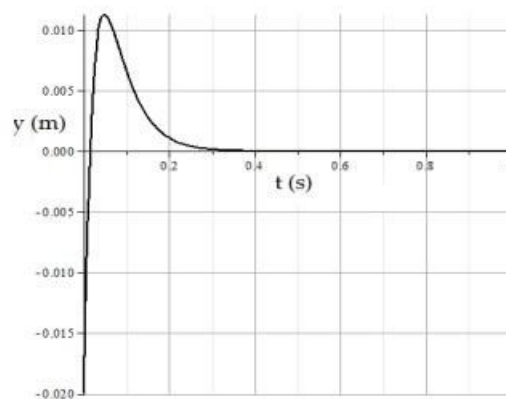
$$C_1 = 3/50 = 0,06, \quad \text{daí} \quad C_2 = -2/25 = -0,08.$$

Portanto, encontramos a seguinte combinação linear como solução

$$y(t) = 0,06.e^{-20.t} - 0,08.e^{-40.t},$$

com gráfico

Figura 3: Movimento superamortecido.



Fonte: Rebello (2012)

Neste caso o sistema é supercrítico e, portanto, não tem oscilação periódica, em função do forte amortecimento.

4 Conclusão

Podemos concluir com este trabalho que, de fato, as equações diferenciais assumem um papel indispensável na construção de modelos matemáticos para resolução de problemas nas áreas da física e engenharia.

5 Agradecimentos

Deixo aqui meus agradecimentos. Primeiramente a Deus, pela oportunidade de desenvolver este trabalho. Ao comitê científico da XIII SEMAP pelo auxílio na padronização deste modelo, e também à coordenadora do evento por me sugerir que apresentasse uma aplicação deste tema. Ao atual coordenador do Curso de Matemática do nosso campus e aos professores do Curso de Física, por examinarem meu trabalho. A todos vocês, muito obrigado!

Referências

- [1] BOYCE, E. W., DI PRIMA C. R. **Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems**. 9. ed., New York: John Wiley & Sons, 2009.
- [2] DJAIRO, F. G. **Equações Diferenciais Aplicadas**, Rio de Janeiro: IMPA 2007.
- [3] DOMSCHKE W., KONTUREK J. S. **The Stomach Physiology, Pathophysiology and Treatment**. Berlin: Springer-Verlag. 1993.
- [4] KRANTZ G. STEVEN. **Differential Equations Demystified**. 9. ed., New York: McGraw-Hill, 2005.
- [5] NUSSENZVEIG M. H. **Curso de Física Básica, 2: Fluidos, Oscilações e ondas, calor**, 5. ed., São Paulo: Blucher, 2014.
- [6] PATTON C.J. **The Cutting Edge: Philosophy of the SAW FILMS**, U.S. copyright registration. Issued February 14, 2011.
- [7] REBELLO. Notas de aula 9 - Aplicações de EDO 2ª ordem. Disponível em: <http://joinville.ifsc.edu.br/~dani.prestini/Engenharia%20Mec%C3%A2nica/2018-1/M%C3%B3dulo%204%20-%20C%C3%A1lculo%20IV/Material%20de%20Ensino/2%20-%20EDO%20de%20a.%20ordem/Nota%20de%20aula%209%20-%20Aplicacoes%20%20EDO%202ordem.pdf>. Acesso em: 21 set. 2022.
- [8] SPERELAKIS, N. (Editor-in-chief), et al. **Heart physiology and pathophysiology**, Copyright Academic press, United States of America, 2001.



ALGUMAS PROPRIEDADES DO NÚMERO π

Silas Silveira Campos, Evaneide Alves Carneiro.

Universidade Federal de Uberlândia, Universidade Federal de Uberlândia.

silas.campos@ufu.br, eva.ac@ufu.br

Resumo.

Um dos números mais famosos da história é o número pi (π), que possui grande significância na Matemática, por estar ligado à solução de vários problemas e por ser dotado de um conjunto grande de histórias ricas em detalhes. Ele corresponde à razão entre o comprimento de um círculo e o seu diâmetro. É também um número irracional, cujo valor ajuda no cálculo tanto do perímetro quanto da área de círculos. No presente trabalho, o intuito é relatar um pouco da história do número π , evidenciando porque ele é uma das mais importantes constantes do universo matemático, e demonstrar, com o auxílio da Análise Matemática, algumas propriedades desse número. Nesse sentido, apresenta-se sobre o entendimento e percepções de alguns povos e matemáticos acerca do número, sua relação com a circunferência e sobre uma de suas propriedades: a irracionalidade.

Palavra-chave. Número π . História . Demonstração. Irracionalidade.

Introdução

As evidências sobre a utilização do número π indicam que ele já era usado há cerca de 4.000 anos, sendo uma relação constante entre a circunferência e o seu diâmetro, percebida por muitas civilizações antigas.^[5] No antigo testamento da Bíblia, em I Reis 7:23, temos que: “E ele (Salomão) fez também um lago de dez cúbitos, de margem a margem, circular, cinco cúbitos de fundo, e trinta cúbitos em redor”. Este mesmo verso aparece também em II Crônicas 4:2. A leitura bíblica percorre uma lista de especificações para o grande templo de Salomão, construído cerca de 950 a.C. A circunferência era três vezes o tamanho do diâmetro. Isto significa que os antigos Hebreus se contentavam em atribuir a π o valor 3, determinado possivelmente através de algumas medições. Os povos egípcios perceberam que o valor da razão entre o comprimento c de uma circunferência e o seu diâmetro d é

a mesma para qualquer circunferência. Além disso, associavam esse valor ao do π , sendo de aproximadamente 3,16, ou seja, $\pi = \frac{e}{d}$. Acredita-se que essa aproximação foi mais precisa que a estabelecida pelos babilônios em que consideravam que ela tem o valor 3, já que afirmaram que o comprimento de qualquer circunferência era o triplo de seu diâmetro. O famoso matemático grego Arquimedes, escreveu em sua obra “Da Medida do Círculo”, que o número π relaciona-se com o comprimento da circunferência. Nessa época, já se tinha a noção que a razão entre o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro resultava em uma certa “constante”. Arquimedes, utilizando polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência, construiu uma aproximação para o número π , calculando o perímetro desses polígonos regulares. Quanto mais lados ele acrescentava no polígono, mais refinada ia sendo a sua aproximação. Através do polígono regular de 96 lados, ele calculou uma aproximação para π da forma:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

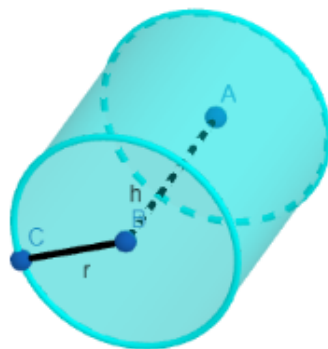
Atualmente alguns pesquisadores vêm calculando e quebrando o recorde da precisão das casas decimais do número π . De acordo com [6] o último recorde mundial foi em 2021 pela Universidade de Ciências Aplicadas de Graubünden, na Suíça, com 62,8 trilhões de casas decimais. Anteriormente a isso foram computadas 50 trilhões de casas decimais, que acabaram superando os 31,4 trilhões de dígitos passados.

Conforme [2], devido ao fato do número π ser composto por infinitas casas decimais e não ser possível a visualização do período delas, alguns autores e professores utilizam desse argumento para afirmar que ele é irracional. Entretanto, essa justificativa não é válida, e no presente trabalho essa propriedade será demonstrada com o auxílio da Análise Matemática, além de ser apresentada um pouco da história do número π , utilizando o método da pesquisa bibliográfica.

O número π é utilizado para cálculos envolvendo corpos circulares, como o comprimento da circunferência, a área do círculo, o volume e área de cones, cilindros, tronco do cone, entre outros sólidos geométricos. Por exemplo, o volume do cilindro circular reto é calculado pela fórmula:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Figura 1: Cilindro.



Fonte: Elaborada pelos autores (2022)

Esses cálculos são essenciais para compreender melhor a forma geométrica. Fica evidenciada assim a importância dessa constante, inclusive na solução de problemas práticos.

Neste trabalho, estudamos a irracionalidade de π e um pouco de sua história, utilizando o método da pesquisa bibliográfica.

1 Desenvolvimento

Como citamos anteriormente, o número π exerceu grande fascínio em várias civilizações ao longo dos séculos. O quadro abaixo mostra algumas aproximações para o valor de π , adotadas em diferentes datas.

Com o passar do tempo, as civilizações compreenderam que números como π e $\sqrt{2}$ são diferentes dos números inteiros, assim como dos números racionais. Alguns povos perceberam então a irracionalidade de $\sqrt{2}$, o que ocorreu para π apenas posteriormente. A seguir, apresentamos uma prova de que π é irracional.

1.1 A irracionalidade de π

Começamos esta seção com uma pergunta bem simples de ser respondida: “Se um número é irracional, então o quadrado dele também é irracional?”

A resposta é não, como por exemplo se tomarmos $x = \sqrt{2}$, sabemos que x é um número irracional mas o seu quadrado não é irracional.

Agora a questão recíproca: “Se o quadrado de um número é irracional, então

Origem/autor	Data	Valor
Babilônia	2000 a. C.	$3 + \frac{1}{8}$
Egito (Papiro de Ahmes)	1650 a. C.	$\left(\frac{16}{9}\right)^2$
Arquimedes	250 a. C.	$\frac{22}{7}$
Ptolomeu	150 d. C.	$\frac{377}{120}$
China (Liu Hui)	ca. 220 d. C.	3,14159
China (Tsu Chung Chih)	480 d. C.	$\frac{355}{113}$

esse numero é irracional?”

Aqui a resposta é sim, uma vez que, se $x = \frac{a}{b}$ é racional, então $x^2 = \frac{a^2}{b^2} \in \mathbb{Q}$.

Nesse sentido, mostrar que o quadrado de um número é irracional é um resultado mais forte do que mostrar que o próprio número é irracional. Por este motivo, apresentaremos a seguir uma forma resumida de demonstrar a irracionalidade de π , e na próxima seção mostraremos com detalhes que π^2 é irracional. Como as demonstrações são bastante semelhantes, optamos por evidenciar o resultado mais forte.

A primeira prova conhecida da irracionalidade de π foi apresentada pelo matemático francês Johann Heinrich Lambert, em 1761, utilizando frações contínuas. Já a demonstração comumente vista na graduação em Matemática é através da suposição de que π é um número racional para se chegar a um absurdo, e esta é a que apresentaremos brevemente a seguir.

Teorema 1. *O número π é irracional.*

Passos da demonstração. Demonstração completa em [\[3\]](#)

- Supor que π é um número racional, ou seja, $\pi = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$.

- Definir:

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x), \quad (1)$$

onde o valor de n será escolhido posteriormente.

- Mostrar que $f^{(j)}(0)$ e $f^{(j)}(\pi)$ são números inteiros, $\forall j \geq 0$.

- Provar que:

$$\int_0^\pi f(x) \sin(x) dx \in \mathbb{Z}.$$

- Concluir que $\int_0^\pi f(x) \sin(x) dx$ é um inteiro entre 0 e $\frac{1}{2}$, o que é um absurdo.

□

2 A irracionalidade de π^2

Nesta seção apresentaremos a demonstração da irracionalidade de π^2 , o que nos garantirá que π é irracional. [\[4\]](#)

Teorema 2. *O número π^2 é irracional.*

Demonstração. Sejam n um inteiro positivo, $x \in (0, 1)$ e:

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

Utilizando o Teorema Binomial, obtemos:

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-x)^k = \frac{1}{n!} \sum_{m=n}^{2n} c_m x^m,$$

onde os coeficientes c_m são inteiros. Além disso, como $0 < x < 1$, obtemos:

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}. \quad (2)$$

Suponhamos por absurdo que π^2 é racional, ou seja, $\pi^2 = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros positivos.

Vemos que $f(0) = 0$ e $f^{(m)}(0) = 0$, se $m < n$ ou $m > 2n$. Para $n \leq m \leq 2n$, temos:

$$f^{(m)}(0) = \frac{m!}{n!} c_m \in \mathbb{Z},$$

pois c_m é um número inteiro que tem a forma:

$$c_m = k \frac{n!}{(n-m)!m!}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $f(x)$ e todas as suas derivadas assumem valores inteiros em $x = 0$. Desde que $f(1-x) = f(x)$, o mesmo é válido para $x = 1$.

Agora, para $x \in (0, 1)$, definimos:

$$G(x) = b^n [\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f''(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)],$$

e pelo visto anteriormente, $G(0)$ e $G(1)$ são números inteiros. Temos ainda:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [G'(x) \sin(\pi x) - \pi G(x) \cos(\pi x)] &= \\ &= G''(x) \sin(\pi x) + \pi G'(x) \cos(\pi x) \\ &\quad - \pi G'(x) \cos(\pi x) + \pi^2 G(x) \sin(\pi x) = \\ &= [G''(x) + \pi^2 G(x)] \sin(\pi x) = \\ &= b^n \pi^{2n+2} f(x) \sin(\pi x) = \\ &= \pi^2 b^n \pi^{2n} f(x) \sin(\pi x) = \\ &= \pi^2 b^n \frac{a^n}{b^n} f(x) \sin(\pi x) = \\ &= \pi^2 a^n \sin(\pi x) f(x). \end{aligned}$$

Assim, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, vemos que:

$$I = \pi \int_0^1 a^n \sin(\pi x) f(x) dx = \left[\frac{G'(x) \sin(\pi x)}{\pi} - G(x) \cos(\pi x) \right] \Big|_0^1 = G(1) + G(0) \in \mathbb{Z}.$$

Pela equação (2),

$$0 < \pi \int_0^1 a^n \sin(\pi x) f(x) dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1,$$

para n suficientemente grande. Portanto, I é um número inteiro entre 0 e 1, o que é uma contradição. $\square$

3 Conclusão

Conclui-se através dos resultados estudados neste trabalho, a significância do número π no campo da Matemática. Notou-se a partir de uma revisão bibliográfica a grande contribuição desta constante para a solução de vários problemas. O número π , traz consigo a historicidade dos povos e civilizações que o utilizam desde o início dos tempos. Sendo um número tão fascinante, naturalmente o estudo de suas propriedades é de interesse da comunidade matemática, e dentre tais propriedades a irracionalidade está inclusa.

Referências

- [1] BARROS, R. L.; SÁ, P. F. **Incrível história do número pi**. Revista História da Matemática para Professores, v. 8, n. 1, p. 1–11, 2022. Disponível em: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/80>. Acesso em: 10 ago. 2022.
- [2] DUTRA, Alexandro Vicente. **História e curiosidades dos números PI, número de Ouro e do número de Euler**. Orientador: Marcio Costa Araújo Filho. 2017. 37 f. TCC (Graduação) – Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Rondônia, Ji-Paraná, 2017. Disponível em: https://core.ac.uk/display/294854374?utm_source=pdf&utm_medium=banner&utm_campaign=pdf-decoration-v1. Acesso em: 25 out. 2022.
- [3] FIGUEIREDO, D.G. de. **Números irracionais e transcendentos**. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [4] MILLER, J. S.; TAKLOO-BIGHASH, R. **Algebraic and transcendental numbers: an invitation to modern number theory**. Disponível em: https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/341Fa09/handouts/AlgTrans_Chap5.pdf. Acesso em: 25 set. 2022.
- [5] OLIVEIRA, J. C.; GOMES, C. C. **Números irracionais e transcendentos**. 2009. 61 f. TCC (Professor Especialista em Matemática) -Universidade Federal de Santa Catarina e Universidade Virtual do Maranhão, Imperatriz, 2009.
- [6] ONODY, Roberto Nicolau. **O número Pi com 62,8 trilhões de casas decimais**. IFSC, 2021. Disponível em: <https://www2.ifsc.usp.br/portal-ifsc/o-numero-pi-com-628-trilhoes-de-casas-decimais>. Acesso em: 24 de out. de 2022.



MODELO MATEMÁTICO CLÁSSICO COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS: oscilador harmônico simples e crescimento populacional malthusiano

Fernanda de Andrade Flor, Rafael Antônio Rossato.

Universidade Federal de Uberlândia, Universidade Federal de Uberlândia.

fernandafior@ufu.br, rafaelrossato@ufu.br

Resumo. Neste trabalho discutimos a influência da derivada de ordem não inteira segundo Caputo em dois diferentes modelos matemáticos clássicos, o oscilador harmônico simples e o crescimento populacional Malthusiano. Na versão de ordem não inteira do primeiro modelo, ao considerarmos uma redução da ordem da derivada para um número não inteiro entre 1 e 2, obtemos como solução um oscilador harmônico amortecido, sugerindo que diferentes atritos do sistema, levariam a uma diminuição na taxa de variação. Entretanto, no segundo modelo observamos o comportamento oposto, uma vez que, ao considerarmos uma redução na ordem da derivada para um número não inteiro menor que 1, obtemos soluções que crescem mais rapidamente que no caso de ordem inteira, sugerindo um aumento na taxa de variação do modelo. Com esses resultados podemos concluir que uma abordagem de ordem não inteira de equações diferenciais ordinárias pode influenciar o comportamento da solução de cada modelo de modo distinto. Esse tipo de verificação contribui para o estudo de interpretações físicas e geométricas da derivada fracionária.

Palavras-chave. Cálculo Fracionário. Oscilador Harmônico. Crescimento Populacional Malthusiano. Derivada Fracionária segundo Caputo.

Introdução

O Cálculo de ordem não inteira, usualmente chamado de Cálculo Fracionário é a área da Matemática que estuda extensões para os conceitos de derivada e integral em ordens arbitrárias. Tais conceitos expandem nossas possibilidades em aplicações matemáticas, como por exemplo no estudo de equações diferenciais envolvendo derivadas de ordem não inteiras. Considerando uma equação diferencial que descreve um fenômeno específico, uma maneira de usar a modelagem fracionária é substituir as derivadas de ordem inteira por derivadas não inteiras, geralmente com ordem menor ou igual à ordem das derivadas originais, de modo que a solução usual pode ser recuperada como um caso particular.

Neste trabalho, cuja a principal referência é o artigo [1], discutimos a influência da ordem fracionária em dois diferentes modelos matemáticos clássicos, o oscilador harmônico simples e o crescimento populacional Malthusiano. Na versão fracionária do primeiro modelo, consideramos a derivada fracionária segundo Caputo de ordem $1 < \alpha \leq 2$, e como solução obtemos um oscilador harmônico amortecido. Uma possível interpretação física para este fato é que diferentes atritos do sistema, levariam a uma diminuição na taxa de variação. Entretanto, no segundo modelo, ao considerarmos uma derivada fracionária segundo Caputo de ordem $0 < \alpha \leq 1$, obtemos soluções que crescem mais rapidamente que no caso de ordem inteira, que podemos interpretar como um aumento na taxa de variação do modelo.

Para isso, na Seção 1 introduzimos alguns resultados preliminares, como a Transformada de Laplace e funções de grande importância para o desenvolvimento do cálculo fracionário. Na Seção 2 apresentamos a integral fracionária e a derivada segundo Caputo juntamente a sua Transformada de Laplace. Na Seção 3 discutimos a versão fracionária do oscilador harmônico. Por fim, na Seção 4 apresentamos a versão fracionária do modelo de crescimento populacional Malthusiano.

1 Conceitos preliminares

Nesta seção incluíremos conceitos essenciais para o entendimento do conteúdo deste trabalho.

1.1 Transformada de Laplace

No que segue apresentamos a definição da Transformada de Laplace e algumas de suas propriedades.

Definição 1. *Seja $f(t)$ uma função definida no intervalo $0 \leq t < \infty$. Definimos a transformada de Laplace de $f(t)$, denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$ ou $F(s)$, como a integral*

$$F(s) := \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

onde s , o parâmetro da transformada, é tal que $s > 0$.

Pela definição acima podemos provar a linearidade da Transformada de Laplace. De fato, para quaisquer valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f(t), g(t)$ funções cujas $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e $\mathcal{L}\{g(t)\}$ existam, temos pela linearidade da integral

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \alpha f(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \beta g(t) e^{-st} dt \\ &= \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \\ &= \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}. \end{aligned}$$

Tratando-se de problemas de valor inicial é necessário conhecer a Transformada de Laplace das derivadas da função f . Enunciamos, no teorema abaixo, a propriedade de que a transformada da derivada de ordem n de uma função pode ser escrita em termos da transformada da função. A demonstração deste teorema pode ser consultada em [3].

Teorema 1. *Seja f uma função tal que $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ são contínuas e $f^{(n)}$ é contínua por partes em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Além disso, suponhamos que f e todas as derivadas de ordem até n sejam de ordem exponencial, isto é, existem constantes k, a e M tais que*

$$|f(t)| \leq ke^{at}, \quad |f'(t)| \leq ke^{at}, \dots, \quad |f^{(n-1)}(t)| \leq ke^{at}, \quad \text{para } t \geq M.$$

Então, $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]$ existe para $s > a$ e é dada por

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

A transformada de Laplace do produto de duas funções não necessariamente é igual ao produto das transformadas. Porém tal propriedade é válida para o produto de convolução definido abaixo.

Definição 2. *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções de ordem exponencial α e β , com transformada de Laplace $F(s)$ e $G(s)$ respectivamente, no intervalo $[0, \infty)$. Definimos o produto de convolução de $f(t)$ e $g(t)$, denotado por $(f * g)$ como sendo*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Proposição 1. *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções definidas no intervalo $0 \leq t < \infty$ e de ordem exponencial. Temos*

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)].$$

A demonstração da propriedade acima pode ser consultada em [2].

A transformada de Laplace será utilizada na resolução de problemas de valores iniciais envolvendo equações diferenciais, obtendo assim uma equações algébricas. Para recuperarmos as soluções dos problemas de partida, podemos aplicar a propriedade de que $\mathcal{L}[f(t)]$ admite inversa, denotada por $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, cuja a fórmula geral nós omitimos uma vez que envolve uma integral de função de variável complexa, o qual não se aplica neste trabalho. No entanto, pode ser provado que dada $f(t)$ uma função contínua com a transformada de Laplace $F(s)$, não existe outra função contínua possuindo a mesma transformada $F(s)$.

1.2 Funções especiais

Nesta seção definimos algumas funções importantes para o estudo do Cálculo Fracionário. Iniciamos com a Função Gamma que é essencial para definir a integral de ordem não inteira.

Definição 3. A função Gamma é dada pela seguinte integral,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \forall x > 0.$$

A Função Gamma é dita como uma generalização do fatorial para números reais em virtude da propriedade abaixo.

Teorema 2. Para $n \in \mathbb{N}$, vale a igualdade

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = (n-1)!.$$

Demonstração. A demonstração segue por indução em n . Para $n = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!.$$

Logo é válido para $n = 1$. Agora suponhamos a igualdade válida para n , e mostremos a validade para $n + 1$, ou seja, $\Gamma(n + 1) = n!$. Para isso, utilizamos integração por partes, obtendo

$$\Gamma(n + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = [-e^{-t} t^n]_{t=0}^{t=\infty} + n \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!,$$

uma vez que $[-e^{-t} t^n]_{t=0}^{t=\infty} = -\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^n = 0$. □

Teorema 3. Dado $x > 0$, temos a seguinte propriedade da função Gamma

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x). \tag{1}$$

Demonstração. Integrando por partes, temos

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = [-e^{-t} t^x]_{t=0}^{t=\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).$$

□

Pelo resultado do teorema acima, para $x > 0$ temos

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{x}.$$

O lado direito desta equação está bem definido para valores de $-1 < x < 0$. Logo podemos definir o lado esquerdo também para valores obtidos do lado direito. Sendo assim podemos estender o domínio de Γ para $-1 < x < 0$. Realizando o mesmo raciocínio para os intervalos $-2 < x < -1$ e os próximos seguindo esse padrão, temos uma extensão do domínio dessa função para todos os reais não nulos, com exceção dos inteiros negativos.

Abaixo definimos a Função de Gel'fand-Shilov e calculamos a sua Transformada de Laplace, que utilizaremos nas seções seguintes.

Definição 4. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e α um número não inteiro. Definimos a função de Gel'fand-Shilov de ordem n e α , respectivamente, por

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad e \quad \phi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Aplicando a transformada de Laplace na função Gel'fand Shilov, introduzindo a mudança de variável $a = st$ e utilizando, na última igualdade, a definição da Função Gamma, temos

$$\mathcal{L}[\phi_\alpha] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-a} \left(\frac{a}{s}\right)^{\alpha-1} da = \frac{s^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-a} a^{\alpha-1} da = s^{-\alpha}. \quad (2)$$

Para a resolução das equações diferenciais ordinárias presente nos modelos fracionários que discutimos nas próximas seções, utilizamos a Transformada de Laplace da função $E_\alpha(\pm at^\alpha)$, onde a é uma constante e $E_\alpha(t)$ é a Função de Mittag-Leffler de um parâmetro que definimos a seguir.

Definição 5. Denotada por $E_\alpha(t)$, com $\alpha > 0$ e $t > 0$, definimos a Função de Mittag-Leffler de um parâmetro pela seguinte série

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

A função acima é considerada uma generalização fracionária da função exponencial, uma vez que $E_1(t) = e^t$.

Suponhamos agora $s > |a|$. Assim, pela definição de Transformada de Laplace e da Função de Mittag-Leffler, segue que

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\pm at^\alpha)] = \int_0^\infty e^{-st} E_\alpha(\pm at^\alpha) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt. \quad (3)$$

Fazendo a mudança de variável $u = st$, e pela definição de Função Gamma, temos

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha k} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha k + 1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha k} du = \frac{1}{s^{\alpha k + 1}} \Gamma(\alpha k + 1).$$

Substituindo em (3), obtemos

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\pm at^\alpha)] = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\pm a}{s^\alpha} \right]^k = \frac{1}{s} \frac{1}{1 \mp \frac{a}{s^\alpha}} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp a}. \quad (4)$$

2 Cálculo Fracionário

Nesta seção apresentamos a definição da integral fracionária e a derivada fracionária segundo Caputo. Destacamos que neste trabalho consideramos o caso

real destas definições, porém tais conceitos podem ser estendidos a ordem complexas (ver [2]).

Iniciamos apresentando o teorema abaixo que fornece uma fórmula geral para o operador integral de ordem inteira n .

Teorema 4. *Seja $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. A integral de ordem $n \in \mathbb{N}$ é dada por:*

$$I^n f(t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n . Para $n = 1$, temos

$$I^1 f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{(1-1)}}{(1-1)!} f(\tau) d\tau.$$

Consideremos a igualdade válida para n e mostremos a validade para $n + 1$. Assim, invertendo a ordem de integração, temos

$$I^{n+1} f(t) = I[I^n f(t)] = \int_0^t \int_0^u \frac{(u - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau du$$

$$I^{n+1} f(t) = \int_0^t \int_\tau^t \frac{(u - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) du d\tau.$$

Calculando a primeira integral, obtemos

$$I^{n+1} f(t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^n}{n!} f(\tau) d\tau.$$

□

A generalização do operador integral de ordem inteira para o de ordem não inteira é possível valendo-se da generalização fracionária do conceito de fatorial utilizando a função Gamma.

Definição 6. *Seja $f(t)$ uma função integrável. A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\nu > 0$ de $f(t)$ denotada por $I^\nu f(t)$ é definida como sendo:*

$$I^\nu f(t) = \phi_\nu(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(\tau) d\tau.$$

Definimos também que $I^0 f(t) = f(t)$.

Definição 7. *Sejam $\beta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que, $n - 1 < \beta \leq n$. A derivada de Caputo de ordem β de $f(x)$, com $x > 0$, denotada por $D^\beta f(x)$, é definida como*

$$D^\beta f(x) = I^{n-\beta}[D^n f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(\tau)}{(x - \tau)^{\beta+1-n}} d\tau.$$

Observemos que se $\beta = n$, então $D^\beta[f(x)] = I^{n-\beta}[D^n f(x)] = I^0[D^n f(x)] =$

$D^n f(x)$. Isto é, a derivada usual é um caso particular da derivada fracionária segundo Caputo.

Teorema 5. *Sejam $\beta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que, $n - 1 < \beta \leq n$. Então*

$$\mathcal{L}[D^\beta f(t)] = s^{\beta-n} \mathcal{L}[D^n f(t)].$$

Demonstração. Pelas Definições [6](#) e [7](#), Proposição [1](#) e a equação [2](#)

$$\mathcal{L}[D^\beta f(t)] = \mathcal{L}[I^{n-\beta} D^n f(t)] = \mathcal{L}[\phi_{n-\beta}(t) * D^n f(t)] = \mathcal{L}[\phi_{n-\beta}(t)] \cdot \mathcal{L}[D^n f(t)] = s^{\beta-n} \mathcal{L}[D^n f(t)].$$

□

3 Oscilador Harmônico Fracionário

Consideremos o oscilador harmônico simples dado pela equação

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0,$$

com condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$, onde ω_0^2 é a razão entre a constante da mola e a massa.

Substituindo a derivada de ordem 2 pela derivada fracionária de ordem $1 < \alpha \leq 2$, obtemos o oscilador harmônico fracionário de equação

$$D^\alpha x(t) + \omega^\alpha x(t) = 0 \tag{6}$$

onde $\omega_0^2 = \omega^\alpha$. Aplicando a transformada de Laplace e usando sua linearidade, segue que

$$\mathcal{L}[D^\alpha x(t)] + \omega^\alpha \mathcal{L}[x(t)] = 0.$$

Pelo Teorema [5](#) (com $n = 2$) e Teorema [1](#), temos

$$s^{\alpha-2} \mathcal{L}[D^2 x(t)] + \omega^\alpha \mathcal{L}[x(t)] = 0 \Rightarrow s^{\alpha-2} [s^2 \mathcal{L}[x(t)] - sx(0) - x'(0)] + \omega^\alpha \mathcal{L}[x(t)] = 0.$$

Denotando $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, e substituindo as condições iniciais, concluímos que

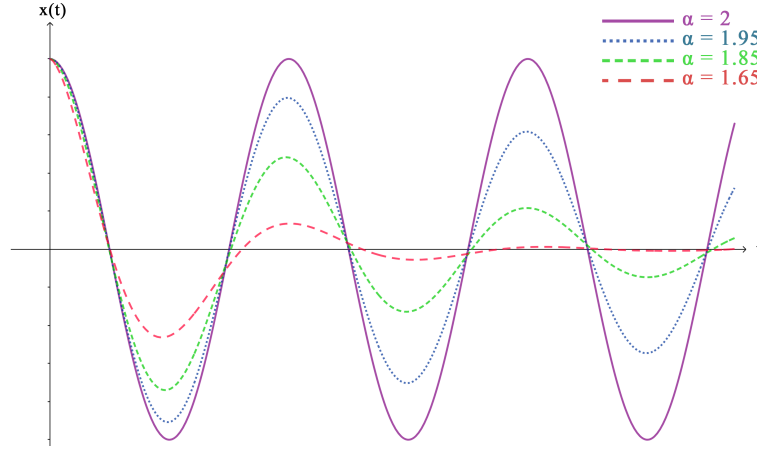
$$X(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \omega^\alpha} x_0.$$

Portanto, temos pela equação [4](#), a solução da equação diferencial fracionária [6](#), com condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$, é

$$x(t) = x_0 E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha).$$

Na Figura [1](#), esboçamos alguns gráficos de $x(t)$ para diferentes valores da ordem α .

Figura 1: Gráficos da solução do oscilador harmônico fracionário para diferentes valores da ordem α .



Fonte: Elaboração própria.

Pela Figura 1 podemos verificar que quando α tende a 2, temos que o caso inteiro é um caso particular do caso fracionário, ou seja, o oscilador harmônico simples é um caso particular do oscilador harmônico fracionário. De fato, basta ver que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2} x(t) = x_0 E_2(-\omega^2 t^2) = x_0 \cos(\omega t).$$

4 Crescimento Populacional Malthusiano Fracionário

O modelo de crescimento populacional Malthusiano, proposto por Malthus em 1798, é aplicado em problemas envolvendo uma dinâmica populacional e amplamente estudado na literatura. Pode ser utilizado, por exemplo, em populações de microrganismos, como bactérias e fungos.

De um modo geral, consideramos uma população cujo o número de indivíduos no instante t varia em uma taxa de variação proporcional a este número. Isto é, sendo $P(t)$ a população no instante t e $k \in \mathbb{R}$ a constante de proporcionalidade, podemos escrever a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t). \quad (7)$$

Substituindo em (7) a derivada de ordem 1 pela derivada fracionária segundo Caputo de ordem $0 < \alpha \leq 1$, obtemos a equação do modelo de crescimento populacional fracionário,

$$\frac{d^\alpha P(t)}{dt^\alpha} = kP(t). \quad (8)$$

Aplicando a transformada de Laplace e usando sua linearidade, segue que

$$\mathcal{L}[D^\alpha P(t)] - k\mathcal{L}[P(t)] = 0. \quad (9)$$

Pelo Teorema 5 (com $n=1$) e Teorema 1

$$s^{\alpha-1} \mathcal{L}[DP(t)] - k \mathcal{L}[P(t)] = 0 \Rightarrow s^{\alpha-1} [s \mathcal{L}[P(t)] - P(0)] - k \mathcal{L}[P(t)] = 0.$$

Denotando $F(s) = \mathcal{L}[P(t)]$, e substituindo a condição inicial, concluímos que

$$F(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - k} P_0, \quad (10)$$

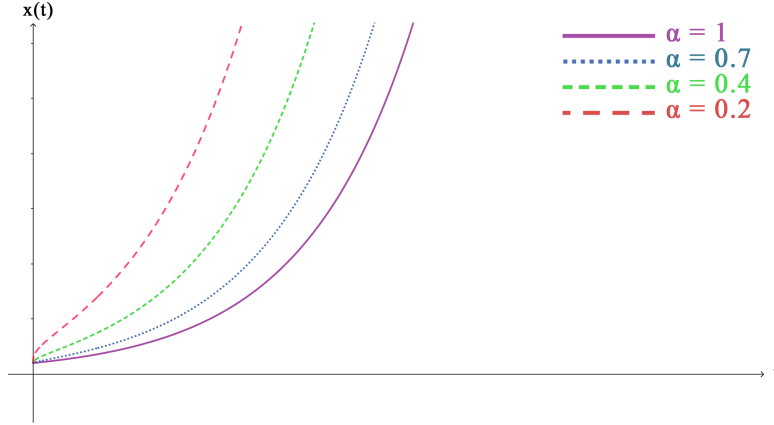
sendo $P_0 = P(0)$ a população inicial.

Portanto, pela equação (4), temos que a solução da equação diferencial fracionária (8), com condição inicial $P(0) = P_0$, é

$$P(t) = P_0 E_{\alpha}(kt^{\alpha}). \quad (11)$$

Na Figura 2, esboçamos alguns gráficos de $P(t)$ para diferentes valores da ordem α .

Figura 2: Gráficos da solução do modelo de crescimento populacional malthusiano fracionário para difentes valores da ordem α .



Fonte: Elaboração própria.

Pela Figura 2 podemos verificar que quando a ordem α tende a 1, temos que o caso inteiro é um caso particular do caso fracionário, assim como no oscilador harmônico. De fato, basta ver que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} P(t) = P_0 E_1(kt) = P_0 e^{kt}.$$

5 Conclusão

A abordagem fracionária em modelos matemáticos, tem sido utilizada afim de aumentar sua precisão e obter um modelo o mais próximo possível a realidade. De fato, ao modelar um problema específico, é comum adotar algumas simplificações, que se forem consideradas no modelo, em geral implicam numa diminuição da taxa de variação envolvida. Portanto, em alguns casos, ao invés de considerar diversos

fatores na equação, a influência destes pode ser estimada na ordem da derivada.

Isso ocorre no caso do Oscilador Harmônico Fracionário, abordado na Seção 3, pois ao substituirmos a ordem 2 da derivada do oscilador clássico para a ordem não inteira $1 < \alpha \leq 2$, obtemos um oscilador harmônico amortecido. Ou seja, é possível considerar todo o atrito do sistema, a partir da redução da ordem da equação para um número não inteiro entre um e dois.

Por outro lado, no caso do crescimento exponencial fracionário, abordado na Seção 4, temos um comportamento diferente, pois substituindo a ordem um da derivada para a ordem não inteira $0 < \alpha \leq 1$, o crescimento ocorre mais rápido.

Por fim, podemos concluir que uma abordagem fracionária do problema com redução de ordem, pode influenciar o comportamento da solução de cada modelo de modo distinto. Esse tipo de verificação contribui para buscar interpretações físicas e geométricas da derivada fracionária.

Referências

- [1] KURODA, L. K. B. *et al.* Unexpected behavior of Caputo fractional derivative. **Computational and Applied Mathematics**, n. 36, p. 1173–1183, 2017.
- [2] VARALTA, N. **Das transformadas integrais ao cálculo fracionário aplicado à equação logística**. 2014. Dissertação (Mestrado em Biometria) - Instituto de Biociências, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Botucatu, 2014.
- [3] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., IORIO, V. M. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10 ed., Rio de Janeiro: LTC, 2015.



ANÁLISE GEOESTATÍSTICA DA PREVALÊNCIA DE ZIKA VÍRUS NO ESTADO DE MINAS GERAIS, NOS ANOS DE 2016 A 2021

Eduarda Cristina Silva, Gabriella de Freitas Alves.

Universidade Federal de Uberlândia, Universidade Federal de Uberlândia.
eduarda.cristina@ufu.br, gabriellaalves@ufu.br .

Resumo. Há alguns anos o vírus Zika passou a ser motivo de preocupação no Brasil, principalmente devido a relação existente entre a contaminação de gestantes e a ocorrência de microcefalia em recém-nascidos. Para evitar novos surtos da doença é importante acompanhar sua inci-dência, principalmente em Minas Gerais, segundo estado mais populoso do país. Conside-rando a possibilidade de dependência espacial na prevalência da doença, a metodologia geo-estatística pode ser útil nesta análise. Assim, os objetivos desta pesquisa foram identificar a ocorrência de dependência espacial na prevalência de Zika vírus nos municípios do estado de Minas Gerais; mapear e comparar a prevalência do vírus nos anos de 2016 a 2021; e identi-ficar aglomerados de municípios com as maiores ocorrências da doença. Para tanto, utilizou-se semivariogramas para identificar a ocorrência de dependência espacial e a interpolação por Krigagem para mapear a prevalência anual de Zika. Após o pico da doença em 2016, a prevalência reduziu significativamente nos anos de 2017 e 2018, apresentou uma tendência de crescimento em 2019 e 2020 e voltou a reduzir em 2021. Os semivariogramas apontaram a ocorrência de dependência espacial para todos os anos analisados, o que possibilitou a uti-lização da geoestatística. O mapeamento por krigagem permitiu identificar ao longo dos anos aglomerados de municípios, localizados no Norte de Minas, Vale do Rio Doce e Triân-gulo Mineiro, que parecem reunir características climáticas e sociais mais favoráveis a ocor-rência da doença, se destacando com as maiores prevalências em praticamente todos os anos analisados.

Palavras-chave. Semivariogramas. Krigagem. Microcefalia.

Introdução

Há alguns anos o vírus Zika passou a ser motivo de preocupação no Brasil. No início de 2015 ocorreu um surto deste vírus no nordeste do país e neste mesmo ano identificou-se uma relação entre a contaminação de gestantes e a ocorrência

de microcefalia em recém-nascidos (SCHULER-FACCCINI et al., 2016). Posteriormente, verificou-se uma possível associação do vírus com um aumento na incidência da síndrome de Guillain-Barré em adultos (KASSAVETIS et al., 2016).

O Zika é transmitido principalmente pelo mosquito *Aedes aegypti* e embora várias vacinas tenham sido desenvolvidas nos últimos anos, nenhuma ainda foi aprovada e existem muitos desafios a serem vencidos nas etapas finais de avaliação (CASTANHA; MARQUES, 2020). Dessa forma, é de extrema importância acompanhar a incidência de casos, o que pode ser feito por meio de metodologias estatísticas específicas. Uma destas metodologias é a geoestatística que possibilita modelar e mapear uma variável, por meio da identificação de dependência espacial entre os pontos amostrais (GREGO; OLIVEIRA; VIEIRA, 2014).

Sob dependência, os dados coletados em pontos mais próximos tendem a ser mais parecidos em comparação aqueles coletados em pontos mais distantes (OLIVER, 2013). É provável que municípios mais próximos reúnam características mais favoráveis para ocorrência da doença, gerando dependência espacial.

Métodos geoestatísticos têm sido utilizados para analisar a distribuição espacial de doenças (SILVA et al., 2015; FONSECA; GARCIA, 2021). No entanto parecem ainda não terem sido utilizados para análise da prevalência de Zika, especialmente no estado de Minas Gerais, que de acordo com dados disponíveis no site do ministério da saúde, até 2021 havia registrado 24428 casos da doença, o que equivale ao quarto maior número de casos do país.

Desde 2020 o Brasil e o mundo enfrentam a pandemia de Covid-19 e mesmo que o momento exija total atenção, é preciso continuar acompanhando a incidência do vírus de forma a evitar novos surtos da doença. Neste contexto, mapear a prevalência do vírus ao longo dos anos pode ser extremamente útil. Assim, os objetivos desta pesquisa foram: identificar a ocorrência de dependência espacial na prevalência de Zika vírus nos municípios do estado de Minas Gerais; mapear e comparar a prevalência do vírus neste estado nos anos de 2016 a 2021; e identificar aglomerados de municípios com as maiores ocorrências da doença.

1 Metodologia

Para atingir os objetivos deste trabalho foram utilizados dados da ocorrência de Zika no estado de Minas Gerais, provenientes do Sistema de Informação de Agravos de Notificação (SINAN), disponíveis no site do ministério da saúde (DATASUS). Realizou-se um levantamento do número de casos confirmados por município de residência para cada ano entre 2016 e 2021. Posteriormente, calculou-se a pre-

valência de Zika, por cem mil habitantes, para cada município (Pz), dada por $Pz = \frac{\text{número de casos da doença}}{\text{população residente}} \cdot 100000$ (ORGANIZAÇÃO PAN-AMERICANA DA SAÚDE - OPAS, 2010).

Para a realização da análise geoestatística foram obtidas as coordenadas geográficas dos municípios de Minas Gerais. Anterior a essa análise, a variável prevalência de Zika vírus (Pz) foi submetida à análise descritiva, com o cálculo de média aritmética, variância, desvio padrão e coeficiente de variação. Posteriormente realizou-se uma análise exploratória investigando a ocorrência de assimetrias e outliers nos dados, situações com grande influência na análise geoestatística.

Após a análise exploratória iniciou-se a análise geoestatística com a construção dos gráficos denominados semivariogramas experimentais, permitindo a identificação da existência de dependência espacial da variável Pz . O semivariograma experimental foi formado pelas semivariâncias, $\hat{\gamma}(h)$, e pelas distâncias (h) entre os pontos amostrais. A semivariância, para cada distância, foi calculada utilizando o estimador $\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(s_i) - z(s_i + h)]^2$, onde $N(h)$ é o número de pares possíveis para a distância (h) entre as observações $z(s_i)$ e $z(s_i + h)$, representando respectivamente os valores das variáveis nas posições s_i e $s_i + h$ (MATHERON, 1962).

Posteriormente ajustou-se modelos teóricos de semivariogramas às semivariâncias experimentais. Este ajuste possibilitou a estimativa dos seguintes parâmetros: patamar (C), alcance (α) da dependência espacial e efeito pepita (C_0).

Sob dependência espacial, utilizou-se o método de interpolação de dados denominado krigagem ordinária. Os valores da prevalência de Zika vírus, dentro do estado foram interpolados pela seguinte combinação linear $z^*(s_0) = \sum_{i=1}^{n_v} \lambda_i z(s_i)$, onde n_v é a quantidade de vizinhos, $z(s_i)$, envolvidos na estimativa, e λ_i são os pesos associados a cada valor $z(s_i)$, sendo cada peso obtido conforme a variabilidade espacial expressa no semivariograma (VIEIRA, 2000).

Com as estimativas, construiu-se mapas, representando a distribuição espacial da prevalência do vírus no estado de Minas Gerais. Os mapas foram utilizados para identificar aglomerados de municípios com comportamento semelhante em relação a prevalência da doença. Além disso, comparou-se os mapas anuais, para a análise do comportamento temporal. As análises estatísticas foram feitas no software R (R CORE TEAM, 2020) e para análise geoestatística utilizou-se o pacote geoR do software R (RIBEIRO JÚNIOR E DIGGLE, 2020).

2 Resultados e Discussão

Um diagnóstico inicial da prevalência anual média de Zika vírus, nos municípios do estado de Minas Gerais, apontou que 2016 foi o ano de maior prevalência (112,02 casos/100 mil habitantes), com redução significativa nos anos de 2017 (29,11 casos / 100 mil habitantes) e 2018 (15,09 casos por 100 mil habitantes) (Tabela 1). É provável que essa redução seja consequência de várias ações adotadas para enfrentamento do vírus. Após con-firmar a relação causal entre a infecção pelo vírus em gestantes e a ocorrência de microcefalia em bebês, as autoridades nacionais focaram no combate ao principal vetor da doença (*Aedes aegypti*), no desenvolvimento de protocolos e no fomento à pesquisa (GARCIA, 2018).

Nos anos de 2019 e 2020 a prevalência de Zika apresentou uma tendência de crescimento, com grande redução em 2021 (Tabela 1), porém é possível que o número de casos nos anos de 2020 e 2021 seja maior do que o notificado. Desde o início da pandemia de Co-vid-19 verificou-se uma redução na procura por atendimentos médicos, além disso, é possível que os esforços para o enfrentamento da pandemia tenham gerado uma subnotificação ou atraso nas notificações das arboviroses, como dengue, chikungunya e Zika (BRASIL, 2021).

Na Tabela 1 é possível perceber o quanto os valores do desvio padrão excedem os da média aritmética, resultando em altos coeficientes de variação (superiores a 174,58%). Estes resultados mostram a grande variabilidade existente entre os municípios, pois enquanto em alguns existem poucos ou nenhum registro de casos confirmados outros acumulam vários casos ao longo dos anos. A dinâmica do *Aedes aegypti* pode ser influenciada por vários fatores como temperatura, umidade relativa do ar e pluviosidade (VIANA; IGNOTTI, 2013). Dessa forma, é provável que alguns municípios possuam características mais favoráveis à sua proliferação.

Tabela 1: Estatísticas Descritivas da prevalência de Zika vírus por 100 mil habitantes, nos municípios de Minas Gerais.

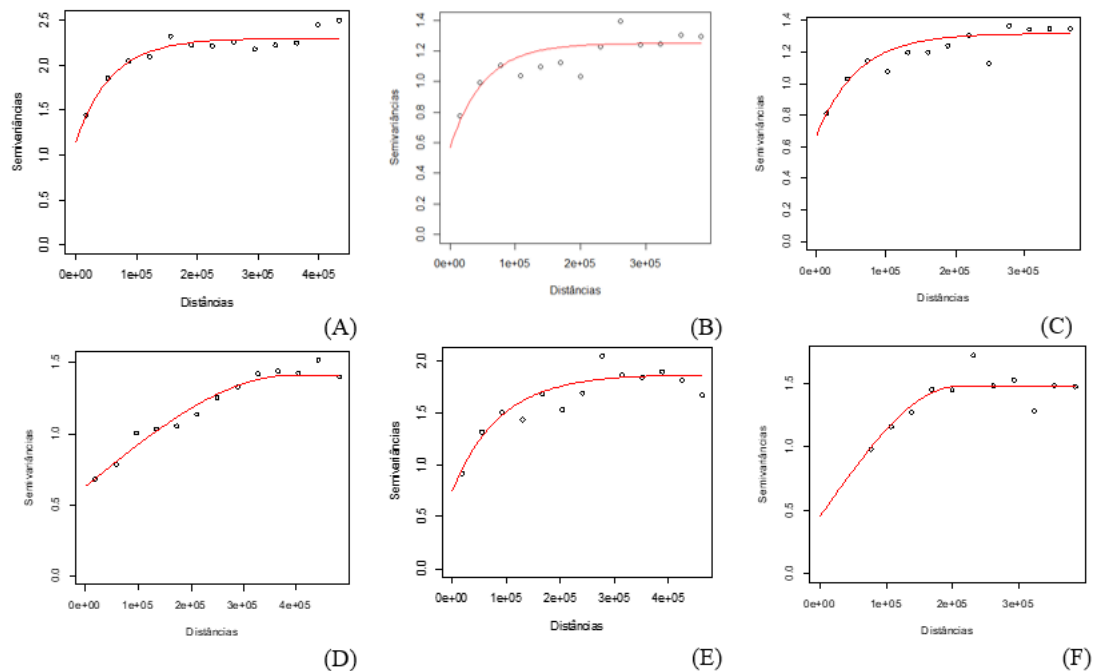
Anos	Média	Variância	Desvio Padrão	Coeficiente de Variação
2016	112,02	236,42	236,42	211,05
2017	29,11	12474,26	111,69	383,63
2018	15,09	429,99	20,74	137,37
2019	34,33	3592,39	59,94	174,58
2020	33,32	9878,39	99,39	298,26
2021	13,38	811,42	28,48	212,83

Fonte: elaborado pelo autor (2022)

Ao analisar a presença de valores discrepantes ("*outliers*") e assimetrias, identificou-se grande quantidade de "*outliers*", além de um comportamento altamente assimétrico a direita para todos os anos analisados. Devido ao fato dessas situações prejudicarem a estrutura do semi-variograma e as estimativas de krigagem, tornou-se necessário realizar a transformação loga-rítmica dos dados. Dessa forma, as semivariâncias foram calculadas com os dados transformados.

Os semivariogramas experimentais (Figuras 1A-F) apontaram a existência de dependência espacial para todos os anos analisados, confirmando a hipótese de que municípios mais próximos reúnem características mais favoráveis para ocorrência da doença. O modelo teórico exponencial foi o que melhor se ajustou as semivariâncias para os anos de 2016, 2017, 2018 e 2020 (Figura 3A?C e E), enquanto o modelo esférico se ajustou melhor às se-mivariâncias dos anos de 2019 e 2021(Figura 3D e F), devido ao comportamento linear nas menores distâncias. No ano de 2016 o alcance da dependência espacial foi de aproximadamente 175 km, indicando que municípios distanciados em até 175 km apresentam prevalências de Zika mais parecidas do que aqueles cuja distância supera esse valor. Para os anos de 2017, 2018, 2019, 2020 e 2021 os alcances foram de aproximadamente 156 km, 177 km, 390 km, 261 km e 208 km.

Figura 1: Semivariogramas experimentais das prevalências médias anuais de Zika vírus por 100 mil habitantes, nos municípios de Minas Gerais, nos anos de 2016 (A), 2017 (B), 2018 (C), 2019 (D), 2020 (E) e 2021 (F).



Elaborado pelos autores (2022)

Analisando o mapa do ano de 2016 (Figura 2B) é possível perceber que o vírus se espalhou por todas as regiões de Minas Gerais. De acordo com Ferreira et al. (2021), após o início das infecções, os casos de Zika se expandiram rapidamente para a maior parte do estado.

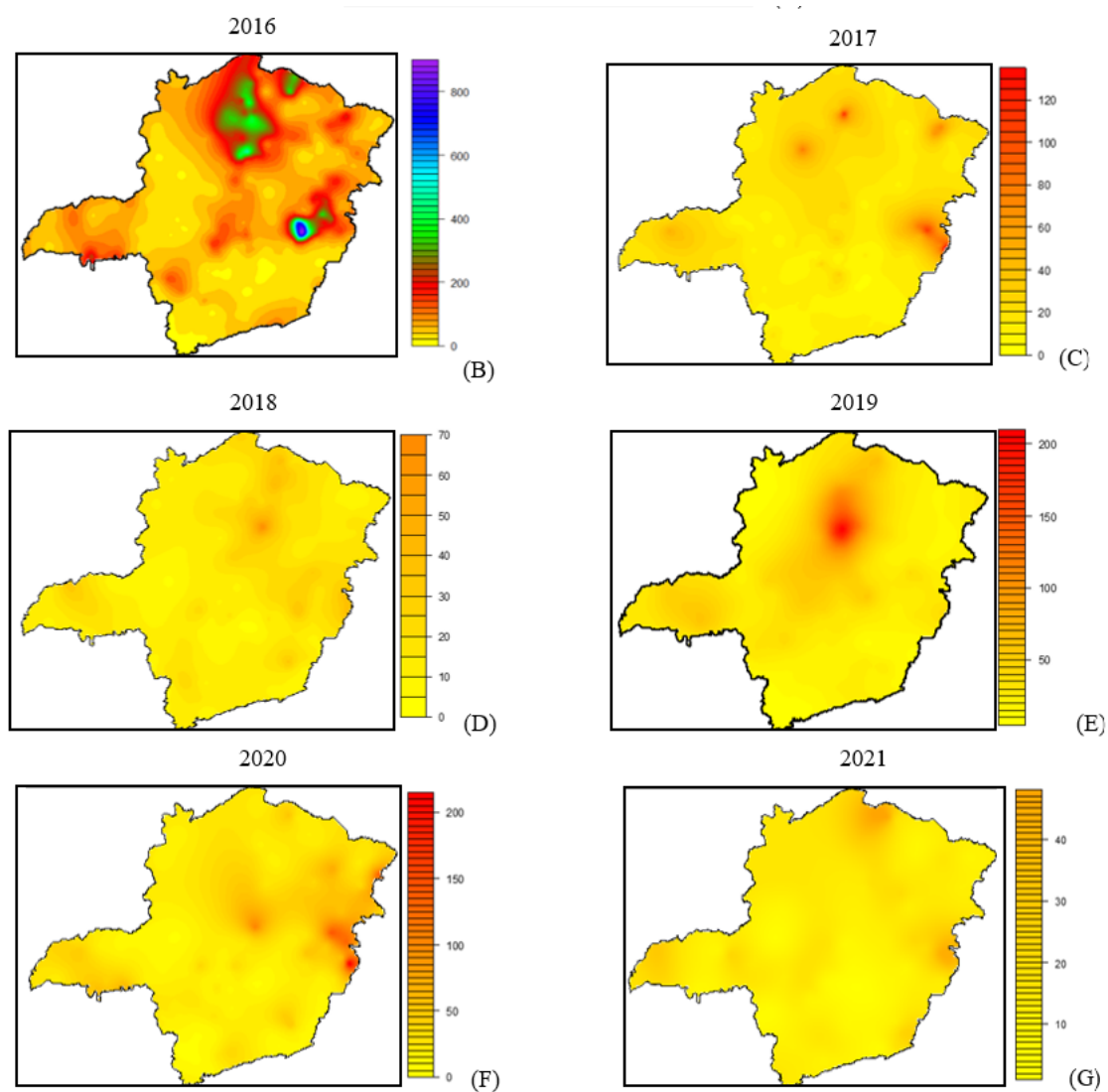
Em 2016 prevalências estimadas superiores a 280 casos/100 mil habitantes se concentraram nos municípios de Ipatinga, Caratinga, Guanhães e Governador Valadares, localizados no Vale do Rio Doce e em Januária, Montes Claros, Janaúba, Pirapora e Bocaiuva, no Norte de Minas. Em Ipatinga e Caratinga estas estimativas superaram 600 casos/100 mil habitantes. Prevalências variando de 180 a 279 casos/100 mil habitantes foram identificadas em Frutal e Uberaba, no Triângulo Mineiro e em Pedra Azul, no Jequitinhonha. Nos demais municípios verificou-se prevalências inferiores a 179 casos/100 mil habitantes, sendo que as menores prevalências (inferiores a 100/100 mil habitantes) foram estimadas em municípios do Noroeste de Minas, do Sul e Sudoeste de Minas, da Zona da Mata, do Campo das Vertentes, do Oeste de Minas e da região metropolitana de Belo Horizonte.

No ano de 2017 (Figura 2C) verificou-se uma grande redução na prevalência de Zika em todo o estado (máximo de 130 casos/100 mil habitantes), porém os municípios com as maiores prevalências coincidiram com alguns municípios do ano anterior, concentrando-se no Vale do Rio Doce (Aimorés e Governador Valadares), Norte de Minas (Monte Claros e Pirapora) e Jequitinhonha (Pedra Azul). Em 2018 (Figura 2D) a redução foi ainda maior, com no máximo 70 casos/100 mil habitantes, sendo que as maiores prevalências ocorreram em Montes Claros, Janaúba e Bocaiúva, seguidos por Ipatinga, Aimorés, Governador Valadares e Viçosa, na Zona da Mata, além de Ituiutaba no Triângulo Mineiro.

Em 2019 (Figura 2E) a prevalência voltou a crescer, atingindo 220 casos/100 mil habitantes com as maiores estimativas se concentrando em Pirapora, Bocaiúva e Montes Claros. Em 2020 (Figura 2F) as maiores prevalências foram estimadas para Aimorés e Governador Valadares. Em 2021 (Figura 2G) houve redução na prevalência (máximo de 48 casos/100 mil habitantes), sendo que as maiores estimativas foram obtidas em Janaúba, Aimorés e Ituiutaba.

Comparando os mapas de 2016 a 2021 percebe-se, além da redução de casos após o surto de 2016, pequenas alterações na distribuição espacial da prevalência de Zika entre os anos. Porém, alguns municípios do Norte de Minas, Vale do Rio Doce e Triângulo Mineiro se destacaram com as maiores prevalências em praticamente todos os anos. O Zika, assim como as demais arboviroses, são doenças que possuem uma distribuição geográfica baseada em locais favoráveis para os vetores e hospedeiros, e por isso vêm ganhando visibilidade em zonas tropicais, como o Vale do Rio Doce

Figura 2. (B - G) Mapas de krigagem das prevalências médias anuais de Zika vírus por 100 mil habitantes (B - G), nos municípios de Minas Gerais.



Elaborado pelos autores (2022)

3 Conclusão

A geoestatística se mostrou uma ferramenta eficiente para análise da prevalência de Zika vírus nos municípios de Minas Gerais. O mapeamento por krigagem permitiu identificar ao longo dos anos aglomerados de municípios, localizados no Norte de Minas, Vale do Rio Doce e Triângulo Mineiro, que parecem reunir características climáticas e sociais mais favoráveis a ocorrência da doença, se destacando com as maiores prevalências em pratica-mente todos os anos analisados.

É preciso continuar acompanhando essa prevalência, principalmente nos anos posteriores a pandemia, de forma a possibilitar ações efetivas para evitar novos

surtos da doença.

Referências

- [1] BRASIL. Ministério da Saúde. Doenças e agravos de notificação - De 2007 em diante (SINAN) Departamento de Informática do Sistema Único de Saúde - DATASUS [internet]. 2021. Disponível em: <http://www2.datasus.gov.br/DATASUS/index.php>. Acesso em: 20 jul. 2021.
- [2] CASTANHA, P., MARQUES, E. T. A glimmer of hope: recent updates and future challenges in Zika vaccine development. **Viruses**, v. 12, n. 12, p.1371, 2020.
- [3] FERREIRA, R. et al. The impact of Zika in Minas Gerais, Brazil: epidemiological profile and spatial diffusion of the disease, 2015-2019. **Revista Saúde (Santa Maria)**, v. 47, n. 1, p. 1-14, 2021.
- [4] FONSECA, D. D. S. R., GARCIA, R. A. Zoneamento das áreas com maior propensão para adoecimento pela dengue na região intra-urbana de Montes Claros (MG) a partir de variáveis sócioambientais e geoestatística. **GEOgraphia**, v. 23, n. 50, 2021.
- [5] **GARCIA, Leila Posenato**. Epidemia do vírus Zika e microcefalia no Brasil: emergência, evolução e enfrentamento. Texto para Discussão, 2018.
- [6] GREGO, C. R., OLIVEIRA R. P., VIEIRA, S. R. Geoestatística aplicada a Agricultura de Precisão. In: Agricultura de Precisão-Resultados de um Novo Olhar. Brasília, DF: Embrapa, p. 74-83, 2014.
- [7] HILLS, S. L. et al. Transmission of Zika Virus Through Sexual Contact with Travelers to Areas of Ongoing Transmission - Continental United States, 2016. **MMWR. Morbidity and mortality weekly report**, v. 65, n. 8, p. 215-216, 2016.
- [8] KASSAVETIS, P. et al. Zika virus?associated Guillain-Barré syndrome variant in Haiti. **Neurology**, v. 87, n. 3, p. 336-337, 2016.
- [9] LAGE, S. L. S. **Caracterização dos casos de dengue, zika e chikungunya no município de Montes Claros, Minas Gerais, no ano de 2019**. 2021. Dissertação (Pós Graduação) Multicêntrico em Ciências Fisiológicas da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, 2021.
- [10] LIMA, C. T. N (2016). Arboviroses emergentes e novos desafios para a saúde pública no Brasil. *Rev. Saúde Pública*. 50 (36) 179-183.
- [11] LOPES, N. A., Nozawa, C. E., Linhares, R. E. C (2014). Características gerais e epidemiologia dos arbovírus emergentes no Brasil. *Ver Pan-Amaz Saude*, 5 (3), 55-64.

- [12] MATHERON, G. **Traité de géostatistique appliquée**. Memoires du Bureau de Recherches Geologiques et Minieres, 334 p., 1962.
- [13] Organização Pan-Americana da Saúde. Medição das condições de saúde e doença na população. Módulo 3; Brasília ? DF, 2010.
- [14] OLIVER, M. A. Precision agriculture and geostatistics: How to manage agriculture more exactly. **Significance**, v. 10, n. 2, p. 17-22, 2013.
- [15] R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2020. Disponível em <https://www.R-project.org/>.
- [16] RIBEIRO JÚNIOR, P. J.; DIGGLE, P. J. geoR: Analysis of Geostatistical Data. R package version 1.7-5.2.1., 2018. Disponível em <https://CRAN.R-project.org/package=geoR>.
- [17] SCHULER-FACCINI, L. et al. Possível associação entre a infecção pelo vírus zika e a mi-crocefalia?Brasil, 2015. **MMWR: morbidity and mortality weekly report**, v. 65, n. 3, p. 1-4, 2016.
- [18] SILVA, A. M. et al. Modelagem geoestatística dos casos de dengue e da variação termoplu-viométrica em João Pessoa, Brasil. **Sociedade & Natureza**, v. 27, n. 1, p.157-169, 2015.
- [19] VIANA, D. V., IGNOTTI, E. **A ocorrência da dengue e variações meteorológicas no Brasil**: revisão sistemática. Revista Brasileira de Epidemiologia, v. 16, p. 240-256, 2013.
- [20] VIEIRA, S.R. Geoestatística em estudos de variabilidade espacial do solo. In: NOVAIS, R.F., ALVAREZ V., V.H., SCHAEFER, G.R., eds. **Tópicos em ciência do solo**. Viçosa: Sociedade Brasileira de Ciência do Solo, v. 1, p. 1-54, 2000.



OS ESPAÇOS TOPOLÓGICOS CONTRÁTEIS

Mateus Fernando Araújo Silva, Francielle Rodrigues de Castro Coelho, .

Universidade Federal de Uberlândia, Universidade Federal de Uberlândia,
mateus.fernando@ufu.br, francielle@ufu.br

Resumo. A Teoria de Homotopia entre espaços topológicos é bastante relevante em Topologia Algébrica. Nesta teoria se estudam os espaços contráteis, que são espaços topológicos que possuem o mesmo tipo de homotopia de um ponto. Neste trabalho, apresentamos conceitos e resultados sobre espaços contráteis.

Palavras-chave. Espaços topológicos. Homotopia. Espaços Contráteis.

Introdução

A Topologia Algébrica teve início por volta do ano 1894, por meio dos estudos do matemático francês Henri Poincaré, através de sua série de trabalhos reunindo os principais resultados da área, dentre eles, os resultados sobre Teoria de Homotopia.

A Teoria de Homotopia entre espaços topológicos é um importante assunto abordado em Topologia Algébrica no qual estão inseridos os espaços contráteis.

Um dos problemas estudados em Topologia é determinar quando dois espaços topológicos dados são homeomorfos ou não. Embora não existam métodos específicos para solucionar tal questão, algumas técnicas podem ser aplicadas em casos particulares. Em alguns casos, uma das técnicas utilizadas envolve resultados vistos quando se estudam os espaços contráteis.

Neste trabalho, o principal objetivo é apresentar conceitos e resultados sobre os espaços topológicos contráteis.

As principais referências para o desenvolvimento deste trabalho foram [1] e [2].

1 Homotopia

Definição 1.1. Uma topologia num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X , chamados os subconjuntos abertos (segundo a topologia τ), satisfazendo as seguintes condições:

- 1) X e o subconjunto $\emptyset$ são abertos;
- 2) a reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;
- 3) a interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

Um espaço topológico (X, τ) é um conjunto X no qual está definido uma topologia τ .

Definição 1.2. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, de um espaço topológico X num espaço topológico Y , diz-se contínua quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo aberto $B \subset Y$ for um aberto em X .

Exemplo 1.1. Seja $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $id(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se considerarmos $\mathbb{R}$ com a topologia usual, então id é contínua. De fato, se V é um aberto em $\mathbb{R}$, temos $id^{-1}(V) = V$ que é aberto em $\mathbb{R}$.

Definição 1.3. Sejam X um espaço topológico e x um ponto qualquer de X . Definimos a componente conexa por caminhos de x como sendo a reunião de todos os subconjuntos conexos por caminhos que contém x .

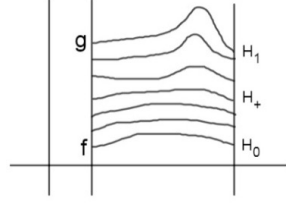
Definição 1.4. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f é homotópica a g quando existe uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow Y$, tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação H chama-se homotopia entre f e g . Notação: $f \sim g$.

Para cada $t \in I$ fixo, temos uma aplicação contínua $H_t : X \rightarrow Y$ dada por $H_t(x) = H(x, t)$, para todo $x \in X$. A coleção $(H_t)_{t \in I}$ é uma família de funções contínuas.

Observação 1.1. A relação de homotopia $\sim$ é uma relação de equivalência no conjunto de todas as funções contínuas $f : X \rightarrow Y$. De fato:

- $\sim$ é reflexiva: Para toda $f : X \rightarrow Y$ contínua, a aplicação $H : X \times I \rightarrow Y$ dada por $H(x, t) = f(x)$, para todo $(x, t) \in X \times I$, é uma homotopia entre f e f .

Figura 1: Família de funções contínuas



Fonte: Autoria do autor

• $\sim$ é simétrica: Seja $H : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g . Defina $K : X \times I \rightarrow Y$ por $K(x, t) = (x, 1 - t)$, para todo $(x, t) \in X \times I$ e obtemos uma homotopia entre g e f .

• $\sim$ é transitiva: Sejam $H : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g e a aplicação $K : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre g e h . Defina $L : X \times I \rightarrow Y$ como

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ K(x, 2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Então, a aplicação L é uma homotopia entre f e h .

Proposição 1.1. Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações constantes, tal que $f(x) = p$, para qualquer $x \in X$ e $g(x) = q$, para todo $x \in X$. As aplicações f e g são homotópicas se, e somente se, p e q pertencem a mesma componente conexa por caminhos do espaço Y .

Demonstração. Suponhamos primeiro que f e g são homotópicas. Então, existe uma homotopia $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$.

Defina uma aplicação $\alpha : I \rightarrow Y$ por $\alpha(t) = H(x, t)$, para todo $t \in I$, e temos:

$$\alpha(0) = p \text{ e } \alpha(1) = q.$$

Assim, α define um caminho entre p e q . Portanto, p e q pertencem a mesma componente conexa por caminhos.

Reciprocamente, como p e q pertencem a mesma componente conexa por caminhos de Y , segue que existe um caminho $\alpha : I \rightarrow Y$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Assim, defina uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ por $H(x, t) = \alpha(t)$, para todo $(x, t) \in X \times I$.

Logo, $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$.

Portanto, H é uma homotopia entre f e g e então, f e g são homotópicas. $\square$

Exemplo 1.2. *Seja $Y \subset E$ onde E é um espaço vetorial normado. Dadas as aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$, se para todo $x \in X$, o segmento da reta $[f(x), g(x)]$ dado por $\{(1-t)f(x) + tg(x), t \in I\}$ está contido em Y então $f \sim g$.*

De fato, basta definir $H : X \times I \rightarrow Y$ por $H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$, para todo $(x, t) \in X \times I$, e temos que H é uma homotopia entre f e g . Esta homotopia é chamada de homotopia linear.

Definição 1.5. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Dizemos que f é uma equivalência de homotopia, se existir $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \sim id_Y$ e $g \circ f \sim id_X$. A função g é chamada inversa homotópica de f . Se existir uma equivalência de homotopia entre X e Y , dizemos que X é homotopicamente equivalente a Y , ou que, X e Y têm o mesmo tipo de homotopia. Notação: $X \equiv Y$.*

Observação 1.2. (i) *Geometricamente, a existência de uma equivalência de homotopia entre X e Y significa que X pode ser deformado continuamente em Y e vice-versa.*

(ii) *A relação $\equiv$ é uma relação de equivalência no conjunto de todas as funções contínuas de X em Y .*

Exemplo 1.3. *A circunferência S^1 tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.*

Com efeito, consideremos a aplicação inclusão $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ tal que $f(u) = u$, para todo $u \in S^1$, e $g : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow S^1$ dada por $g(u) = \frac{u}{\|u\|}$, para todo $u \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Então,

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) = \frac{u}{\|u\|} = u = id_{S^1}(u), \text{ para todo } u \in S^1 \text{ e}$$

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) = \frac{u}{\|u\|}, \text{ para todo } u \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Como $\left[u, \frac{u}{\|u\|}\right] \subset \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, para todo $u \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, pois $\frac{1}{\|u\|} \neq 0$, segue, pelo exemplo 1.2 que $f \circ g \sim id_{\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}}$.

2 Espaços Contráteis

Definição 2.1. *Um espaço X é chamado **contrátil**, se $X \equiv \{x_0\}$, $x_0 \in X$, ou seja, quando X tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.*

Exemplo 2.1. *O espaço $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, é contrátil.*

De fato, temos que $\mathbb{R}^n \equiv \{0\}$ (onde 0 é o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$), pois considerando as aplicações $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\}$ dada por $f(u) = 0$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$, e $g : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $g(0) = 0$, obtemos

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) = f(0) = 0 = id_{\{0\}}(0) \text{ e } (g \circ f)(u) = g(0) = 0.$$

Assim, pelo exemplo 1.2, $g \circ f \sim id_{\mathbb{R}^n}$.

Proposição 2.1. *Sejam X um espaço topológico e $x_0 \in X$. Então, X é contrátil se, e somente se, a aplicação $id : X \rightarrow X$ é homotópica a aplicação constante $K_{x_0} : X \rightarrow X$ dada por $K_{x_0}(x) = x_0$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Primeiro, suponhamos que X é contrátil. Assim, $X \equiv \{y_0\}$, $y_0 \in X$. Logo, existem aplicações contínuas $f : X \rightarrow \{y_0\}$ e $g : \{y_0\} \rightarrow X$, com $f \circ g \sim id_{\{y_0\}}$ e $g \circ f \sim id_X$.

Seja $g(y_0) = x_0$ e $K_{x_0} : X \rightarrow X$ definida por $K_{x_0}(x) = x_0$, para todo $x \in X$. Temos que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y_0) = x_0 = K_{x_0}(x)$. Portanto, $K_{x_0} \sim id_X$.

Reciprocamente, suponhamos que $K_{x_0} \sim id_X$, $x_0 \in X$. Consideremos $f : X \rightarrow \{x_0\}$ dada por $f(x) = x_0$, para todo $x \in X$ e $g : \{x_0\} \rightarrow X$ dada por $g(x_0) = x_0$. Logo,

$$(f \circ g)(x_0) = f(g(x_0)) = f(x_0) = x_0 = id_{\{x_0\}}(x_0) \text{ e}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x_0) = x_0 = K_{x_0}(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Como $K_{x_0} \sim id_X$, segue que $g \circ f \sim id_X$. Portanto, X é contrátil. $\square$

Exemplo 2.2. *Um subconjunto X de um espaço vetorial normado E chama-se uma estrela de vértice p quando, para todo $x \in X$, o segmento de reta $[p, x]$ está contido em X . Se X é uma estrela de vértice p então $H : X \times I \rightarrow X$, $H(x, t) = (1-t)x + tp$ é uma homotopia entre id_X e a aplicação constante $X \rightarrow \{p\}$. Logo toda estrela é contrátil.*

Exemplo 2.3. *Se o espaço X é contrátil então, para todo Y , o produto cartesiano $X \times Y$ tem o mesmo tipo de homotopia que Y . De fato, da proposição 2.1, seja H uma homotopia entre id_X e a aplicação constante $X \rightarrow \{p\}$, $p \in X$. Definamos $f : X \times Y \rightarrow Y$ por $f(x, y) = y$ e $g : Y \rightarrow X \times Y$ por $g(y) = (p, y)$. Temos que:*

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(p, y) = y,$$

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(y) = (p, y).$$

Observe que, $K(x, y, t) = (H(x, t), y)$ define uma homotopia entre a aplicação identidade $id_{X \times Y}$ e a aplicação $g \circ f : X \times Y \rightarrow X \times Y$. Em particular, se X e Y forem ambos contráteis, o produto cartesiano $X \times Y$ também é contrátil.

Referências

- [1] LIMA, E. L. **Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Projeto Euclides, 1993.
- [2] MUNKRES, J. R. **Topology**. 2.ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.



O CONCEITO DE DUALIDADE NA GEOMETRIA PROJETIVA PLANA

Matheus Felipe Calu Rocha, Tânia Maria Machado de Carvalho.

Universidade Federal de Uberlândia, Universidade Federal de Uberlândia.
matheus.calu@ufu.br, tania.carvalho@ufu.br

Resumo. Na maioria das vezes, na matemática, demonstrar um teorema é uma tarefa árdua, que exige tempo, dedicação e muito estudo. Seria possível deduzir a demonstração de um teorema novo a partir de algum que já foi demonstrado? Na geometria projetiva isto é possível, e não apenas teoremas, também definições, colorários, axiomas, entre outros. Este conceito se chama *dualidade*, que, *grosso modo*, nada mais é do que obter um novo resultado apenas trocando a palavra ponto por reta e vice-versa. A título de exemplo, dois pontos quaisquer determinam uma reta e duas retas quaisquer determinam um ponto, uma vez que, na geometria projetiva duas retas são sempre concorrentes. Sendo assim, o princípio da dualidade torna a geometria projetiva um campo da matemática econômico, pois permite que novos resultados sejam deduzidos a partir de resultados previamente demonstrados. Este trabalho tem como objetivo enfatizar o conceito de dualidade dentro da geometria projetiva e, em particular, trazer como exemplo as demonstrações do teorema de Desargues, o qual é um dos principais teoremas da geometria projetiva, e de seu dual.

Palavras-chave. Dualidade. Projetividade. Teorema de Desargues.

Introdução

A geometria projetiva nasceu na Itália, no século XV, época do Renascimento (entre 1400 a 1600), a partir da necessidade de aprimorar conceitos e técnicas de pinturas para uma melhor representação da realidade. Entretanto, demorou mais de dois séculos para que a geometria projetiva tomasse uma forma matemática, quando, em 1639 o matemático, arquiteto e engenheiro francês Girard Desargues (1591-1661) desenvolveu procedimentos matemáticos que correspondiam com o que os pintores produziram no Renascimento. Ele produziu diversos resultados importantes, como a técnica da perspectiva linear com a utilização do ponto de fuga, o famoso Teorema de Desargues e concepções sobre as cônicas e o plano projetivo. Alguns autores

consideraram que os trabalhos de Desargues foram pouco conhecidos devido ao uso de uma linguagem um pouco confusa, sendo que, após a sua morte seu trabalho permaneceu praticamente esquecido.

Outros nomes importantes no desenvolvimento da geometria projetiva foram Blaise Pascal (1623-1663), Philippe De La Hire (1640-1718), Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Gaspard Monge (1746-1818), Lazare Carnot (1753-1823), tendo todos eles contribuído de alguma forma com resultados sobre projeções. Contudo, foi Jean-Victor Poncelet que revolucionou os estudos sobre geometria projetiva, escrevendo, em 1822, o seu principal trabalho *Traité des Propriétés projectives des figures*, o qual foi um marco para a geometria projetiva. Ele revolucionou a forma de considerar as propriedades das figuras e também a forma como elas se relacionam no espaço.

O trabalho de Poncelet motivou diversos matemáticos a ingressarem nesse novo campo do conhecimento matemático, tais como Geogonne (1771-1859), Julian Brianchon (1785-1864), Chasles (1793-1880), Plücker (1801-1868), Steiner (1796-1863) e Cremona (1830-1903). Somente a partir de Poncelet é que os teoremas de Desargues, relativos a propriedades projetivas de triângulos, e também o teorema de Pascal sobre interseções de cônicas, ficaram completamente entendidos. Poncelet hoje é considerado o *pai da geometria projetiva*. Após Poncelet a geometria projetiva se tornou, de fato, uma área da matemática, com definições, teoremas e axiomas.

A geometria projetiva lida com o mundo que vemos, apresentando uma geometria sem qualquer tipo de medida (distância, ângulo, etc ...), divergindo de alguns conceitos da geometria euclidiana, como por exemplo a não existência, na geometria projetiva, de retas paralelas. Para exemplificar esta ideia, basta tomar como exemplo os trilhos de um trem. Sabe-se que as bordas dos trilhos são paralelas, porém, ao olhar para elas no horizonte é possível ver, ou imaginar, que a distância entre elas se afunila de forma a haver uma interseção entre elas.

Na referência [4], Coxeter enunciou que a geometria projetiva plana pode ser descrita como o estudo de propriedades geométricas que são invariantes por uma projeção central. Baseado nisso, pode-se então dizer que, a geometria projetiva é o ramo da matemática que estuda as propriedades geométricas invariantes de uma projeção.

Um dos principais conceitos que fundamentam a geometria projetiva é o conceito de *dualidade*. Na verdade, o conceito de dualidade permeia os diversos campos da matemática. Em geral, o termo *dualidade* no campo da matemática é utilizado para se traduzir conceitos, definições, teoremas ou estruturas matemáticas em outros conceitos, definições, teoremas ou estruturas, numa relação biunívoca. Podem

ocorrer, inclusive, casos de operações de involução (o dual de A é o próprio A).

Por exemplo, a dualidade de álgebra linear estabelece correspondência entre mapas bilineares de pares de espaços vetoriais com escalares; a dualidade entre distribuições e as funções; a famosa dualidade de Poincaré estabelece correspondência entre o número de interseções, visto como um emparelhamento entre subvariedades de uma determinada variedade; o famoso teorema de Desargues, que é um teorema auto-dual. Para mais informações veja as referências [5] e [2].

Como estamos interessados no conceito de dualidade na geometria projetiva, nada mais natural que dar ênfase ao Teorema de Desargues, o qual, como dito anteriormente, é auto-dual, ou seja, o dual deste teorema resulta no mesmo teorema. Desta forma, os conceitos aqui apresentados destinam-se ao embasamento das demonstrações do teorema e seu dual.

1 Sobre a dualidade na geometria projetiva

O conceito de *dualidade* na geometria projetiva bidimensional foi introduzido por Jean-Victor Poncelet (1788-1867). O princípio da dualidade determina uma estrutura simétrica, na qual definições ou teoremas continuam válidos quando se trocam os termos *pontos* por *retas* (e vice-versa), *ligam* por *interceptam* (e vice-versa) e, *colineares* por *concorrentes* (e vice-versa). Isto torna possível a dualização de figuras geométricas, visto que uma figura é definida como um conjunto determinado por pontos e retas.

É importante ressaltar que a dualidade projetiva bidimensional é uma característica da geometria projetiva plana, não sendo aplicável quando se introduzem questões métricas de distâncias e ângulos, ou noções de paralelismo e/ou proporção.

A vantagem da aplicação do conceito de dualidade na geometria projetiva reside no fato de que, uma vez demonstrado um resultado, o seu dual não precisa ser demonstrado, sendo automaticamente considerado como válido.

1.1 Alguns fundamentos da Geometria projetiva

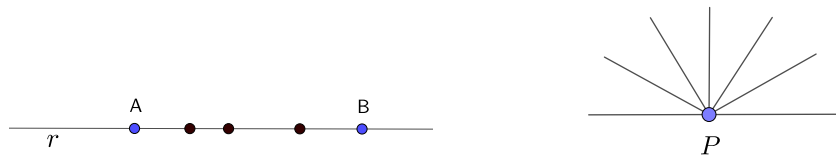
A geometria projetiva plana é construída a partir de dois tipos de elementos - retas e pontos. Os conceitos de ponto, reta, plano e pertence são considerados *conceitos primitivos*, e estes termos são então denominados termos indefinidos (ou indefiníveis).

Definição 1. (*Feixe de pontos*) Um conjunto de pontos incidentes a uma reta

r , é denominado *feixe de pontos* (ou *fileira de pontos*) com eixo r (ver figura 1 à esquerda).

Definição 2. (*Feixe de retas* - *Definição dual do Feixe de pontos*) um conjunto de retas incidentes sobre um ponto P , é denominado um *feixe de retas* com centro P (ver figura 1 à direita).

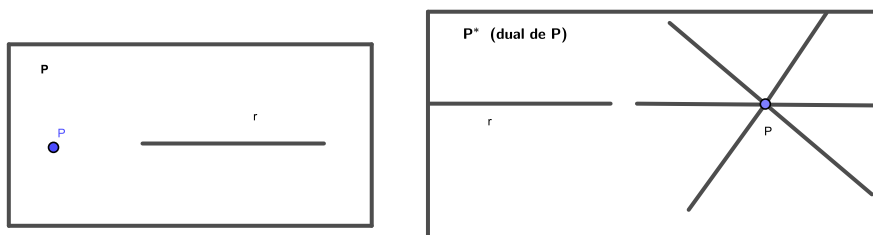
Figura 1: à esquerda temos a representação de um feixe (ou fileira) de pontos e à direita a representação de um feixe de retas.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Definindo-se axiomáticamente um plano projetivo $\mathcal{P}$, o princípio da dualidade garante a existência de outro plano projetivo $\mathcal{P}^*$, dual de $\mathcal{P}$, tal que os pontos e os feixes de pontos ("retas") de $\mathcal{P}^*$ são, respectivamente, os feixes de pontos ("retas") e os feixes de retas incidentes ao ponto P (veja figura 2). As aspas aqui utilizadas são para distinguir os conceitos de *retas* da geometria euclidiana do conceito de *feixe de pontos* da geometria projetiva.

Figura 2: O ponto P e o feixe de pontos r (reta r) do plano projetivo $\mathcal{P}$ correspondem ao feixe de pontos r (reta r) e ao feixe de retas passando por P em $\mathcal{P}^*$.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

1.2 Projetividades e Perpesctividade

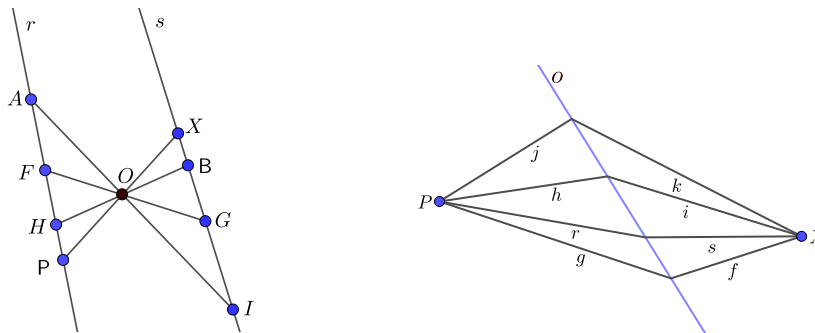
Dois exemplos que ilustram bem a questão da dualidade são as definições de quadrângulo completo e quadrilátero completo, sendo uma definição o dual da outra. Porém, antes de serem apresentados estes conceitos, será necessário introduzir mais algumas definições.

Definição 3. Denomina-se por *perspectividade* a relação biunívoca entre dois feixes quaisquer.

A seguir vamos enumerar os tipos de perspectividade que podemos encontrar dentro da geometria projetiva.

Definição 4. Dados dois feixes de pontos com eixos r e s , dizemos que os feixes estão relacionados perspectivamente, se cada reta que une o ponto P , sobre r , com o ponto correspondente X , sobre s , é incidente sobre um ponto fixado O , chamado de centro da perspectividade. Para essa perspectividade usaremos a notação $P \overset{O}{\bar{\wedge}} X$ (ver figura 3 à esquerda).

Figura 3: Na figura à esquerda temos um exemplo de perspectividade entre dois feixes de retas e na figura à direita temos um exemplo de perspectividade entre dois feixes de pontos.



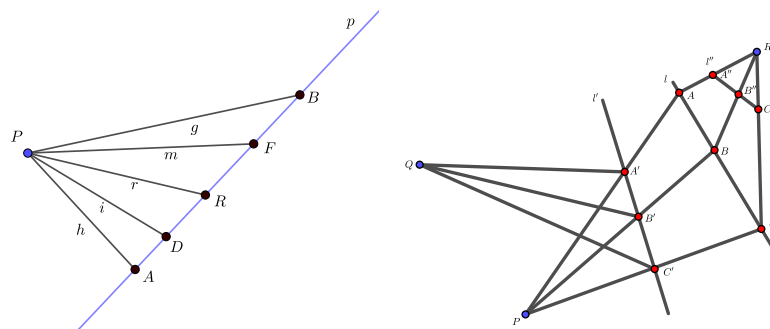
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Definição 5. Dados dois feixes de retas com centros P e X , dizemos que os feixes estão relacionados perspectivamente se, cada ponto de intersecção das retas r e s , incidentes aos pontos P e X , respectivamente, pertence a uma reta fixada o , chamada eixo da perspectividade. Para essa perspectividade usaremos a notação $r \overset{o}{\bar{\wedge}} s$ (veja figura 3 à direita).

Definição 6. Dado um feixe de retas com centro em P e um feixe de pontos de eixo p , dizemos que estes feixes estão relacionados perspectivamente se cada reta r incidente ao ponto P é incidente a um ponto R sobre o eixo p . Denotaremos tal perspectividade como $P \bar{\wedge} r$ ou $r \bar{\wedge} P$ (veja figura 4 à esquerda).

Definição 7. Uma *projetividade* é uma combinação finita de perspectividades, ou seja, dado um feixe de pontos (ou retas) e um feixe de retas (ou pontos), dizemos que eles estão relacionados projetivamente se, e somente se, o resultado da relação biunívoca entre os dois feixes for um número finito de perspectividades (veja figura 4 à direita).

Figura 4: à esquerda: perspectividade entre um feixe de retas e um feixe de pontos e à direita: projetividade entre feixes de retas e feixes de pontos.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Definição 8. *Duas figuras distintas, formadas de pontos e retas, são ditas perspectivas se, todas as retas incidentes aos pares de pontos correspondentes concorrem em um ponto O , (figuras perspectivas por um ponto, com O como centro de perspectividade), ou, se os pares de retas correspondentes incidem sobre uma mesma reta o (figuras perspectivas por uma reta, com o como o eixo de perspectividade).*

1.3 Quadrângulo completo e quadrilátero completo

No que se segue vamos introduzir os conceitos de Quadrângulo completo e quadrilátero completo. Veremos, à partir das respectivas definições, que uma definição é dual da outra.

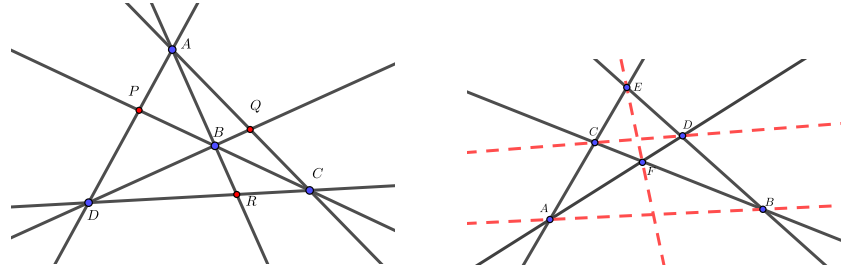
Definição 9. Um *quadrângulo completo* é uma figura formada por 4 pontos coplanares, a cada três não colineares, e as 6 retas que unem estes pontos. Os 4 pontos são denominados *vértices* e as 6 retas são os *lados* do quadrângulo. Dois lados são denominados *opostos* se o ponto comum entre eles não é um vértice e o ponto comum a dois lados opostos é chamado de *ponto diagonal*. Observe que quadrângulo completo possui três pontos diagonais.

Na figura 5, à esquerda, está representado o quadrângulo completo de vértices A, B, C, D , com lados $a = AB, b = AC, c = BC, d = BD, e = CD$ e $f = AD$ e pontos diagonais P, Q e R . Os lados opostos são AC e BD , AD e BC , e AB e CD .

Definição 10. Um *quadrilátero completo* é uma figura formada por 4 retas coplanares, e os 6 pontos de interseção determinados por estas retas. As quatro retas são denominadas *lados* e os 6 pontos de interseção são denominados *vértices* do quadrilátero. Dois vértices são ditos *opostos* se a reta que os une não é um lado, esta reta é denominada *reta diagonal*. Observe que um quadrilátero completo possui 3 retas diagonais.

Na figura 5, à direita, está representado o quadrilátero completo de vértices A, B, C, D, E e F cujos lados são as retas $a = AE, b = EB, c = BC$, e $d = AD$. As retas pontilhadas são as retas diagonais.

Figura 5: À esquerda: Quadrângulo completo de vértices A, B, C, D . À direita: Quadrilátero completo $abcd$, de vértices A, B, C, D, E e F , e retas diagonais j, l e k .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Fica evidente que o quadrilátero completo é o dual do quadrângulo completo (e vice-versa), visto que, trocando-se pontos por retas e retas por pontos, em uma das definições, obtém-se a outra definição. Dizemos então que às duas figuras determinadas pelo quadrângulo e pelo quadrilátero são *figuras duais*.

2 Axiomas da geometria projetiva plana

É importante ressaltar que, na geometria projetiva, não faz sentido falar de congruências, que são, na verdade, comparações de medidas de segmentos e ângulos, já que essas noções não são preservadas por *projeções*, que são as *transformações geométricas que caracterizam essa geometria*.

Existem várias formulações axiomáticas para a geometria projetiva. A formulação encontrada na referência [4], separados em axiomas de incidência, "ordem" e continuidade, é a que mais se aproxima da formulação axiomática da geometria de Euclides. As aspas na palavra ordem são para indicar que esse conceito precisa ser "redefinido" em um certo sentido, diferente de sua aplicação na geometria euclidiana. Para mais informações veja a referência [4].

No presente trabalho utilizamos a formulação encontrada nas referências [1] e [3]. Apresentaremos apenas os axiomas da geometria projetiva plana, visto que isto será o suficiente para embasar as demonstrações do teorema de Desargues e seu dual.

Axioma 1. *Quaisquer dois pontos distintos são incidentes com exatamente uma reta.*

Axioma 2. *Quaisquer duas retas distintas são incidentes com pelo menos um ponto.*

Axioma 3. *Existem pelo menos quatro pontos, que a cada três são não colineares.*

Axioma 4. *Os três pontos diagonais do quadrângulo completo nunca são colineares.*

Axioma 5. *Uma projetividade é unicamente determinada quando são dados três pontos colineares e seus respectivos correspondentes.*

Axioma 6. *Se uma projetividade deixa invariante três pontos distintos de uma fileira, então ela deixa invariante toda a fileira.*

3 Teorema de Desargues e seu Dual

Antes de apresentarmos o Teorema de Desargues, demonstraremos um lema fundamental para a demonstração do teorema supracitado.

Lema 1. *Uma projetividade entre duas fileiras em duas retas distintas é uma perspectividade se, e somente se, o ponto de interseção das retas for invariante pela projetividade.*

Demonstração. Sejam r e s duas retas distintas, de modo que exista uma projetividade qualquer entre duas fileiras nessas retas. Suponhamos que essa projetividade se trata de uma perspectividade. Então, existe um centro O dessa perspectividade tal que, se P e P' são correspondentes (cada um pertencente a uma reta), PP' passa por O . Seja Q o ponto de interseção das retas r e s (a existência da interseção é garantida pelo Axioma 2). Analisando, particularmente, Q em r , temos Q' como seu correspondente em s de modo que QQ' passa pelo ponto O . Desse modo, concluímos que Q é igual a Q' , pois, caso contrário, teríamos duas retas distintas por Q e Q' (a reta s e a reta $OQ = OQ'$) contrariando o Axioma 1. Logo, o ponto de interseção das retas é invariante pela perspectividade dada.

Reciprocamente, seja uma projetividade qualquer entre duas fileiras distintas em duas retas, r e s , também distintas. Seja P o ponto comum de r e s , de modo que P é invariante por essa projetividade. Podemos, de acordo com o Axioma 6, determinar, de maneira única, três pontos e seus respectivos correspondentes, de forma que $ABP \overset{X}{\underset{\wedge}{\sim}} A'B'P$, para algum ponto X .

Por outro lado, como O é ponto comum das retas AA' e BB' , então $ABP \overset{O}{\underset{\wedge}{\sim}} A'B'P$.

Observe que o ponto P é invariante, e portanto, a reta OP passa também pelo seu correspondente, que é o próprio ponto P . Como o Axioma 5 garante que uma

projetividade é unicamente determinada por três de seus pares de pontos correspondentes, temos que as projetividades $ABP \overset{X}{\wedge} A'B'P$ e $ABP \overset{O}{\wedge} A'B'P$ são, na verdade, a mesma. Ou seja, o ponto X é, na verdade, o ponto O . Logo, podemos concluir que essa projetividade se trata de uma perspectividade. $\square$

Teorema 1. (Teorema de Desargues) *Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, eles são perspectivos por uma reta.*

Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos perspectivos por um ponto O . Isso significa que as retas que contêm os vértices correspondentes se intersectam no ponto O , ou seja, $O = AA'.BB'.CC'$, onde o ponto denota interseção entre as retas. Sejam D, E e F , três pontos distintos tais que, $D = AB.A'B'$, $E = BC.B'C'$, $F = AC.A'C'$. Queremos mostrar que D, E e F , são colineares.

Defina os pontos $P = OA.ED$, $Q = OC.ED$ e $R = OB.ED$. Note que, por construção, A, B e C estão na reta DE (ver figura 6 à esquerda). Observe que:

$$OD.OB = O;$$

$$AD.OB = B; \text{ Pois } AD = AB \text{ uma vez que } D = AB.A'B'.$$

$$PD.OB = R; \text{ Pois como } ED = PD \text{ temos } PD.OB = ED.OB = R$$

$A'D.OB = B'$; Pois $A'D = B'D$, já que $D = BA.B'A'$. Além disso, como OB passa por B' temos $OB = OB'$.

Com isso mostramos que $OAPA' \overset{D}{\wedge} OBRB'$. (Observe que os pontos O, A, P e A' estão em uma mesma reta, assim como os pontos O, B, R e B' estão em outra). Agora, note que:

$$OE.OC = O;$$

$$BE.OC = C; \text{ Pois } BE = CE \text{ já que } E = BC.B'C'.$$

$$RE.OC = Q; \text{ Pois como } RE = ED \text{ temos } RE.OC = ED.OC = Q.$$

$B'E.OC = C'$; Pois $B'E = C'E$, já que $E = BC.B'C'$. Além disso, como OC passa por C' temos $OC = OC'$.

Mostramos então que $OBRB' \overset{E}{\wedge} O, C, Q$ e C' (Note que os pontos $OCQC'$ estão numa mesma reta). Tem-se então, por transitividade, que:

$$OAPA' \overset{D}{\wedge} OBRB' \overset{E}{\wedge} OCQC' \Rightarrow OAPA' \bar{\wedge} OCQC'.$$

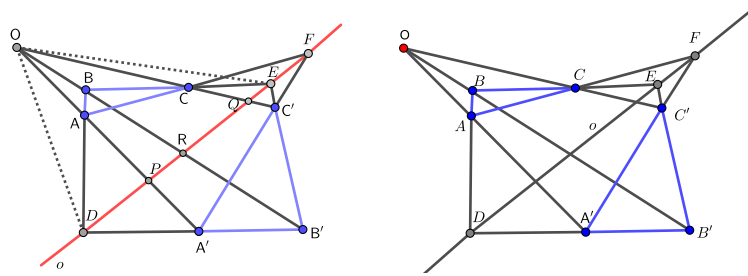
Além disso, como O é o ponto de interseção das retas AA' e CC' e é invariante nessa projetividade, concluímos, pelo teorema 1 que $OAPA' \bar{\wedge} OCQC'$ é uma perspectividade. E como $AC.A'C' = F$, então F é o centro da perspectividade,

logo a reta PQ passa por F . Como $PQ = ED$, temos que os pontos D, E e F são colineares, como queríamos mostrar. $\square$

Teorema 2. (Dual Desargues) *Se dois triângulos são perspectivos por uma reta, eles são perspectivos por um ponto.*

Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos perspectivos por uma reta o . Logo tem-se que os lados correspondentes AC e $A'C'$, BC e $B'C'$ e, AB e $A'B'$ se interceptam na reta o nos pontos F, E e D respectivamente. Pelo Axioma 2 considere que $O = AA'.BB'$. Resta mostrarmos que a reta CC' também passa por O . Começamos analisando os triângulos $CC'E$ e $AA'D$. Note que, como D, E e F são colineares e $F = AC.A'C'$, então as retas $AC, A'C'$ e DE são concorrentes no ponto F (ver figura 6, à direita). Logo os triângulos $CC'E$ e $AA'D$ são perspectivos pelo ponto F . Então segue do Teorema de Desargues, que os triângulos $CC'E$ e $AA'D$ também são perspectivos por uma reta, logo os pontos $B = CE.AD$, $B' = EC'.DA'$ e $X = CC'.AA'$ são colineares. Temos que X está em AA' , porém X também está em BB' , pois como já foi mostrado B, B' e X são colineares, então X só pode ser o ponto O . Portanto, temos que $O = CC'.AA'$, ou seja, a reta CC' também passa por O , como queríamos mostrar.

Figura 6: à esquerda vemos uma esquematização do Teorema Desargues e à direita vemos uma esquematização do dual do teorema de Desargues.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

$\square$

Conclusão

O conceito de dualidade chamou a nossa atenção devido ao fato de que a dualidade permite que novos resultados sejam deduzidos a partir de resultados já fornecidos, gerando novos resultados, os quais são automaticamente válidos, dispensando exaustivas demonstrações. Aqui demonstramos o Teorema de Desargues e seu dual, porém, bastaria ter demonstrado apenas um deles. A ideia foi mostrar que, de fato, o dual gera um resultado válido. Escolhemos o Teorema de Desargues para

ilustrar este procedimento porque este teorema é auto-dual, ou seja, o dual dele, além de ser um resultado válido, resulta nele próprio quando enunciado na forma "*Dois triângulos são perspectivos por uma reta se, e somente se, eles são perspectivos por um ponto*".

Referências

- [1] CASTRO, R. B. de. **Tópicos da geometria projetiva**. 2012. 94 f. Dissertação - (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012. Disponível em <<http://hdl.handle.net/11449/94354>>. Acesso em: 20 abr. 2022.
- [2] AUFFINGER, A. C. T. C.; VALENTIM, F. J. S. **Introdução à Geometria Projetiva**. 2003. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2003. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/jardim/ma620/geoproj.pdf>>. Acesso em: 20 abr. 2022.
- [3] AZEVEDO, E. Z. D. et al. **Geometria projetiva**: um caminho axiomático ao estudo das cônicas. 2008.
- [4] COXETER, H. S. M. **Projective geometry**. New York: Springer-Verlag, 1987.
- [5] DUALIDADE (matemática). *[S. l.]: [s. n.], [2020?]*. Portal: Japan Wiki. Disponível em: <[https://hmn.wiki/pt/Duality_\(mathematics\)](https://hmn.wiki/pt/Duality_(mathematics))>. Acesso em: 20 set. 2022.



O TEOREMA DAS CINCO CORES

Matheus Henrique Silva do Nascimento, Evaneide Alves Carneiro.

matheushns2@gmail.com, eva.ac@ufu.br

Resumo. Neste trabalho apresentaremos o problema de coloração de mapas planares e sua relação com os grafos, iniciando com um pouco de História e conceitos básicos da teoria, chegando ao teorema das cinco cores e sua demonstração. Resolver o problema da coloração de um mapa planar significa determinar o número suficiente de cores para colorir qualquer mapa, com a exigência que regiões vizinhas possuam cores diferentes. Durante a resolução desse problema, surgiram muitas contribuições para a teoria dos grafos. O enunciado e a demonstração do teorema das cinco cores constituem um passo importante na solução do que ficou conhecido como o problema das quatro cores, que originou grandes discussões, conjecturas e tentativas fracassadas de demonstração até se chegar ao resultado definitivo, o teorema das quatro cores. Podemos afirmar que o teorema das quatro cores encaixa-se na categoria dos resultados de enunciado simples, belo, útil e de fácil compreensão, entretanto sua demonstração não é trivial e demorou algum tempo até ser apresentada de forma correta, e isso nos permite ver que mesmo os problemas aparentemente mais simples podem exigir anos de estudo para serem resolvidos.

Palavras-chave. Grafos. Coloração. Mapas.

Introdução

A teoria dos grafos surgiu em meados do século XVIII, quando começou a ser estudada sistematicamente pelo influente e prolífico matemático suíço Leonhard Euler. Veremos as definições formalmente na próxima seção, mas inicialmente citamos que um grafo é um par ordenado $G = (V; E)$, sendo V o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas. Quando dois vértices são extremidades de uma mesma aresta, dizemos que os vértices são adjacentes. Uma coloração de vértices de um

grafo G consiste de uma atribuição de cores aos vértices de G , de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Um mapa planar pode ser associado a um grafo.

Durante muito tempo, matemáticos em várias partes do mundo tentaram responder à seguinte pergunta: quantas cores são suficientes para colorir qualquer mapa planar? Em 1852, Francis Guthrie conjecturou que 4 era o número “mágico”. Apesar da aparente simplicidade do problema, só em 1976 foi provado que a conjectura estava certa, obtendo-se assim o teorema das quatro cores, e neste processo houve uma contribuição significativa para a teoria dos grafos. A prova é extensa (50 páginas) e faz uso de computadores de grande porte (por volta de 1200 horas de processamento).

Um dos resultados gerados durante a discussão do problema das quatro cores foi o teorema das cinco cores, e o nosso objetivo neste trabalho é apresentar uma demonstração desse resultado. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica.

1 Desenvolvimento

1.1 Definições e resultados básicos

Nesta seção apresentamos as definições e resultados necessários para enunciarmos e demonstrarmos o resultado principal. Estas e outras definições básicas podem ser encontradas na referência [1]. Durante todo o texto, o símbolo $\#A$ representa a cardinalidade do conjunto A .

Definição 1. • Um grafo é um par ordenado $G = (V; E)$ formado por um conjunto não vazio V , cujos elementos são chamados de vértices e um conjunto E cujos elementos são pares não ordenados de vértices e são chamados de arestas.

- Os dois vértices que correspondem a uma aresta são chamados de extremidades da aresta, e neste caso dizemos que os vértices são adjacentes.
- Uma aresta em que as duas extremidades são iguais é chamada de laço.
- Quando cada par de vértices de um grafo corresponde a no máximo uma aresta e o grafo não possui laços, dizemos que ele é um grafo simples.

Definição 2. Uma coloração de vértices de um grafo $G = (V; E)$ é uma atribuição de cores aos vértices de G , de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.

Definição 3. Se v é um vértice do grafo G , a quantidade de arestas que possuem v como extremidade é chamada de grau de v e é denotada por $d(v)$.

Teorema 1 (Teorema de Euler). *A soma dos graus dos vértices de um grafo $G = (V; E)$ é igual a duas vezes o número de arestas nesse grafo, ou seja:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\#E.$$

Demonstração. Para cada vértice do grafo G , conte seu grau e marque cada uma das arestas que possuem aquele vértice como extremidade. Por um lado, o número de total de marcas que foram utilizadas é exatamente a soma dos graus dos vértices. Por outro lado, cada aresta foi marcada exatamente duas vezes (uma vez para cada uma de suas extremidades). Assim, o número de marcas utilizadas é exatamente duas vezes o número de arestas. $\square$

Definição 4. *Um caminho de comprimento n , denotado por P_n , é um grafo com $n + 1$ vértices distintos, ordenados em uma sequência, tal que suas arestas ligam vértices consecutivos dessa sequência, isto é:*

$$V(P_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \text{ e } E(P_n) = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\}.$$

Os vértices v_0 e v_n são os extremos do caminho.

Definição 5. *Dizemos que um grafo $G = (V; E)$ é conexo quando, para quaisquer dois vértices u e v de G existe um caminho em G de extremos u e v . Caso contrário, dizemos que $G = (V; E)$ é desconexo.*

Definição 6. *Dizemos que um grafo H é um subgrafo de um grafo G , e escrevemos $H \subseteq G$, quando H é um grafo e temos $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Um subgrafo $H \subseteq G$ é dito maximal em relação a uma certa propriedade P se H tem a propriedade P , mas nenhum outro subgrafo de G que contenha H tem a propriedade P . Dado um grafo G , um subgrafo que seja conexo e maximal é chamado de componente conexa de G .*

Observação 1. *Para qualquer vértice $x \in V(G)$, existe uma única componente conexa de G à qual x pertence. Tal componente será denotada por C_x .*

Definição 7. *Dizemos que um grafo é planar se puder ser desenhado no plano sem que haja arestas se cruzando, ou seja, sem que haja interseção das linhas que representam as arestas, exceto possivelmente em um vértice. Tal desenho é chamado representação planar do grafo. Uma face de um grafo planar G é qualquer região do conjunto $\mathbb{R}^2 - G$.*

Teorema 2. *Se $G = (V; E)$ é um grafo planar conexo com f faces, $\#V = n$ e $\#E = m$, então vale:*

$$f - m + n = 2.$$

Demonstração. Ver em [2], p. 4. □

1.2 Demonstração do Teorema das cinco cores

Nesta seção, f denotará o número de faces, n o número de vértices e m o número de arestas de um grafo.

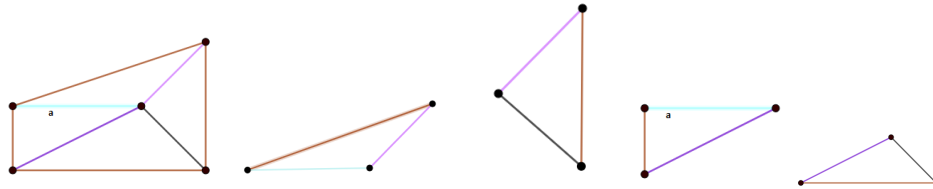
Lema 1. *Em um grafo planar conexo, existe pelo menos um vértice de grau no máximo 5.*

Demonstração. Seja G um grafo planar conexo. Como cada face de um grafo planar é delimitada por pelo menos 3 arestas, e cada aresta limita no máximo 2 faces, temos:

$$2m \geq 3f.$$

Vamos ilustrar esse resultado a seguir. Para o grafo representado na figura acima,

Figura 1: Um grafo planar e suas faces separadas.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

temos $m = 8$ e $f = 5$. Logo, $2m \geq 3f$.

Utilizando essa relação e a Fórmula de Euler, obtemos:

$$\begin{aligned} 2 &= n - m + f \\ \Rightarrow 2 &\leq n - m + \frac{2m}{3} \\ \Rightarrow 6 &\leq 3n - 3m + 2m \\ \Rightarrow 6 &\leq 3n - m \\ \Rightarrow m &\leq 3n - 6 \\ \Rightarrow 2m &\leq 6n - 12. \end{aligned}$$

Como, pelo Teorema ([1]), temos $2m = \sum_{v \in V} d(v)$, concluímos, da última desigualdade

acima, que:

$$\sum_{v \in V} d(v) \leq 6n - 12. \quad (1)$$

. Suponhamos agora que cada vértice de G tenha grau maior do que ou igual a 6. Neste caso, a somatória dos graus resultaria em:

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq 6n,$$

o que é uma contradição com (1), pois chegaríamos a:

$$6n \leq 6n - 12.$$

Portanto, deve haver algum vértice com grau no máximo 5. □

Teorema 3 (Teorema dos cinco cores). *Todo grafo planar simples pode ser colorido com no máximo cinco cores.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ o grafo que queremos colorir. Faremos a prova por indução no número de vértices. Se $n \leq 5$, o resultado é válido. Mostraremos a seguir que, se é possível colorir um grafo com $n - 1$ vértices com 5 cores, então também é possível colorir um grafo com n vértices.

Pelo lema anterior, em todo grafo planar existe um vértice com grau menor do que ou igual a 5. Denotemos esse vértice por $\tilde{v}$.

Retirando o vértice $\tilde{v}$ do grafo G , obtemos um novo grafo, que denotaremos por $R(\tilde{v})$, e pela hipótese de indução esse novo grafo pode ser colorido com no máximo 5 cores.

Se os vértices em $R(\tilde{v})$ estão coloridos com menos do que 5 cores, basta colorir o vértice $\tilde{v}$ com uma cor não utilizada nos vértices de $R(\tilde{v})$.

Caso contrário, se cinco cores são utilizadas para colorir $R(\tilde{v})$, analisamos os vértices adjacentes a $\tilde{v}$ em G . Denotaremos esses vértices por v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 , e por c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5 as cores dos vértices, respectivamente.

Consideremos o subgrafo induzido pelos vértices coloridos com as cores c_1 e c_3 . Se a componente conexa que contém o vértice de $R(\tilde{v})$ colorido com c_1 não contiver o vértice colorido com c_3 , podemos trocar as cores desta componente: quem está colorido com c_1 fica colorido com c_3 , e vice-versa, e então colorir o vértice $\tilde{v}$ com a cor c_1 .

Caso a componente que contém o vértice de $R(\tilde{v})$ colorido com c_1 seja a mesma do vértice colorido com c_3 , existe um caminho de vértices que “cerca” o

vértice colorido com c_2 (veja figura 6.6).

Tomamos então a componente conexa do grafo induzida pelos vértices coloridos com c_2 e c_4 , que contém o vértice de $R(\tilde{v})$ colorido com c_2 . Depois de trocar as cores c_2 e c_4 nesta componente, podemos colorir o vértice $\tilde{v}$ com a cor c_2 , o que conclui a demonstração. $\square$

2 Conclusão

Ao longo de sua história, o teorema das quatro cores atraiu muitas provas errôneas gerando refutações. Um dos casos mais conhecidos foi o do The New York Times, este rejeitou uma publicação de demonstração feita por Appel e Haken por temer sua veracidade como algumas provas anteriores. A maioria dos contra exemplos buscam uma forma de criar uma região que faça fronteira com outras regiões, forçando o uso de apenas três cores nas regiões restantes. Isso será possível sempre, pois o teorema das quatro cores é verídico, porém aquele que busca tal contra exemplo, tem seu foco em uma grande região, deixando de perceber que as demais regiões podem ser coloridas com três cores. Faz-se necessário destacar que mesmo antes de sua demonstração, o Teorema das Quatro Cores contribuiu significativamente com diversas áreas. Uma prova disso é o Teorema das Cinco Cores, o qual foi conjecturado e demonstrado a partir de um contra exemplo de uma das demonstrações falhas do Teorema das Quatro Cores. Por fim, é válido apontar algumas aplicações descobertas por meio desse teorema, são elas: a coloração de vértices; a separação de produtos explosivos; atribuição de frequências de rádio; agendamento de prova na universidade; alocação de registradores; semáforos; é até mesmo alguns jogos como Sudoku.

Referências

- [1] LIMA, C. L. G. **Um estudo sobre teoria dos grafos e o Teorema das quatro cores**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- [2] LEWARD, O. **Graph Theory - The Four Color Theorem**. Uppsala: Departament of Mathematics - Uppsala University, 2014. 31 p. Disponível em: <https://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:749857/FULLTEXT01.pdf>. Acesso em: 01 out. 2022.



MULHERES NA MATEMÁTICA: ganhadoras da Medalha Fields

Lorraine Silva Gonçalves, Ana Laura Thezolin.

Universidade Federal de Uberlândia, Universidade Federal de Uberlândia.
lorraine.goncalves@ufu.br, ana.thezolin@ufu.br.

Resumo. Diante do pouco reconhecimento e valorização das mulheres na Ciência, principalmente na área da Matemática, o presente trabalho que foi desenvolvido no âmbito da disciplina de História da Matemática do curso de graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Campus Pontal, tem como objetivo apresentar uma breve investigação histórica sobre as mulheres que ganharam a Medalha Fields do ano de 1936 a 2022. Apresenta-se, inicialmente, as dificuldades enfrentadas pelas mulheres para permanecerem no âmbito científico e, posteriormente, discorre-se sobre a Medalha Fields e sobre a trajetória acadêmica de Maryam Mirzakhani e Maryna Sergiivna Viazovska, as duas únicas mulheres que receberam a medalha até o ano de 2022. Devido à pouca visibilidade e participação de mulheres na Ciência, considera-se importante reconhecer e valorizar as realizações e a dedicação de mulheres que fazem pesquisa, em especial na área de Matemática.

Palavras-chave. Mulheres na matemática. Mulheres na ciência. Medalha Fields.

Introdução

Durante anos as mulheres vêm enfrentando diversos desafios quanto à sua participação em ciência e pesquisas, lutando contra uma sociedade machista e desigual em busca de reconhecimento e valorização do seu trabalho. Elas estão presentes na ciência desde a época em que as pesquisas eram realizadas no âmbito familiar, em que a participação das mulheres era mais acessível. No entanto, durante muito tempo, as mulheres tiveram seus nomes apagados das contribuições em importantes pesquisas, pois como as pesquisas aconteciam entre os familiares, os méritos eram sempre atribuídos aos homens da família, de acordo com Casagrande et al (2005).

Atualmente, é expressivo o número de mulheres que ingressam na universidade e fazem pesquisas (SILVA e RIBEIRO, 2014). No entanto, essa nem sempre

foi a realidade experimentada pelas mulheres ao longo dos anos. Casagrande et al (2005) afirmam que após a formalização da ciência, em que as pesquisas e laboratórios foram do âmbito familiar para as universidades, muitas mulheres tiveram seu acesso negado à universidade, o que pode ter contribuído para o baixo número em posições de destaque nas ciências.

Durante a realização do primeiro Encontro Mundial para Mulheres em Matemática (World Meeting for Women in Mathematics - $(WM)^2$), Nitahara (2018) relata que Carolina Araújo, organizadora do evento, afirmou que a maternidade gera dificuldade na carreira profissional das mulheres e que no Brasil as mulheres são menos de 25 dentre os pesquisadores em matemática, sendo que em outros países o número é menor ainda. Nesse sentido, as mulheres nas ciências, em especial na Matemática, necessitam ainda de muito incentivo e reconhecimento para permanecerem fazendo pesquisa.

Diante do exposto, este trabalho propõe apresentar uma breve investigação histórica sobre as duas mulheres matemáticas e pesquisadoras que foram premiadas com a Medalha Fields de 1936 a 2022, obtendo reconhecimento por seus trabalhos.

1 A Medalha Fields

Buscando a visibilidade de pessoas que desenvolvem trabalhos, ações e pesquisas em benefício da humanidade, uma das premiações mundiais mais conhecidas é o prêmio Nobel. São premiadas pessoas de cinco categorias: Química, Física, Fisiologia ou Medicina, Literatura e Paz. Como afirma Corrêa (1999), não existe o Nobel em Matemática, mesmo sendo considerada como um pilar central das construções científicas e tecnológicas dentro da Ciência. Contudo, existem alguns prêmios concedidos para a área, sendo o principal a Medalha Fields.

A Medalha Fields é também conhecida como Medalha Internacional de Descobrimientos Proeminentes em Matemática. Foi idealizada pelo matemático canadense John Charles Fields (1863-1932) que tinha por intuito prestigiar matemáticos por conquistas excepcionais e contribuições relevantes para a Matemática. Um mês após a sua morte, o prêmio foi aprovado durante o Congresso Internacional de Matemática de Zurique, em 1932, e assim o nome da medalha é uma homenagem ao matemático.

Acerca do modelo da medalha, Martins (2015) retrata que ela é de ouro e foi desenhada pelo escultor canadense Robert Tait McKenzie. Em uma de suas faces tem a efígie de Arquimedes, o seu nome (em grego) e a inscrição em latim *transire suum pectus mundoque potiri*, que significa "superar os limites da inteligência e conquistar o universo". Na outra face aparece o desenho de uma esfera inscrita

num cilindro com a inscrição *congregati ex toto orbe mathematici ob scripta insignia trebuere*, que significa "matemáticos de todo o mundo reunidos prestam homenagem por obras notáveis". O desenho da esfera inscrita num cilindro é para lembrar o famoso resultado de Arquimedes: o volume da esfera é $\frac{2}{3}$ do volume do cilindro, assim como a área da esfera é $\frac{2}{3}$ da área do cilindro.

Figura 1: Medalha Fields.



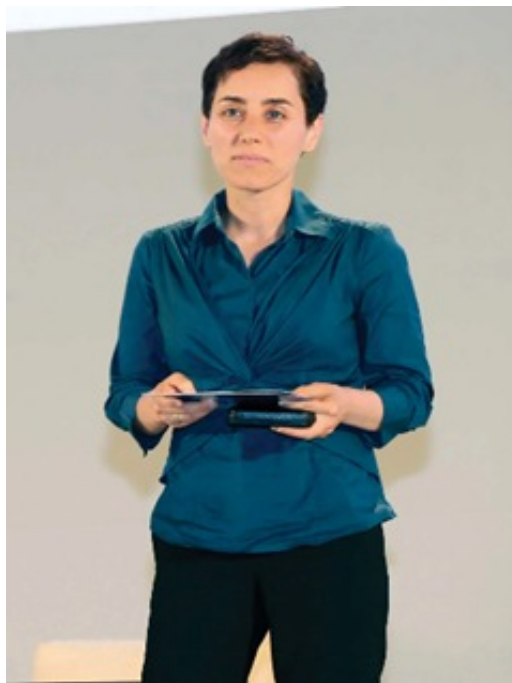
Fonte: Folha de S.Paulo (2018)

Além da medalha, é entregue ao ganhador quinze mil dólares canadenses. O prêmio é concedido a dois, três ou quatro matemáticos com menos de 40 anos e entregue durante o Congresso Internacional de Matemática que se realiza de quatro em quatro anos.

As duas primeiras medalhas foram entregues em 1936 e, até o ano de 2022, o prêmio foi concedido a 64 ganhadores, sendo apenas duas mulheres. A primeira mulher a receber a medalha foi Maryam Mirzakhani, em 2014, e a segunda foi Maryna Viazovska, em 2022.

2 Maryam Mirzakhani

Figura 2: Maryam Mirzakhani.



Fonte: Steckles (2020)

Maryam Mirzakhani nasceu em 12 de maio de 1977, em Teerã, Irã. Filha de Ahmad Mirzakhani, engenheiro elétrico, e Zahra Haghighi, faleceu em 14 de julho de 2017, em Palo Alto, Califórnia, EUA. Durante sua infância, Maryam foi educada no Liceu Farzanegan de Teerão, que era administrado pela Organização Nacional do Irã para o Desenvolvimento de Talentos Excepcionais, que tinha como objetivo descobrir alunos brilhantes.

Maryam descobriu sua paixão pelos números durante a adolescência (MARTINS, 2015). Ainda, em sua adolescência, ela e sua amiga encontraram uma cópia de alguns problemas da Olimpíada de Matemática e, após resolver alguns exercícios, foi até o diretor de sua escola pedir para que ela e sua amiga tivessem acesso à aula de resolução de problemas matemáticos. As aulas aconteciam na escola apenas para os meninos mais talentosos e apesar de nenhuma menina ter participado da equipe da Olimpíada de Matemática, elas conseguiram participar (O'CONNOR e ROBERTSON, 2017).

Depois disso, em 1994 e 1995, Maryam participou da Olimpíada de Matemática do Irã, uma competição internacional em que foi premiada com uma medalha de ouro. Logo após, frequentou a Universidade de Tecnologia de Sharif, também

em Teerão, e se formou no curso de Matemática. A universidade possui um ensino de qualidade e apenas uma minoria dos candidatos consegue ingressar por meio de um concurso exigente (MARTINS, 2015).

Após a graduação, ela fez pós-graduação na Universidade de Harvard e, em seguida, ainda em Harvard, Maryam fez seu doutorado, em 2004, sob a orientação de Curtis McMullen. Sua tese de 130 páginas intitulada Geodésicas Simples em Superfícies Hiperbólicas e Volume do Espaço Moduli de Curvas recebeu o Prêmio Leonard M e Eleanor B Blumenthal para o Avanço da Pesquisa em Matemática Pura em 2009 (O'CONNOR e ROBERTSON, 2017).

Posteriormente ao doutorado, ainda em 2004, Maryam foi nomeada professora assistente de matemática na Universidade de Princeton e alguns anos depois, quando ela deixou Princeton, foi nomeada professora de matemática na Universidade de Stanford.

No dia 13 de agosto de 2014 no Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Seul, Coréia do Sul, Maryam Mirzakhani foi a primeira mulher (e iraniana) a receber uma Medalha Fields. Maryam recebeu o prêmio por suas contribuições à dinâmica e à geometria de superfícies de Riemann e seus espaços módulos. Além disso, Maryam fazia pesquisa sobre a teoria de Teichmüller, a geometria hiperbólica, a teoria ergódica e a geometria simplética (MARTINS, 2015).

3 Maryna Viazovska

Figura 3: Maryna Viazovska.



Fonte: Rodrigues (2020)

Maryna Sergiivna Viazovska nasceu em 2 de novembro de 1984, em Kiev, Ucrânia. É a irmã mais velha de três irmãs. Seu pai era químico e sua mãe enge-

nheira. Frequentou a Kyiv Natural Science Lyceum No. 145, uma escola secundária especializada para estudantes de alto desempenho em ciência e tecnologia. Durante seu ensino médio competiu em olimpíadas de matemática, sendo uma das primeiras colocadas em algumas.

Atualmente é professora titular e catedrática de Teoria dos Números no Instituto de Matemática da École Polytechnique Fédérale de Lausanne (Escola Politécnica Federal de Lausana), na Suíça. Cursou bacharelado em Matemática na Universidade Nacional Taras Shevchenko de Kiev. Em 2007 completou seu mestrado na Universidade Técnica Kaiserslautern. Fez um doutorado pelo Instituto de Matemática da Academia Nacional de Ciências da Ucrânia em 2010 e outro pela Universidade de Bonn em 2013. Também foi pesquisadora de pós-doutorado no Institut des Hautes Etudes Scientifiques e na Humboldt University of Berlin e, em 2017, foi Minerva Distinguished Visitor na Princeton University.

Viazovska foi premiada com a Medalha Fields em 2022 por provar que a rede E8 fornece o empacotamento mais denso de esferas idênticas em 8 dimensões e outras contribuições para problemas extremos relacionados e problemas de interpolação na análise de Fourier. De maneira prática, o problema que ela provou, de acordo com Rossini (2022), foi "Você já tentou guardar bolas de futebol dentro de uma caixa? Encontrar a melhor maneira de organizá-las para fazer caber o maior número de bolas possível não é fácil. Agora imagine isso com infinitas bolas. Em uma caixa de oito dimensões".

Além de seu trabalho sobre empacotamento de esferas, também é conhecida por sua pesquisa em projetos esféricos, colaborando na prova de uma conjectura de Korevaar e Meyers sobre a existência de pequenos desenhos em dimensões arbitrárias.

4 Análise/Conclusão

As mulheres vêm conquistando lugar na Ciência e ganhando destaque em suas posições de trabalho, porém ainda há pouco reconhecimento do trabalho que realizam. Como abordado no presente trabalho, entre os 64 premiados com a Medalha Fields, apenas duas eram mulheres e, somente após 78 anos da primeira premiação, uma mulher veio a receber o prêmio.

Diante da luta das mulheres em busca de espaço, valorização e reconhecimento de seu trabalho no âmbito científico, principalmente na área de Matemática, considerou-se significativo dar visibilidade e reconhecer as realizações e a dedicação de mulheres que fazem pesquisa.

Referências

- [1] CASAGRANDE, L. S., et al. Mulher e Ciência: uma relação possível?. **Cadernos de Gênero e Tecnologia**, v. 1, n. 4, p. 31-45, 2005. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3895/cgt.v1n4.6141>. Acesso em: 14 ago. 2022.
- [2] CORRÊA, F. J. S. de A. Por que não existe Prêmio Nobel para a Matemática. **Revista do professor de matemática**, Rio de Janeiro, v. 40, p. 15, 1999. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/40/3.htm>. Acesso em: 14 ago. 2022.
- [3] MARTINS, M. do C. Maryam Mirzakhani: a primeira mulher vencedora da Medalha Fields. **Correio dos Açores**, p. 14-14, 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10400.3/3596>. Acesso em: 14 ago. 2022.
- [4] NITAHARA, A. Pesquisadoras de todo o mundo discutem gênero e matemática no Rio. In: AGÊNCIA BRASIL, 2018. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2018-07/pesquisadoras-de-todo-o-mundo-discutem-genero-e-matematica-no-rio>. Acesso em: 14 ago. 2022.
- [5] O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. Maryam Mirzakhani. In: MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, 2017. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mirzakhani/>. Acesso em: 14 ago. 2022.
- [6] O QUE É A MEDALHA FIELDS, O MAIOR PRÊMIO QUE UM MATEMÁTICO PODE RECEBER. In: FOLHA DE S. PAULO, 2022. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/ciencia/2018/08/entenda-o-que-e-a-medalha-fields-o-maior-premio-matematico.shtml>. Acesso em: 14 ago. 2022.
- [7] RODRÍGUES, M. A ucraniana que ganhou 'Nobel da Matemática' por resolver problema sem solução desde o século 17. In: BBC NEWS BRASIL, 2022. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-62069614>. Acesso em: 10 ago. 2022.
- [8] ROSSINI, M. C. Matemática ucraniana é segunda mulher da história a receber a Medalha Fields. In: SUPER INTERES-SANTE, 2022. Disponível em: <https://super.abril.com.br/ciencia/matematica-ucraniana-e-segunda-mulher-da-historia-a-receber-a-medalha-fields/>. Acesso em: 14 ago. 2022.
- [9] SILVA, F. F. da, RIBEIRO, P. R. C. Fabiane Ferreira da, RIBEIRO, Paula Regina Costa. Trajetórias de mulheres na ciência: "ser cientista" e "ser mulher". **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 20, p. 449-466, 2014. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1516-73132014000200012>. Acesso em: 14 ago. 2022.

- [10] STECKLES, K. Maryam-Mirzakhani. In: SPEKTRUM.DE SCI-LOGS, 2020. Disponível em: <https://scilogs.spektrum.de/hlf/women-pioneers-of-mathematics/maryam-mirzakhani/>. Acesso em 14 ago. 2022.



MACETES MATEMÁTICOS ALIADOS ÀS REDES SOCIAIS DURANTE A PANDEMIA DO CORONAVÍRUS: um relato de experiência

Tácito de Deus Ferreira Soares, Luis Henrique de Souza Carvalho, Pablo
Ricardo Nunes dos Santos, Victor Dourado Coelho.

Universidade Federal do Triângulo Mineiro.

d202010705@ufbm.edu.br, d201911077@uftm.edu.br, d201911078@uftm.edu.br, d201810625@uftm.edu.br

Resumo. O presente trabalho discorre a respeito de uma atividade, desenvolvida de forma remota através da rede social Instagram, sob a temática de Macetes Matemáticos, elaborada pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, durante o fim do ano de 2021 e início de 2022 nas turmas de oitavo ano da Escola Municipal Boa Vista, situada em Uberaba-MG. O objetivo da atividade foi atrair a atenção dos alunos por meio das postagens que foram elaboradas pelo grupo, além de auxiliar os alunos da educação básica com esses macetes, podendo ajudá-los no processo de ensino-aprendizagem, na resolução de exercícios, no entendimento das matérias abordadas, e também em possíveis situações-problemas do cotidiano de cada um. As publicações, sob formas de posts tutoriais e vídeos, foram divididas em duas séries de conteúdo: a primeira direcionada à resolução do cubo mágico tradicional ($3 \times 3 \times 3$); enquanto a segunda, direcionada à divulgação de macetes matemáticos de determinados conteúdos dessa disciplina, tais como tabuadas e sistemas de equações de primeiro grau.

Palavras-chave. Macetes Matemáticos. Redes Sociais. Cubo Mágico. Instagram.

Introdução

O presente trabalho discorre a respeito de uma atividade desenvolvida pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM) durante o fim do ano de 2021 e início do ano de 2022. O projeto era composto por 11 integrantes, sendo sete bolsistas e quatro voluntários, todos sob orientações de uma professora coordenadora e de um professor supervisor.

Os Macetes Matemáticos podem servir como uma diferenciada ferramenta para os professores, devido à possibilidade de chamar a atenção dos alunos, viabilizando uma abordagem de conceitos de maneira lúdica, colaborando para o desenvolvimento do raciocínio lógico de modo a desenvolver e estimular o estudante a aplicá-los nas atividades escolares e no cotidiano. Conforme Carneiro et al. o lúdico

vem do latim ludus, que significa jogo, divertimento, o que pode ser utilizado como um ensinamento em sala de aula, facilitando a matemática. Pois, de forma lúdica, o aluno não cria o receio inicial, sem sequer analisar a atividade proposta. Pelo contrário, ele vai tentar de todas as maneiras possíveis, para que assim possa estar participando do jogo e/ou “mágica”. (2014,p. 261).

É importante lembrar que os Macetes Matemáticos não podem ser considerados uma metodologia de ensino, pois, para entendê-los, na maioria das vezes, deve-se ter um conhecimento prévio. Assim, consoante a Pereira (2019), o papel do professor na modernização dos processos de ensino e aprendizagem também é de suma importância, pois igualmente demonstra a necessidade de um conhecimento dessas tecnologias antes de sua utilização.

Segundo Ramos (2009, p. 48), “os macetes são criados quando se encontra uma palavra ou expressão que, relacionada com um determinado conteúdo, facilita a explicação por parte do professor e a memorização pelo aluno”. Podem, assim, ser considerados como truques de uma determinada área do conhecimento, possibilitando ao discente uma melhor afeição ao conteúdo. Ramos ainda complementa, dizendo que

os alunos estão buscando fórmulas mágicas e maneiras simples de aprenderem os conteúdos de forma rápida e prazerosa, por isso consideramos que a utilização de dicas, de macetes colabora com esse objetivo e facilita o relacionamento entre professores e alunos. (2009, p.50).

Ao longo dos últimos anos, o acesso às redes sociais vêm crescendo cada vez mais, auxiliadas pela facilidade de comunicação entre as pessoas, bem como de compartilhamento de informações; os Macetes Matemáticos, junto a determinados outros materiais, encontram-se em destaque através delas. De acordo com Oliveira,

a utilização de atividades lúdicas como recurso pedagógico estimula mais o gosto dos estudantes em aprender matemática, tornando as aulas mais produtivas e prazerosas. Com a utilização do lúdico, é possível discutir conceitos matemáticos saindo da rotina da sala de aula e alcançando o objetivo de fazer com que os alunos aprendam. (2015, p. 4).

Visto isso, nosso principal objetivo permeou no desejo de auxiliar os alunos da educação básica com esses macetes, podendo ajudá-los no processo de ensino-

aprendizagem, na resolução de exercícios, no entendimento das matérias abordadas, e também em possíveis situações-problemas do cotidiano de cada discente.

1 Desenvolvimento

O professor supervisor do programa era docente responsável pela disciplina de Matemática nas turmas de oitavo ano da Escola Municipal Boa Vista, situada no bairro Boa Vista em Uberaba, Minas Gerais. Na época, os graduandos que integravam o projeto desenvolveram atividades extracurriculares em conjunto aos alunos da educação básica da escola, sob a perspectiva de três temas, que foram escolhidos por questões de gostos, desejos e aptidões particulares: "Matemática Financeira", "Matemática e Jogos" e, por último, os "Macetes Matemáticos". Este texto discorre a respeito do terceiro grupo, abordando os Macetes Matemáticos.

Visando oportunizar experiências de aproximação entre alunos da educação básica, alunos da graduação e professores, fizemos um planejamento pedagógico no início da parceria firmada entre a universidade e a mencionada escola de Uberaba. Levando em conta o descompasso estabelecido entre o modo das atividades na universidade e na escola, pois a UFTM, naquela época, ainda não permitia atividades presenciais devido a situação pandêmica a qual ainda estamos inseridos e a escola parceira já se encontrava em modo presencial desde outubro, novembro e dezembro de 2021 e janeiro de 2022; fomos, dessa forma, impossibilitados de aplicar tal planejamento como proposto inicialmente.

A pandemia do coronavírus, que começou no final do ano de 2019, abalou todas as estruturas sociais do país; e, não obstante, a educação também sofreu com seus impactos. Tornou-se necessário reinventar a educação e ter olhares mais críticos e inferenciais acerca do futuro da educação e de nossos cidadãos brasileiros. Ao mesmo tempo que a pandemia forçou um processo de ensino-aprendizado diferente, desafiador e inusitado; ela colaborou para que fosse possível superar determinados desafios e dar voz a problemas que antes eram ignorados ou deixados de lado.

Deste modo, diante de tais argumentos, tivemos que reinventar e replanejar as atividades a serem desenvolvidas no período. Optamos, assim, por elaborarmos, em conjunto aos alunos das mencionadas turmas de oitavo ano, atividades a respeito do tema Macetes Matemáticos, para fins de publicações na rede social Instagram, através do perfil oficial do grupo.

Ficou decidido que as postagens deveriam ser bastante criativas e chamativas, com presença de imagens e ilustrações, sem o uso exagerado de escrita. Isso porque tinha-se como objetivo atrair a atenção dos alunos para as publicações, bem como

de demais interessados. Em consonância ao conteúdo, as postagens também fariam o papel de chamariz para o perfil do PIBID Matemática UFTM.

Desta forma, foram realizados, semanalmente, alguns encontros virtuais através da plataforma Google Meet, onde apresentamos aos alunos o que se tratavam, de fato, os Macetes Matemáticos e como produzi-los. O intuito era demonstrar o processo de produção de uma postagem desta temática, fazendo com que eles pesquisassem alguns exemplos e, conosco, também produzissem materiais para divulgação na rede social.

Infelizmente, a ideia de promover uma socialização entre os alunos da escola e os pibidianos não se mostrou bem sucedida, pois tivemos uma escassa participação por parte deles. Nos primeiros encontros, tivemos o comparecimento de apenas um estudante; com o passar das semanas, as participações zeraram. Assim sendo, decidimos não mais promover reuniões com os discentes, passando a confeccionar postagens por conta própria; discutindo, desta maneira, também, algumas ideias.

É importante salientar que os Macetes Matemáticos pesquisados e confeccionados pelo grupo não eram restritos apenas aos conteúdos do oitavo ano, mas sim abrangiam outras séries; podendo, desta forma, serem utilizados em variadas situações, desde uma atividade escolar até as situações do cotidiano.

Em detrimento disso, utilizamos o Instagram como plataforma de divulgação dos Macetes Matemáticos que produzimos, com intuito de chamar a atenção dos interessados (incluindo os próprios alunos do oitavo ano da Escola Municipal Boa Vista), compartilhando alguns conhecimentos.

Como ferramentas de produção dos materiais, utilizamos a plataforma Canva, os editores de vídeos Wondershare Filmora e CapCut, e, também, alguns smartphones, que pertenciam aos integrantes do grupo. No Canva, confeccionamos imagens de cunho explicativo e expositivo dos macetes; e, com os smartphones, gravamos os vídeos que, futuramente, seriam editados pelos mencionados aplicativos de edição.

Nossas publicações foram divididas em duas séries de conteúdo; a primeira era direcionada à resolução do Cubo Mágico tradicional ($3 \times 3 \times 3$), enquanto a segunda era direcionada à facilitação de determinados conteúdos matemáticos, tais como tabuadas e sistemas de equação de primeiro grau.

1.1 Montando o cubo mágico

Na primeira série de publicações trabalhadas, foram abordadas as apresentações do brinquedo Cubo Mágico, também conhecido como Cubo de Rubik. Sua criação,

de autoria do professor húngaro Erno Rubik, deu-se em meados do ano de 1974, onde o objetivo era criar uma peça que fosse perfeita, no que se refere à geometria, para ajudar a ilustrar o conceito da terceira dimensão aos seus alunos do curso de arquitetura.

A versão do brinquedo a ser trabalhada nas postagens é a tradicional, mundialmente referenciada como 3x3x3, que, de forma geral, trata-se de um quebra-cabeça em forma de cubo com seis cores (uma para cada face), vinte e seis peças cúbicas que se articulam entre si devido ao um eixo central fixo (oculto dentro do cubo) dispostas numa configuração 3x3x3 com mais de quarenta e três quintilhões de combinações diferentes e apenas uma correta.

O objetivo do indivíduo ao trabalhar com o brinquedo é combinar suas peças de uma determinada maneira que deixe todas as suas seis faces com suas respectivas cores iguais, sendo elas: branco, azul, amarelo, vermelho, verde e laranja.

Para o início das postagens, promovemos uma pesquisa a respeito do material, abrangendo suas origens e, também, as possibilidades lógicas e mecânicas por trás do seu funcionamento. O cubo mágico mostra-se uma excelente ferramenta para se trabalhar com a coordenação motora de quem o utiliza, bem como do raciocínio lógico. Como objeto de reflexão, tal brinquedo abrange uma gama de possibilidades para sua montagem, servindo como uma excelente maneira de desenvolver a noção matemática do usuário a respeito de combinações e de probabilidade.

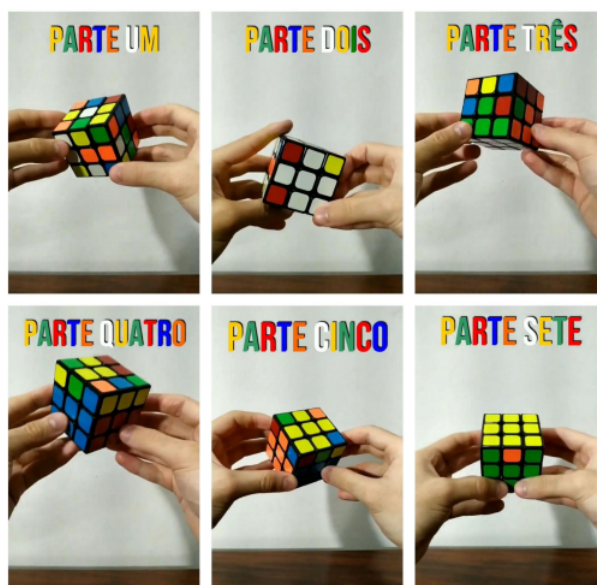
Um dos integrantes do grupo ficou a cargo de criar as postagens relacionadas ao tema, responsabilizando-se pelas pesquisas sobre a história do objeto, bem como das suas respectivas características. Posteriormente, também se compromissou a gravar os vídeos abordando algumas dicas para sua montagem, igualmente apresentando o passo-a-passo necessário para a montagem correta do brinquedo. Vale ressaltar que, independentemente da combinação primária que o cubo estivesse configurado, o aprendizado produzido pela série de vídeos demonstrava uma montagem universal, que podia ser adaptada a qualquer cubo do formato 3x3x3; isto é, seguindo as etapas corretamente, o aluno conseguiria montar o cubo em qualquer combinação em que ele se apresentasse.

Inicialmente, o material gráfico foi gravado por um smartphone, sendo posteriormente editado pelo aplicativo Wondershare Filmora. Dividida em um total de oito vídeos, a série do cubo mágico foi publicada no reels do Instagram do PIBID Matemática da UFTM, contemplando a totalidade do passo-a-passo.

No primeiro vídeo, tivemos a apresentação do brinquedo, junto às suas pesquisadas características físicas e históricas, visando abrir espaço para a continuidade

da atividade ao longo das outras sete partes. Em seguida, tivemos a abordagem de cada etapa da montagem, descrevendo os movimentos necessários para se chegar aos respectivos objetivos, que, ao final, iriam culminar na montagem completa do cubo, alcançando o objetivo da pequena oficina. As postagens ocorreram ao longo de quatro semanas, indo do início de novembro ao início de dezembro de 2021, com duas postagens por semana, sempre às segundas e sextas-feiras. Abaixo, seguem imagens de alguns dos vídeos publicados:

Figura 1: Série de algumas publicações feitas nas redes.



Fonte: <https://www.instagram.com/p/CWT5t2KgKnX/>

1.2 Macetes Matemáticos

Para a segunda série de conteúdos, dividimos em duas vertentes bastante utilizadas no Instagram que se tratam dos posts tutoriais, que possuem a função de divulgar uma determinada informação, portando uma estrutura em tópicos lineares; e os vídeos, que possuem a função de divulgar uma determinada informação através do audiovisual.

1.2.1 Posts Tutoriais

Num momento inicial, foram feitas pesquisas de possíveis tipos de Macetes Matemáticos para que pudessem ser explorados. Aqui, optamos por conteúdos mais simples, com certas “artimanhas universais”, de forma que não houvessem tantas restrições. Assim, ao longo de novembro e dezembro de 2021, foram selecionadas

as categorias dos Macetes Matemáticos que seriam trabalhados e posteriormente publicados.

Depois disso, confeccionamos o material de postagem a partir da plataforma Canva. Tal escolha se justifica pelo fato de já se apresentar um certo domínio e conhecimento prévio por parte dos integrantes do grupo em relação às funcionalidades do editor, aliado à variedade de templates gratuitos que lá podem ser encontrados. Optamos, dessa forma, por um template que chamasse a atenção do leitor, mas que não fosse muito carregado de informações visuais.

Após a escolha, fizemos as necessárias alterações, de acordo com os conteúdos a serem trabalhados. Durante a confecção, optamos por padronizar o estilo que seria adotado em todas as imagens das postagens, justamente por fazerem parte de uma série específica, os posts tutoriais. Decidimos confeccionar, no total, quatro imagens por cada postagem. Na primeira, teríamos o título/tema do Macete Matemático abordado; no segundo, teríamos a parte explicativa, com um sucinto texto; no terceiro, a parte ilustrativa; e, por último, estaria presente um fechamento da publicação, com a presença da fonte e um espaço sugerindo curtidas, comentários e compartilhamentos, criando, assim, uma pequena interação com o leitor.

Figura 2: Postagem feita na rede social do grupo



Fonte: elaborado pelos autores (2021)

Depois da arte finalizada, foi a vez de confeccionarmos as legendas a serem utilizadas em cada postagem, seguindo também um padrão que foi debatido entre os integrantes do grupo, que buscavam dialogar de maneira mais próxima com o

público, empregando uma linguagem mais pessoal e direta. Assim como as postagens envolvendo o Cubo Mágico, tais publicações abordando os Macetes Matemáticos ocorreram às segundas e sextas-feiras (com exceção de feriados) desde o início de dezembro de 2021 até o fim de janeiro de 2022.

1.2.2 Vídeos

Para a segunda vertente adotada, a ideia inicial era de que os alunos da educação básica, que estavam participando e interagindo nas reuniões semanais de quarta-feira, confeccionassem os vídeos para serem postados no Instagram. Mas, como poucos alunos estavam presentes nas reuniões (entre 1 ou 2), e pelo fato de eles se mostrarem desanimados, apenas um aluno em específico se apresentou motivado para tarefa, executando-a com maestria. Para as outras publicações, decidimos que, os próprios PIBIDIANOS do programa seriam os responsáveis por confeccionar os vídeos sob a temática dos Macetes Matemáticos.

Já tínhamos em mãos o vídeo sobre sistema de equações lineares feito pelo aluno que se mostrou disposto a colaborar; precisaríamos, dessa forma, de mais dois vídeos sobre macetes para completar o mês de janeiro de 2022. Para isso, procuramos vídeos curtos sobre Macetes Matemáticos em duas redes sociais que estavam mais populares na época, o Instagram e o TikTok. A fim de termos uma perspectiva orientadora, foram feitas escolhas de três vídeos-base para confeccionarmos nosso próprio material, apropriando as características que queríamos ressaltar e todo o layout desejado.

Em grupo, optamos por selecionar macetes que seriam mais usuais e universais, pois alguns dos modelos encontrados tinham certas restrições, como faixa etária ou por se tratar de conteúdo específico de Matemática. Dessa forma, foram devidamente analisados para melhor adequação à proposta inicial e ao objetivo estabelecido. Os vídeos foram gravados com o celular na posição vertical e com uma boa iluminação; para a parte da edição, como o efeito e a música, utilizamos o aplicativo CapCut.

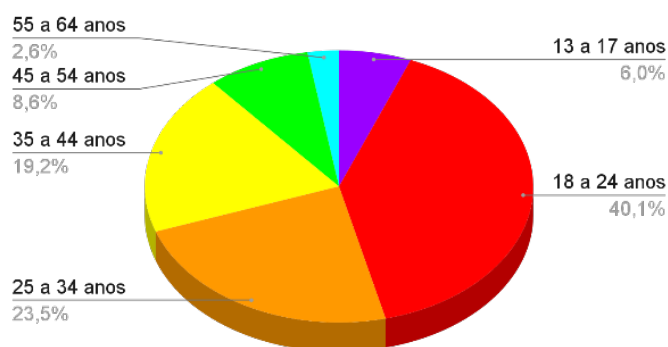
Depois de gravado, editado e verificado, também foram feitas as legendas de cada postagem, onde referenciamos o material e promovemos curtas mensagens para chamar a atenção do leitor. Vale ressaltar que, os materiais, depois de prontos, foram enviados à todos os integrantes do PIBID (discentes e docentes), onde se apresentavam as análises feitas do material e as possíveis sugestões ou alterações. Somente depois disso os materiais foram postados e compartilhados nas redes sociais.

2 Considerações Finais

A escolha da rede social Instagram para divulgação do trabalho se deu principalmente por dois motivos: o primeiro, por se tratar de um aplicativo que a maioria dos indivíduos do público alvo já tinham uma conta registrada e faziam constante uso; o segundo, pelo fato de o aplicativo oferecer uma relação estatística acerca de suas publicações, como, por exemplo, o alcance e os perfis dos usuários atingidos.

Visto isso, segundo os dados fornecidos pelo Insights da ferramenta, infelizmente nosso público-alvo não foi atendido como gostaríamos. Os dados revelaram que o engajamento entre pessoas de 13 a 17 anos, representaram apenas 6,0% em relação ao número total do alcance.

Figura 3: Alcance em relação a idade.



Fonte: insights do perfil do instagram do grupo (2022)

Concluimos assim que, apesar dos alunos gostarem e se apresentarem motivados com a ideia inicial do programa, com o passar do tempo percebemos que esse interesse foi se perdendo.

Destarte, cabe a nós refletir a respeito de estratégias que poderíamos adotar para que a porcentagem de engajamento do público-alvo cresça. E, enquanto futuros docentes de Matemática, promovermos uma análise crítica e inferencial a respeito dos motivos e causas do supracitado resultado. Vale lembrar, também, que tudo ocorreu de forma remota, em que as relações de ensino-aprendizagem se tornaram mais difíceis e desafiadoras.

Por fim, urge uma reflexão dos pontos positivos e negativos do trabalho, podendo vir a ser e contribuir como uma alternativa para uma educação cada vez mais democrática, digna e equânime à todos.

Referências

- [1] CARNEIRO, G. S. et al. **Incentivando a aprendizagem da matemática através da “matemática”**. Bagé/RS: Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), 2014.
- [2] OLIVEIRA, G. G. **Truques matemáticos em nível fundamental**. Campina Grande: II CONEDU, 2015.
- [3] PEREIRA, P. C., et al. Identificando práticas educacionais no instagram: uma revisão sistemática.. **Itinerarius Reflectionis**, v. 15, n. 2, p. 01-19, 2019.
- [4] RAMOS, F. C. Dicas, macetes e analogias: identifique-os e divulgue!. **Revista Reflectionis**, Belo Horizonte v. 1, n. 1, 2009.



Bases de Gröbner e Suas Propriedades

Victor Cruz Borges, Victor Gonzalo Lopez Neumann.

Universidade Federal de Uberlândia, Universidade Federal de Uberlândia.
victor.cruz@ufu.br, victor.neumann@ufu.br

Resumo. O presente trabalho tem como objetivo trazer um breve estudo sobre polinômios com mais de uma variável. Nesse sentido, serão abordados os temas referentes a ordenação dos monômios de um polinômio, quais as possíveis formas de ordená-los, se é possível realizar uma divisão entre esses tipos de polinômios, desenvolver alguns resultados e comentar sobre propriedades de Bases de Gröbner. E dentro desses temas iremos, além de definir alguns conceitos importantes como o que caracteriza os monômios e, conseqüentemente, os termos de um polinômio, de fato (como termo líder, multigrau, monômio líder, dentre outros), trazer respostas para os problemas da descrição de ideais e dos elementos de um ideal. Por fim, concluiremos apontando o que significam os resultados, quais as ferramentas disponíveis para saber se um polinômio com mais de uma variável pertence a um ideal ou não e como analisar se uma base de um ideal tem algumas propriedades que são úteis para realizar divisões de polinômios.

Palavras-chave. Polinômio. Ideal. Base.

Introdução

Trabalhando com polinômios de mais de uma variável, e ideais de um anel de polinômios com coeficientes num corpo K , surgem alguns questionamentos:

1. (*O problema da descrição de ideais*) Será que qualquer ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ tem um conjunto gerador finito? Isto é, podemos escrever que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ com $f_i \in K[x_1, \dots, x_n]$?
2. (*O problema dos elementos de um ideal*) Se $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ e $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ é um ideal desse anel de polinômios, determine se $f \in I$.

Nesse trabalho, traremos as respostas para essas perguntas, e falaremos sobre Bases de Gröbner.

1 Ordens Monomiais e Divisão entre Polinômios com Mais de Uma Variável

Primeiramente, podemos reescrever o monômio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ pela n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, quando necessário. Isso estabelece uma correspondência biunívoca dos monômios de $K[x_1, \dots, x_n]$ e $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.

Qualquer ordenação $>$ que for estabelecida em $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ nos dará uma ordenação dos monômios: se $\alpha > \beta$ por essa ordenação, então diremos que $x^\alpha > x^\beta$. Então vamos definir o que é uma *ordem monomial*.

Definição 1. Uma **ordem monomial** em $K[x_1, \dots, x_n]$ é uma relação qualquer $>$ em $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ ou, equivalentemente, qualquer relação no conjunto dos monômios x^α , $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, satisfazendo:

1. $>$ é de ordem total (ou linear) em $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.
2. Se $\alpha > \beta$ e $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, então $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
3. $>$ é de boa ordem em $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Isso significa que qualquer conjunto não vazio de $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ possui menor elemento para a ordem $>$.

Definição 2 (Ordem lexicográfica). Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Dizemos $\alpha >_{\text{lex}} \beta$ se, no vetor diferença $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, a primeira entrada não-nula da esquerda para a direita é positiva. Escrevemos $x^\alpha >_{\text{lex}} x^\beta$ se $\alpha >_{\text{lex}} \beta$.

Exemplo 1. O polinômio $f = -5x^3 + 7x^2z^2 + 4xyz^2 + 4z^2 \in K[x, y, z]$ está ordenado, em ordem decrescente de seus monômios, com respeito à ordem lexicográfica.

Proposição 1. A ordem lexicográfica em $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ é uma ordem monomial.

Demonstração. Ver [I, Proposition 2, Chap. 2.4]. □

Existem outras ordens monomiais, como a lexicográfica graduada que compara as somas das potências das variáveis e, se são iguais, realiza a comparação usando a ordem lexicográfica. Outra ordem monomial é a lexicográfica reversa graduada, que compara a soma das potências e, se são iguais, realiza uma comparação similar à lexicográfica [I, Definitions 2.2.5 and 2.2.6].

Definição 3. Seja $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \neq 0$ em $K[x_1, \dots, x_n]$ e seja $>$ uma ordem monomial:

- O multigrado de f é $\text{multigrado}(f) = \max(\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n : a_{\alpha} \neq 0)$.

- O coeficiente líder de f é $LC(f) = a_{\text{multigrau}(f)} \in K$.
- O monômio líder de f é $LM(f) = x^{\text{multigrau}(f)}$ (com coeficiente 1).
- O termo líder de f é $LT(f) = LC(f) \cdot LM(f)$.

Para ilustrar, seja $f = 4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2$ e $>$ a ordem lexicográfica. Então

$$\text{multigrau}(f) = (3, 0, 0), LC(f) = -5, LM(f) = x^3 \text{ e } LT(f) = -5x^3.$$

Teorema 1 (Algoritmo da divisão em $K[x_1, \dots, x_n]$). *Sejam $>$ uma ordem monomial em $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ e $F = (f_1, \dots, f_s)$ uma s -upla ordenada de polinômios em $K[x_1, \dots, x_n]$. Então todo $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ pode ser escrito por*

$$f = a_1f_1 + \dots + a_sf_s + r$$

onde $a_i, r \in K[x_1, \dots, x_n]$ e $r = 0$ ou r é uma combinação linear com coeficientes em K , de monômios, nenhum deles divisível por nenhum dos $LT(f_1), \dots, LT(f_s)$. Vamos chamar de r o resto da divisão de f por F . Além disso, se $a_if_i \neq 0$, então nós temos

$$\text{multigrau}(f) \geq \text{multigrau}(a_if_i).$$

Demonstração. Ver [1, Theorem 3, Chapter 2.3]. □

Definição 4. Um ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ é um ideal monomial se existe $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ tal que I está gerado por $\{x^\alpha : \alpha \in A\}$. Isto é, I consiste de todos os polinômios que são somas finitas da forma $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha x^\alpha$ onde $h_\alpha \in K[x_1, \dots, x_n]$. Nesse caso, escrevemos $I = \langle x^\alpha : \alpha \in A \rangle$.

Agora, precisamos caracterizar todos os monômios que se encontram em um dado ideal monomial.

Lema 1. *Seja $I = \langle x^\alpha : \alpha \in A \rangle$ um ideal monomial. Então um monômio x^β está em I se e somente se x^β é divisível por x^α para algum $\alpha \in A$.*

Demonstração. Ver [1, Lemma 2, Chapter 2.4]. □

Definição 5. Dizemos que $\{g_1, \dots, g_t\} \subset K[x_1, \dots, x_n]$ é uma base para um ideal I se, para todo $f \in I$, $f = a_1g_1 + \dots + a_tg_t$, onde $a_i \in K[x_1, \dots, x_n]$, ou seja, $I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$.

Teorema 2 (Lema de Dickson). *Seja $I = \langle x^\alpha : \alpha \in A \rangle \subset K[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial. Então I pode ser escrito na forma $I = \langle x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(s)} \rangle$, onde $\alpha(1), \dots, \alpha(s) \in A$. Em particular, I tem uma base finita.*

Demonstração. Ver [1, Theorem 5, Chapter 2.4]. □

2 O Teorema da Base de Hilbert e Bases de Gröbner

Nessa seção daremos uma solução completa do *problema da descrição de ideais*. Primeiramente, para um ideal I qualquer, definimos o *ideal de termos líderes* como segue.

Definição 6. *Seja $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ um ideal não nulo.*

1. *Denotamos por $LT(I)$ o conjunto dos termos líderes dos elementos de I . Então,*

$$LT(I) = \{cx^\alpha : \exists f \in I \text{ que satisfaz } LT(f) = cx^\alpha\}.$$

2. *Denotamos por $\langle LT(I) \rangle$ o ideal gerado pelos elementos de $LT(I)$.*

Os termos líderes desempenham uma função importante para o algoritmo da divisão. É verdade que $LT(f_i) \in LT(I) \subset \langle LT(I) \rangle$ por definição, o que implica que $\langle LT(f_1), \dots, LT(f_s) \rangle \subset \langle LT(I) \rangle$. Contudo, $\langle LT(I) \rangle$ pode ser estritamente maior. Para ver isso, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 2. *Seja $I = \langle f_1, f_2 \rangle$, onde $f_1 = x^3 - 2xy$ e $f_2 = x^2y - 2y^2 + x$, e use a ordem graduada lexicográfica dos monômios em $K[x, y]$. Como $x(x^2y - 2y^2 + x) - y(x^3 - 2xy) = x^2$, então $x^2 \in I$. Logo, $x^2 = LT(x^2) \in \langle LT(I) \rangle$. Todavia, x^2 não é divisível por $LT(f_1) = x^3$ ou $LT(f_2) - x^2y$, assim $x^2 \notin \langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle$, pelo Lema 7.*

Mostremos agora que $\langle LT(I) \rangle$ é um ideal monomial:

Proposição 2. *Seja $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ um ideal.*

1. *$\langle LT(I) \rangle$ é um ideal monomial.*
2. *Existem $g_1, \dots, g_t \in I$ que satisfazem $\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$.*

Demonstração.

1. Os líderes monomiais $LM(g)$ dos elementos $g \in I - \{0\}$ geram o ideal monomial $\langle LM(g) : g \in I - \{0\} \rangle$. Como $LM(g)$ e $LT(g)$ são múltiplos um do outro via uma constante não nula, esse ideal faz com que $\langle LT(g) : g \in I - \{0\} \rangle = \langle LT(I) \rangle$. Então, $\langle LT(I) \rangle$ é um ideal monomial.
2. Desde que $\langle LT(I) \rangle$ é gerado pelos monômios $LM(g)$ para $g \in I - \{0\}$, o Lema de Dickson nos diz que $\langle LT(I) \rangle = \langle LM(g_1), \dots, LM(g_t) \rangle$ para $g_1, \dots, g_t \in I$. E como $LM(g_i)$ difere de $LT(g_i)$ por uma constante não nula, segue que $\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$. Isso completa a prova.

□

Teorema 3 (Teorema da Base de Hilbert). *Todo ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ tem um conjunto gerador finito. Isto é, $I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ para $g_1, \dots, g_t \in I$.*

Demonstração. Ver [1, Theorem 4, Chapter 2.5]

□

Definição 7. *Fixe uma ordem monomial. Um subconjunto $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ de um ideal $I \neq 0$ é uma Base de Gröbner se*

$$\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle = \langle LT(I) \rangle.$$

Corolário 1. *Fixe uma ordem monomial. Então qualquer ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ não nulo tem uma Base de Gröbner. Além disso, qualquer Base de Gröbner para um ideal I é uma base de I .*

Demonstração. [1, Corollary 6, Chapter 2.5]

□

3 Propriedades das Bases de Gröbner

Como foi mostrado no capítulo anterior, todo ideal não nulo $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ tem uma Base de Gröbner. Aqui, estudaremos as propriedades desse tipo de base e aprenderemos a como detectar quando uma base é uma Base de Gröbner.

Primeiramente, provemos que o resto de uma divisão é unicamente determinado quando os divisores formam uma Base de Gröbner.

Proposição 3. *Seja $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ uma Base de Gröbner para um ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ e seja $f \in K[x_1, \dots, x_n]$. Então existe um único resto $r \in K[x_1, \dots, x_n]$ com as duas seguintes propriedades:*

1. Nenhum termo de r é divisível por qualquer um dos $LT(g_1), \dots, LT(g_t)$.
2. Existe $g \in I$ tal que $f = g + r$.

Em particular, r é o resto da divisão de f por G não importa a ordem em que os elementos de G são listados usando o algoritmo da divisão.

Demonstração. O algoritmo da divisão nos dá que $f = a_1g_1 + \dots + a_tg_t + r$, onde r satisfaz 1. Tomando $g = a_1g_1 + \dots + a_tg_t \in I$, temos que 2 também é satisfeito. Isso prova a existência de r .

Para provar a unicidade, suponha que $f = g + r = g' + r'$ satisfazendo 1 e 2. Então $r - r' = g' - g \in I$. Se $r \neq r'$ então $LT(r - r') \in \langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$. Pelo Lema 1, segue que $LT(r - r')$ é divisível por algum $LT(g_i)$. Isso é impossível pois nenhum termo de r ou r' é divisível por qualquer um dos $LT(g_1), \dots, LT(g_t)$. Portanto $r - r'$ deve ser zero e a unicidade está provada.

A parte final dessa proposição também é verdade por conta da unicidade de r provada nessa demonstração. $\square$

Apesar do resto r ser único, até para uma Base de Gröbner, os "quocientes" a_i produzidos pelo algoritmo da divisão $f = a_1g_1 + \dots + a_tg_t + r$ podem mudar se listamos os divisores numa ordem diferente.

Exemplo 3. Vamos provar na conclusão (seção 4), que $G = \{y - x^2, z - x^3\}$ é uma Base de Gröbner para a ordem lexicográfica com $y > z > x$. Dividindo xyz por $y - x^2, z - x^3$, nessa ordem, obtemos que

$$xyz = xz(y - x^2) + x^3(z - x^3) + x^6.$$

Agora, na ordem contrária, dividindo xyz por $z - x^3, y - x^2$, obtemos que

$$xyz = xy(z - x^3) + x^4(y - x^2) + x^6.$$

Mesmo obtendo o mesmo resto em ambas as divisões, os "quocientes" são diferentes nelas. Isso nos mostra que o máximo que podemos esperar é a unicidade do resto na divisão de um polinômio por uma Base de Gröbner.

Corolário 2. Seja $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ uma Base de Gröbner para um ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ e seja $f \in K[x_1, \dots, x_n]$. Então, $f \in I$ se e só se o resto da divisão de f por G é zero.

Demonstração. Se o resto da divisão é zero, já vimos que $f \in I$. Por outro lado, dado $f \in I$, temos que $f = f + 0$ e isso satisfaz as duas condições da proposição anterior. Segue que 0 é o resto da divisão de f por G . $\square$

Definição 8. Denotamos o resto da divisão de f pela s -upla ordenada $F = (f_1, \dots, f_s)$ por $\overline{f}^F$. Se F é uma Base de Gröbner para $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ então podemos considerar F como um conjunto (sem qualquer ordem particular) pela proposição anterior.

Por exemplo, para $F = (x^2y - y^2, x^4y^2 - y^2) \subset K[x, y]$, usando a ordem lexicográfica, temos $\overline{x^5y}^F = xy^3$, pois o algoritmo da divisão nos dá

$$x^5y = (x^3 - xy)(x^2y + y^2) + 0(x^4y^2 - y^2) + xy^3.$$

No que vem a seguir discutiremos sobre como inferir que um dado conjunto gerador de um ideal I é uma Base de Gröbner.

Definição 9. Sejam $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ polinômios não nulos.

1. Se $\text{multigrau}(f) = \alpha$ e $\text{multigrau}(g) = \beta$ então defina $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, onde $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ para cada i . Chamamos x^γ de mínimo múltiplo comum de $LM(f)$ e $LM(g)$, escrito $x^\gamma = MMC(LM(f), LM(g))$.
2. O S -polinômio de f e g é a combinação

$$S(f, g) = \frac{x^\gamma}{LT(f)}f - \frac{x^\gamma}{LT(g)}g.$$

Como exemplo, seja $f = x^3y^2 - x^2y^3 + x$ e $g = 3x^4y + y^2$ em $\mathbb{R}[x, y]$ com a ordem lexicográfica graduada. Então $\gamma = (4, 2)$ e

$$S(f, g) = \frac{x^4y^2}{x^3y^2}f - \frac{x^4y^2}{3x^4y}g = xf - \frac{1}{3}yg = -x^3y^3 + x^2 - \frac{1}{3}y^3.$$

Um S -polinômio $S(f, g)$ é "designado" para produzir cancelamento de termos líderes. De fato, o seguinte lema mostra que todo cancelamento de termos líderes entre polinômios de mesmo multigrau resulta desse tipo de cancelamento.

Lema 2. Suponha que temos uma soma $\sum_{i=1}^s c_i f_i$, onde $c_i \in K$ e o $\text{multigrau}(f_i) = \delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ para todo i . Se $\text{multigrau}\left(\sum_{i=1}^s c_i f_i\right) < \delta$ então $\sum_{i=1}^s c_i f_i$ é uma combinação linear, com coeficientes em K , de S -polinômios $S(f_j, f_k)$ para $1 \leq j, k \leq s$. Além disso, cada $S(f_j, f_k)$ tem multigrau menor que δ .

Demonstração. Ver [1], Lemma 5, Chapter 2.6] $\square$

Usando S-polinômios e o lema anterior, podemos agora provar o seguinte Critério de Buchberger para deduzir quando uma base de um ideal é uma Base de Gröbner.

Teorema 4 (Critério de Buchberger). *Seja I um ideal polinomial. Então uma base $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ para I é uma Base de Gröbner para I se e somente se, para todos os pares $i \neq j$, o resto da divisão de $S(g_i, g_j)$ por G (listado em qualquer ordem) é zero.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se G é uma Base de Gröbner então, como $S(g_i, g_j) \in I$, o resto da divisão de $S(g_i, g_j)$ por G é zero pelo último corolário.

($\Leftarrow$) Seja $f \in I$ um polinômio não nulo. Devemos mostrar que se todos os S-polinômios têm resto zero na divisão por G então $LT(f) \in \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$. Dado $f \in I = (g_1, \dots, g_t)$, existem polinômios $h_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ tais que

$$f = \sum_{i=1}^t h_i g_i. \quad (1)$$

Das propriedades do multigrau, segue que

$$\text{multigrau}(f) \leq \max(\text{multigrau}(h_i g_i)). \quad (2)$$

Se a igualdade não ocorre então algum cancelamento de termos líderes de (1) deve ocorrer. Dada uma expressão (1) para f , seja $m(i) = \text{multigrau}(h_i g_i)$ e defina $\delta = \max(m(1), \dots, m(t))$. Assim, a inequação (2) se torna

$$\text{multigrau}(f) \leq \delta.$$

Agora, considere todas as formas possíveis nas quais f pode ser escrito na forma (1). Para cada expressão, obtemos um diferente δ . Como uma ordem monomial é uma boa ordem, podemos selecionar uma expressão na forma (1) tal que δ é mínimo. Mostremos que, uma vez que esse δ é escolhido, temos que $\text{multigrau}(f) = \delta$. Então a igualdade ocorre em (2), assim $\text{multigrau}(f) = \text{multigrau}(h_i g_i)$ para algum i e seguirá que o termo líder de f é divisível pelo termo líder de g_i . Isso mostrará que $LT(f) \in \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$, que é o que queremos provar. Resta mostrar que $\text{multigrau}(f) = \delta$. Provemos por contradição. A igualdade pode falhar somente quando $\text{multigrau}(f) < \delta$. Para isolar os termos que têm multigrau δ , vamos escrever f da seguinte forma:

$$f = \sum_{m(i)=\delta} h_i g_i + \sum_{m(i)<\delta} h_i g_i = \sum_{m(i)=\delta} LT(h_i) g_i + \sum_{m(i)=\delta} (h_i - LT(h_i)) g_i + \sum_{m(i)<\delta} h_i g_i. \quad (3)$$

Todos os monômios que aparecem no segundo e terceiro somatórios têm multigrau menor que δ . Então, como assumimos que $\text{multigrau}(f) < \delta$, temos que o primeiro somatório também deve ter multigrau menor que δ .

Seja $LT(h_i) = c_i x^{\alpha(i)}$. Então, o primeiro somatório $\sum_{m(i)=\delta} LT(h_i)g_i = \sum_{m(i)=\delta} c_i x^{\alpha(i)}g_i$ tem exatamente a forma descrita no lema anterior com $f_i = x^{\alpha(i)}g_i$. Assim, ainda por esse mesmo lema, esse somatório é uma combinação linear de S-polinômios $S(x^{\alpha(j)}g_j, x^{\alpha(k)}g_k)$. Contudo,

$$S(x^{\alpha(j)}g_j, x^{\alpha(k)}g_k) = \frac{x^\delta}{x^{\alpha(j)}LT(g_j)}x^{\alpha(j)}g_j - \frac{x^\delta}{x^{\alpha(k)}LT(g_k)}x^{\alpha(k)}g_k = x^{\delta-\gamma_{jk}}S(g_j, g_k), \quad (4)$$

onde $x^{\gamma_{jk}} = MMC(LM(g_j), LM(g_k))$. Então existem constantes $c_{jk} \in K$ tais que

$$\sum_{m(i)=\delta} LT(h_i)g_i = \sum_{j,k} c_{jk} x^{\delta-\gamma_{jk}} S(g_j, g_k).$$

O próximo passo é usar nossa hipótese de que o resto de $S(g_j, g_k)$ na divisão por $g_1, \dots, g_t$ é zero. Usando o algoritmo da divisão, temos que cada S-polinômio pode ser escrito na forma

$$S(g_j, g_k) = \sum_{i=1}^t a_{ijk} g_i, \quad (5)$$

onde $a_{ijk} \in K[x_1, \dots, x_n]$. O algoritmo da divisão também nos diz que

$$\text{multigrau}(a_{ijk}g_i) \leq \text{multigrau}(S(g_j, g_k)) \quad (6)$$

para todos i, j, k . Intuitivamente, isso nos diz que quando o resto é zero, nós podemos encontrar uma expressão para $S(g_j, g_k)$ em termos de G , onde nem todos os termos líderes se cancelam.

Para explorar isso, multiplicando a expressão de $S(g_j, g_k)$ por $x^{\delta-\gamma_{jk}}$ obtemos

$$x^{\delta-\gamma_{jk}}S(g_j, g_k) = \sum_{i=1}^t b_{ijk} g_i,$$

onde $b_{ijk} = x^{\delta-\gamma_{jk}}a_{ijk}$. Assim, a equação (6) junta com o último lema nos diz que

$$\text{multigrau}(b_{ijk}g_i) \leq \text{multigrau}(x^{\delta-\gamma_{jk}}S(g_j, g_k)) < \delta. \quad (7)$$

Se analisamos a expressão acima para $x^{\delta-\gamma_{jk}}S(g_j, g_k)$ e substituímos ela em (4),

obtemos a equação

$$\sum_{m(i)=\delta} LT(h_i)g_i = \sum_{j,k} c_{jk}x^{\delta-\gamma_{jk}}S(g_j, g_k) = \sum_{j,k} c_{jk} \left(\sum_i b_{ijk}g_i \right) = \sum_i \tilde{h}_i g_i,$$

a qual, por (7), tem a propriedade de que para todo i

$$\text{multigrau}(\tilde{h}_i g_i) < \delta.$$

Por fim, substituindo $\sum_{m(i)=\delta} LT(h_i)g_i = \sum_i \tilde{h}_i g_i$ na equação (3), obtemos uma expressão para f , a qual é uma combinação polinomial dos g_i 's tal que todos os termos têm multigrau menor que δ , o que contradiz a minimalidade de δ e completa a prova do teorema. $\square$

4 Conclusão

O Critério de Buchberger dado nesse último teorema é um dos resultados chave sobre Bases de Gröbner. Vimos que Bases de Gröbner têm muitas propriedades interessantes, mas, até agora, tem sido difícil determinar se uma base de um ideal é uma Base de Gröbner. Usando o critério do Buchberger, no entanto, agora é fácil mostrar se uma determinada base é uma Base de Gröbner. Como exemplo, considere o ideal $I = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ (do cubo torcido em $\mathbb{R}^3$). Provemos que $G = \{y - x^2, z - x^3\}$ é uma Base de Gröbner para a ordem lexicográfica com $y > z > x$. Para isso, considere o S-polinômio

$$S(y - x^2, z - x^3) = \frac{yz}{y}(y - x^2) - \frac{yz}{z}(z - x^3) = -zx^2 + yx^3.$$

Usando o algoritmo da divisão, obtemos

$$-zx^2 + yx^3 = x^3(y - x^2) + (-x^2)(z - x^3) + 0.$$

Assim, $\overline{S(y - x^2, z - x^3)} = 0$. E, pelo último teorema, G é uma Base de Gröbner para I .

5 Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da UFU, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento e por todos que me apoiaram até

aqui.

Referências

- [1] COX, D., LITTLE, J., OSHEA, D. **Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra**. New York: Springer, 2013.



A SURPREENDENTE RELAÇÃO ENTRE A DIRETRIZ DE UMA CÔNICA E AS RETAS TANGENTES NAS EXTREMIDADES DAS CORDAS FOCAIS

Laurinda Aparecida Ferreira de Moraes, Tânia Maria Machado de Carvalho.

Universidade Federal de Uberlândia, Universidade Federal de Uberlândia.

laurinda.morais@ufu.br, tania.carvalho@ufu.br

Resumo. Apesar de serem obtidas por meio de seções de um cone por um plano, as construções com régua e compasso, das seções cônicas não degeneradas, podem ser realizadas de forma totalmente independente do cone, a partir de suas respectivas propriedades. É comum encontrar em textos matemáticos a definição da parábola como sendo o *lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam do foco e de uma reta fixa, denominada diretriz*. No entanto, em geral, o conceito de diretriz não aparece, explicitamente, nas definições usuais das elipses e hipérboles. A proposta do presente trabalho é evidenciar o conceito de diretriz de uma cônica, a fim de resgatar a importância desse conceito na definição das principais propriedades dessas curvas. Para tal, será apresentada uma definição geral das cônicas a partir da relação entre o foco e a respectiva diretriz (propriedade foco-diretriz) e será mostrado o surpreendente fato de que a diretriz pode ser obtida como o lugar geométrico dos pontos de interseção entre as retas tangentes às cônicas, nas extremidades das cordas focais.

Palavras-chave. Cônicas. Propriedade foco-diretriz. Diretriz. Elipse. Parábola. Hipérbole.

Introdução

As cônicas começaram a ser estudadas na Grécia antiga. Acredita-se que esses estudos se iniciaram a partir das tentativas de Menaecmo (350 a. C.) em solucionar o problema da construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta paralelos de razão 2, problema esse que, de acordo com Hipócrates de Quio (440 a. C.), seria a solução de um dos três problemas clássicos da antiguidade: a duplicação do cubo (veja [3]). Esse problema atraiu a atenção de muitos matemáticos da época, dentre eles, Menaecmo, que se destaca pelas tentativas de solucionar o problema a partir de interseções de um plano com um cone, fato que justifica o

nome *seções cônicas*. Por esse motivo, Menaecmo é considerado o descobridor das cônicas. Porém, os nomes de Euclides, Arquimedes e Apolônio também se destacam por contribuições nos estudos dessas curvas.

Como dito no resumo acima, as cônicas podem ser obtidas por meio de seções de um cone por um plano, e as respectivas construções com régua e compasso, das seções cônicas (ou simplesmente *cônicas*) não degeneradas, que são as elipses, parábolas e hipérboles, podem ser realizadas de forma totalmente independente do cone, a partir de suas respectivas propriedades. É comum encontrar em textos matemáticos a definição da parábola como sendo o "*lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam do foco e de uma reta fixa, denominada diretriz*". No entanto, em geral, o conceito de diretriz não aparece, explicitamente, nas definições usuais das elipses e hipérboles.

O principal objetivo do presente trabalho é evidenciar o conceito de diretriz de uma cônica, resgatando assim a importância desse conceito na definição das principais propriedades dessas curvas. Para tal, será apresentada uma definição geral das cônicas a partir da relação entre o foco e a respectiva diretriz (propriedade foco-diretriz) e, como uma cereja de bolo, será mostrado que, surpreendentemente, a diretriz pode ser obtida como o lugar geométrico dos pontos de interseção entre as retas tangentes às cônicas, nas extremidades das cordas focais. Algo raramente abordado em cursos de geometria. Os principais resultados utilizados neste trabalho podem ser encontrados na referência [1] (BESANT, 1895)

1 Algumas definições e observações sobre as notações utilizadas

No que se segue, ao longo do texto, todos os objetos geométricos considerados estarão em um mesmo plano.

Os pontos serão denotados por letras maiúsculas. As retas serão denotadas por uma letra minúscula, ou, no caso em que se tratar de reta determinada por dois pontos A e B , ela poderá ser expressa como *reta* AB , ou simplesmente $\overleftrightarrow{AB}$. Um segmento de reta determinado por A e B será denotado por $\overline{AB}$, ou expresso como *segmento* AB , enquanto que a medida desse segmento será expressa simplesmente por AB . Um *ângulo* BAC , cujos lados são determinados pelas semi-retas AB e AC , poderá ser denotado também por $\widehat{BAC}$ e sua medida será denotada por $\angle BAC$. O símbolo $\triangle ABC$ denotará o triângulo de vértices A , B e C .

Definição 1. (*Seção cônica*) Sejam d uma reta, e F um ponto, ambos fixos em um plano. Seja P um ponto que se move nesse plano. A curva determinada pelo

movimento do ponto P , sujeito à condição $\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = e$, onde $e \in \mathbb{R}$ é constante, é chamada de *seção cônica*.

A propriedade do ponto P na definição anterior é chamada de *propriedade foco-diretriz*.

Definição 2. (Foco, diretriz e excentricidade) O ponto F da definição 1 é chamado de *foco*, a reta d é chamada de *diretriz*, e a constante e é denominada de *excentricidade da seção cônica*.

- Quando $0 < e < 1$, a cônica é chamada de **Elipse**.
- Quando $e = 1$, a cônica é chamada de **Parábola**.
- Quando $1 < e < \infty$, a cônica é chamada de **Hipérbole**.

Definição 3. (Corda focal) Uma *corda focal* $P\bar{F}P'$ é um segmento de reta, não incidente ao eixo, que passa pelo foco e cujas extremidades são pontos da cônica.

Definição 4. (Reta tangente à cônica) Se uma reta, traçada por um ponto P de uma cônica, encontra a cônica novamente em P' , a *reta tangente à cônica* é a posição para onde a reta PP' tende a medida que P' se aproxima de P .

2 Construções das cônicas e algumas de suas propriedades

2.1 Construção geométrica de uma cônica por meio da propriedade foco-diretriz.

No que se segue serão apresentadas as construções das cônicas (não degeneradas) a partir de uma reta e um ponto, a saber: a diretriz d e o foco F , respectivamente.

Considere um ponto A sobre a diretriz d tal que A é o pé da perpendicular baixada do foco F até a diretriz.

Observação: A reta AF , a qual passa pelo(s) foco(s) de uma cônica e é perpendicular à sua diretriz é chamada de *eixo da cônica*.

Tome um ponto V no segmento AF . Supondo que V seja um ponto da cônica, é possível encontrar um ponto P também pertencente a essa mesma curva. A veracidade disso é comprovada verificando que a relação $\frac{D(V, F)}{D(V, d)} = \frac{D(P, F)}{D(P, d)} = e$, é satisfeita, onde e é a excentricidade da cônica (ver definição 2).

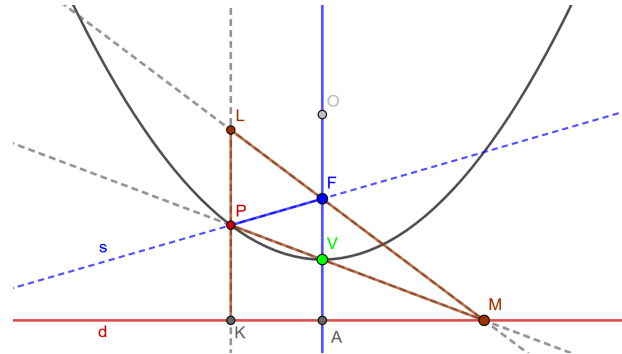
Tome um ponto M na diretriz d , distinto de A , e trace as retas MV e MF . Trace por F a reta s simétrica ao eixo com relação à reta MF . Seja P o ponto de interseção entre a reta s e a reta MV .

Afirmção 1. Os pontos V e P são, ambos, pontos da curva.

Demonstração. De fato,

trace por P a reta perpendicular à diretriz, e seja L o ponto de intersecção desta reta com a reta MF . Seja K o ponto de intersecção entre a reta criada anteriormente e a diretriz d . Seja O um ponto sobre o eixo, tal que F está entre os pontos A e O .

Figura 1: Cônicas construída por meio da propriedade foco-diretriz.



Fonte: Elaborada pelas autoras (2022)

Observe que $\widehat{PLF} \equiv \widehat{LFO}$, pois ambos são ângulos alternos internos congruentes, relativos às retas paralelas AF e PK . Além disso, $\widehat{LFO} \equiv \widehat{LFP}$, pois, por construção, $\overrightarrow{LF}$ é bissetriz do ângulo PFO . Então, $\widehat{PLF} \equiv \widehat{LFP}$, e consequentemente, FPL é um triângulo isósceles de base $\overline{FL}$ (ver figura 1). Disso, é possível concluir que

$$PF = PL \quad (1)$$

Por outro lado, pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos (veja 4), é possível observar que:

$$\triangle MPL \approx \triangle MVF, \quad (2)$$

$$\triangle MKP \approx \triangle MAV. \quad (3)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{PL}{VF} &\stackrel{(2)}{=} \frac{MP}{MV} \stackrel{(3)}{=} \frac{PK}{VA} \\
&\Rightarrow \frac{PL}{VF} = \frac{PK}{VA} \\
&\Rightarrow \frac{PL}{PK} = \frac{VF}{VA} \\
&\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{PF}{PK} = \frac{VF}{VA}
\end{aligned} \tag{4}$$

Como $\overline{PF}$ está para $\overline{PK}$ assim como $\overline{VF}$ está para $\overline{VA}$, podemos dizer que $D(P, F)$ está para $D(K, P)$, assim como $D(V, F)$ está para $D(V, A)$. É possível observar que $D(K, P) = D(P, d)$ e $D(V, A) = D(V, d)$. Logo,

$$\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = \frac{D(V, F)}{D(V, d)} = e. \tag{5}$$

Portanto, segue da definição 1 que tanto o o ponto P , quanto o ponto V são pontos da cônica. $\square$

O ponto V é chamado de *vértice* da cônica e, escolhendo sucessivos pontos M na diretriz, é possível encontrar sucessivos pontos da cônica.

É possível observar que, ao escolher um ponto M' na diretriz d , simétrico ao ponto M com relação ao eixo, obtém-se um ponto P' , pertencente à cônica, tal que P' é simétrico ao ponto P , também com relação ao eixo. Logo, como M , e consequentemente P , é um ponto arbitrário, conclui-se que uma cônica é simétrica em relação ao eixo.

Proposição 1. A bissetriz externa de um ângulo AOB é perpendicular à bissetriz desse ângulo.

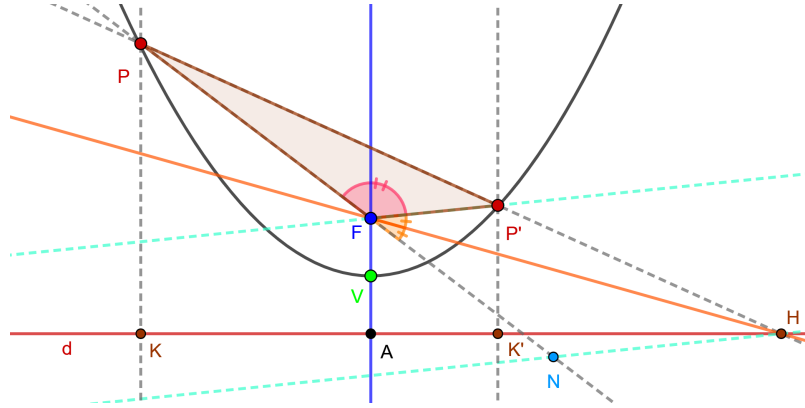
Proposição 2. Sejam P e P' dois pontos de uma cônica, e seja H o ponto de interseção da reta PP' com a reta diretriz d . A reta HF é a bissetriz externa do ângulo FPF' .

Demonstração. Sejam K e K' dois pontos pertencentes à diretriz tais que $\overleftrightarrow{PK}$ e $\overleftrightarrow{P'K'}$ sejam as respectivas perpendiculares à diretriz por P e P' , como na figura 2

Como P e P' pertencem à cônica, segue de (4) que,

$$\frac{PF}{PK} = \frac{VF}{VA} = \frac{P'F}{P'K'} \Rightarrow \frac{PF}{P'F} = \frac{PK}{P'K'}. \tag{6}$$

Figura 2: Bissetriz Externa do ângulo $PP'F$.



Fonte: Elaborada pelas autoras (2022)

Observe agora que as retas paralelas PK e $P'K'$ são cortadas pela transversal PP' , logo os triângulos HPK e $HP'K'$ são semelhantes. Daí, segue que,

$$\frac{PK}{P'K'} = \frac{PH}{P'H}. \quad (7)$$

De (6) e (7), obtém-se que

$$\frac{PF}{P'F} = \frac{PH}{P'H}. \quad (8)$$

Sejam r a reta paralela à $\overleftrightarrow{P'F}$ passando por H , e N o ponto de interseção entre as retas r e FP . Vamos provar que o triângulo FHN é isósceles de base $\overline{FH}$, e que, consequentemente, $\widehat{HFN}$, $\widehat{FHN}$ e $\widehat{P'FH}$ são ângulos congruentes.

Observe que pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos (veja [4]) os triângulos FPP' e NPH são semelhantes. Dessa semelhança, extrai-se a seguinte relação:

$$\frac{P'F}{HN} = \frac{PP'}{PH} \Rightarrow PP' = \frac{P'F \cdot PH}{HN} \quad (9)$$

Usando o fato de que $\overleftrightarrow{P'F}$ e $\overleftrightarrow{HN}$ são retas paralelas cortadas por transversais, obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{PF}{FN} = \frac{PP'}{P'H}. \quad (10)$$

Substituindo (9) em (10),

$$\begin{aligned} \frac{PF}{FN} &= \frac{\frac{P'F \cdot PH}{HN}}{P'H} \Rightarrow \frac{PF}{FN} = \frac{P'F \cdot PH}{HN \cdot P'H} \\ &\Rightarrow \frac{PF}{P'F} = \frac{PH}{P'H} \cdot \frac{FN}{HN} \\ &\stackrel{\textcircled{8}}{\Rightarrow} \frac{FN}{HN} = 1, \end{aligned}$$

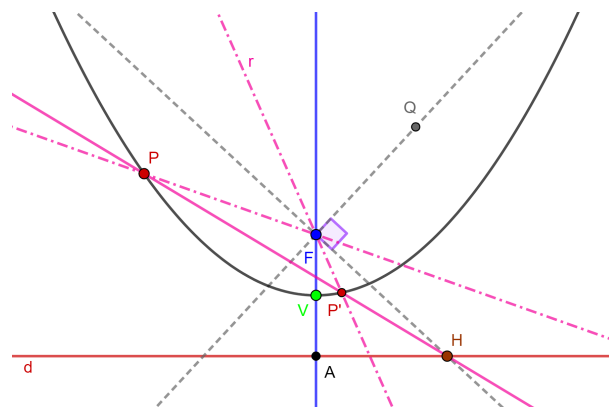
logo, $FN = HN$.

Segue dessa última igualdade que o triângulo FHN é isósceles de base $\overline{FH}$. Ou seja, $\widehat{HFN}$ e $\widehat{FHN}$ são congruentes. Observe ainda que $\widehat{P'FH}$ e $\widehat{FHN}$ são alternos internos, e consequentemente são congruentes. Por transitividade, $\widehat{HFN}$ e $\widehat{P'FH}$ também são congruentes. Portanto, a reta FN é bissetriz externa de $\widehat{PFP'}$.

Proposição 3. Uma reta intersecta uma cônica no máximo em dois pontos.

Demonstração. Seja c uma cônica e d sua diretriz. Sejam P um ponto de c e H um ponto de d . Seja Q um ponto qualquer tal que $\widehat{HFQ}$ seja um ângulo reto. Seja r a reta simétrica à reta PF com relação à reta QF , e seja P' o ponto de interseção da reta r com a reta HP . Então o ponto P' , caso exista, é um ponto pertencente à cônica.

Figura 3: Interseção de uma cônica com uma reta.



Fonte: Elaborada pelas autoras (2022)

De fato,

sejam K e K' pontos arbitrários da diretriz e seja $\overleftrightarrow{PK}$ e $\overleftrightarrow{P'K'}$ as respectivas perpendiculares por K e K' .

Como $\overleftrightarrow{HF}$ bissecta o ângulo externo relativo ao ângulo $PP'F$ em F (observe

que $\overleftrightarrow{HF}$ é a bissetriz externa do ângulo determinado pelas retas r e PF), segue de (7) e (8) que,

$$\begin{aligned}\frac{PF}{P'F} &= \frac{PH}{P'H} = \frac{PK}{P'K'} \\ \Rightarrow \frac{PF}{PK} &= \frac{P'F}{P'K'}\end{aligned}\tag{11}$$

Observe que interpretando a informação de (11) em termos de distância, tem-se

$$\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = \frac{D(P', F)}{D(P', d)} = e.$$

Portanto, P' é um ponto da cônica.

Supondo que houvesse um ponto P'' sobre a reta HP que também pertence à cônica, então FQ bissecta o ângulo PSP'' . Como FQ bissecta o ângulo PSP' , então, pela unicidade da bissetriz, P' e P'' são coincidentes. Portanto, uma reta intersecta uma cônica em no máximo dois pontos. $\square$

Proposição 4. Seja SFS' uma corda focal, e seja P um ponto qualquer da cônica. Seja M e N os pontos de interseção de $\overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{PS'}$ com a diretriz, respectivamente. O ângulo MFN é um ângulo reto.

Demonstração. Pela proposição (2) $\overleftrightarrow{FM}$ é a bissetriz externa de $\widehat{PFS}$, e $\overleftrightarrow{FN}$ é a bissetriz externa de $\widehat{PFS'}$. Pode-se observar que $\widehat{PFS'}$ é bissectado por $\overleftrightarrow{FM}$, pois $\widehat{PFS'}$ é um ângulo externo de $\widehat{PFS}$. Analogamente, tem-se que $\overleftrightarrow{FN}$ bissecta $\widehat{PFS}$. Logo, segue da proposição (1) que $\overleftrightarrow{FM}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{FN}$, ou seja, $\widehat{MFN}$ é um ângulo reto. $\square$

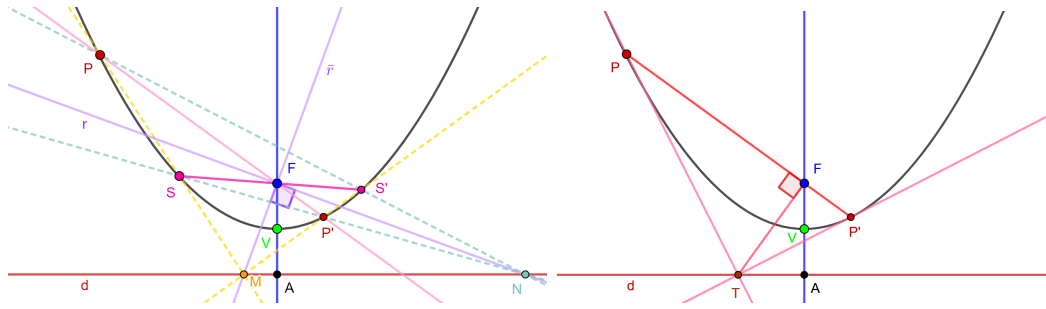
Proposição 5. As retas que unem as extremidades de duas cordas focais se interceptam na diretriz (ver figura 4, à esquerda).

Demonstração. Sejam P, P', S e S' pontos da cônica, tal que PFP' e SFS' sejam duas cordas focais.

Observe que $\widehat{PFS}$ e $\widehat{P'FS'}$ são ângulos alternos internos, logo possuem a mesma bissetriz. Seja r a bissetriz de $\widehat{PFS}$ e $\widehat{P'FS'}$. E seja $\bar{r}$ a reta perpendicular a r . Seja M o ponto de intersecção da reta $\bar{r}$ com a diretriz e seja N o ponto de interseção de r com a diretriz. Pela proposição (4), a reta $\bar{r}$ é bissetriz externa de $\widehat{PFS}$ e $\widehat{P'FS'}$.

Segue ainda da proposição (4), que $\overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{P'S'}$ se interceptam em M , e $\overleftrightarrow{P'S}$ e $\overleftrightarrow{P'S'}$ se interceptam em N . Ou seja, as retas que unem as extremidades das cordas focais PFP' e SFS' se interceptam na diretriz. $\square$

Figura 4: À esquerda vemos a representação da proposição 5. À direita pode-se ver as tangentes de uma cônica traçadas nas extremidades de uma corda focal, intercedendo-se na diretriz.



Fonte: Elaborada pelas autoras (2022)

A proposição a seguir é válida para as tangentes de uma cônica em qualquer ponto que não seja um vértice. A reta tangente no vértice de uma cônica é paralela à diretriz, e portanto não intersecta a diretriz.

Proposição 6. A reta traçada do foco ao ponto em que a tangente encontra a diretriz, é ortogonal à reta traçada do foco ao ponto de tangência.

Demonstração. Na proposição 1 é provado que se a bissetriz externa de um ângulo é perpendicular à bissetriz desse ângulo. Ou seja, se P e P' forem dois pontos de uma cônica, e T for o ponto de interseção da diretriz da cônica com a reta PP' , e seja Q um ponto tal que FQ seja bissetriz de $\widehat{PFP'}$, então pela proposição 4 tem-se que $\widehat{TFQ}$ é um ângulo reto.

Quando o ponto P' se move na curva e se aproxima da coincidência com P , a reta TPP' (onde, $\overrightarrow{TPP'} = \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{TP'}$) se aproxima, e finalmente se torna, a tangente da cônica em P . Quando P coincide com P' a reta FQ coincide com FP . Logo, o ângulo TFP é um ângulo reto. $\square$

Teorema 1. Seja c uma cônica e PPF' uma corda focal de c . As retas tangentes à cônica nos pontos P e P' se intersectam na diretriz (ver figura 4 à direita).

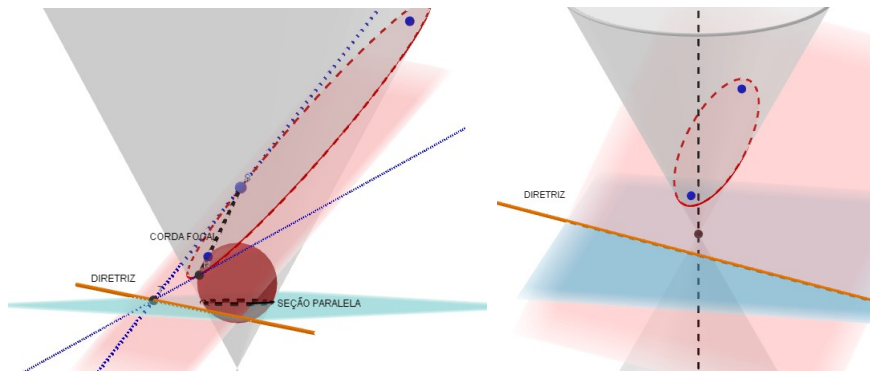
Demonstração. Seja T o ponto de interseção da tangente à cônica em P com a diretriz. A reta TF é ortogonal à $\overline{PF}$. Consequentemente, a reta TF é ortogonal à $\overline{FP'}$. Logo, pela proposição 6 têm-se que a tangente em P' também intersecta a diretriz em T . $\square$

A teorema anterior permite que a diretriz seja definida como um lugar geométrico, como segue:

Definição 5. A *diretriz* é o lugar geométrico dos pontos de interseção entre as retas tangentes nas extremidades de uma corda focal de uma cônica.

Para justificar a utilização do termo *surpreendente* no título, vale ressaltar que, do ponto de vista das cônicas como seções de um cone, a diretriz é, na verdade, a reta de interseção do plano que contém a cônica com o plano que contém uma *seção paralela* (circunferência de interseção entre o cone e uma esfera interior ao cone) de uma esfera que passa pelo respectivo foco (ver figura 5). Para maiores detalhes sobre esta relação consulte a referência [2].

Figura 5: A diretriz é a reta de interseção entre o plano que contém a cônica com o plano que contém uma *seção paralela* de uma esfera interior ao cone.



Fonte: Elaborada pelas autoras (2022)

3 Considerações finais

A diretriz é um elemento pouco enfatizado nos cursos básicos de geometria. É comum, ao falar de diretriz, pensar na parábola. Diante do exposto ao longo do texto, fica claro que elipses e hipérboles também podem ser definidos em função de suas diretrizes, de forma que as definições das cônicas como lugares geométricos dos pontos que satisfazem uma dada relação de distância entre o foco e a diretriz, comumente usada ao se definir a parábola, pode se estender também à elipse e à hipérbole. Tal definição é feita utilizando a propriedade foco-diretriz, com base nos resultados aqui demonstrados, e em particular, com base no teorema [1], de forma que, conhecendo uma cônica, e ao menos um de seus focos, é possível encontrar sua(s) diretriz(es). Além disso, como um ganho extra, a propriedade foco-diretriz permite definir a diretriz como um lugar geométrico.

Referências

- [1] BESANT, W. H. **Conic sections treated geometrically**. 9^a ed. London: George Bell and Sons, 1895. Disponível em: <https://www.gutenberg.org/files/29913/29913-pdf.pdf>. Acesso em: 28 set. 2022.
- [2] CARVALHO, T. M. M. de. The Dandelin spheres and the method of the conic sections of the greeks. **NEXUS Mathematicæ**, Goiânia, v. 1, p. 30–48, 2018. Disponível em: <https://revistas.ufg.br/nexus/article/view/51354>. Acesso em: 28 set. 2022.
- [3] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5^a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [4] QUEIROZ, M. L. B.; REZENDE, E. Q. F., **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2^a ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

PARTE 2

RESUMOS EXPANDIDOS



RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES UTILIZANDO SOFTWARE NUMÉRICO

Carla Soares Lima, Vanda Maria Luchesi

Universidade Federal de Uberlândia, Universidade Federal de Uberlândia.
carla.lima@ufu.br, vanda.luchesi@ufu.br.

Introdução

De modo prático e intuitivo, a álgebra linear, em particular o estudo de matrizes, pode ser considerada uma linguagem que permite a interação entre o homem e o computador. Neste contexto, surgiu o estudo e a pesquisa em álgebra linear numérica, e em particular a resolução de sistemas lineares. O uso desta linguagem na área computacional e a resolução de sistemas lineares encontrados na pesquisa de problemas reais das áreas de ciências econômicas e engenharias foram os estudos que propiciaram o início da pesquisa da álgebra linear numérica. Com o avanço da tecnologia, a explosão do processamento em paralelo e os cálculos computacionais em larga escala, a importância da álgebra linear para a resolução de problemas nas diversas áreas do conhecimento se torna primordial. Com o intuito de ressaltar a importância do estudo de sistemas lineares destacamos as seguintes aplicações:

- 1) **Programação linear:** Muitas decisões administrativas são tomadas com base em modelos de programação linear que utilizam centenas de variáveis. A indústria aérea, por exemplo, utiliza programação linear para operar seus voos evitando colisões, monitorando a localização de suas aeronaves, manutenção e operações nos terminais aéreos.
- 2) **Exploração de petróleo:** A modelagem matemática das ondas sísmicas utilizadas na exploração de petróleo resulta em equações cujas soluções são obtidas através da resolução de milhares de sistemas lineares de equações.
- 3) **Networks (Redes):** Para estabelecer o designer de redes, por exemplo elétricas, social (Facebook, Instagram, etc.) e outras, os softwares envolvidos neste designer utilizam álgebra linear numérica e a resolução de sistemas lineares.

O objetivo deste trabalho é o estudo da álgebra linear numérica através da construção de algoritmos de resolução de sistemas lineares utilizando as propriedades

de Matrizes e um software numérico. Neste contexto, para estudo dos principais teoremas e propriedades de Matrizes foram utilizadas as referências bibliográficas [1] e [3]. O estudo do software GNU octave e a implementação dos algoritmos seguiram as referências [2] e [3].

1 Sistemas de Equações Lineares

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$ definida sobre o corpo $\mathbb{F}$. Consideremos o problema de encontrar escalares $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{F}$ satisfazendo simultaneamente o seguinte sistema de equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Onde $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{F}$ são conhecidos. Esse problema é denominado sistema linear com m equações lineares e n incógnitas.

Na forma matricial temos $AX = B$ onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Vamos adotar as seguintes notações:

- a_i , a i -ésima linha da matriz A ;
- a_j , a j -ésima coluna da matriz A ;
- a_{ii} , são os elementos da diagonal principal da matriz A ;

Definição 1. Dizemos que um sistema de equações lineares é consistente se possui solução (uma única ou infinitas). Quando não possui solução, dizemos que o sistema é inconsistente.

Teorema 1. Seja A uma matriz de ordem n . As seguintes afirmações são equivalentes

- a) A é uma matriz não singular.
- b) A é uma matriz invertível.

- c) A matriz triangular superior U na forma escalonada, linha equivalente a matriz A , possui todos os elementos da diagonal principal não nulos.
- d) O sistema linear homogêneo $AX = 0$ possui somente a solução trivial.
- e) Para todo vetor coluna Y , de ordem $m \times 1$, o sistema linear $AX = Y$ possui uma única solução, que é dada por $X = A^{-1}Y$.

Teorema 2. Sejam L uma matriz triangular inferior ordem $n \times n$ com todos os elementos da diagonal principal não-nulos, e B um vetor coluna de ordem $n \times 1$. Então o sistema linear triangular inferior

$$LX = B$$

possui uma única solução, que é obtida pelo processo de substituição avançada.

Algoritmo do Processo de Substituição Avançada

```
for  $i = 1, \dots, n$ 
  soma = 0.0
  for  $j = 1, \dots, (i - 1)$ 
    soma = soma +  $L(i,j) * X(j)$ 
  end  $X(i) = (Y(i) - \text{soma}) / L(i,i)$ 
end
```

Teorema 3. Sejam U uma matriz triangular superior ordem $n \times n$ com todos os elementos da diagonal principal não-nulos, e B um vetor coluna de ordem $n \times 1$. Então o sistema linear triangular inferior

$$UX = B$$

possui uma única solução, que é obtida pelo processo de substituição atrasada.

Algoritmo do Processo de Substituição Atrasada

```
for  $i = n, \dots, 1$ 
  soma = 0.0
  for  $j = (i + 1), \dots, n$ 
    soma = soma +  $U(i,j) * X(j)$ 
  end  $X(i) = (Y(i) - \text{soma}) / U(i,i)$ 
end
```

2 Análise e Resultados

Com o intuito de relacionar a teoria da álgebra linear com a álgebra linear numérica foi escolhido um exemplo simples de modo que o resultado numérico pudesse ser verificado com o resultado exato (teórico). No entanto, os algoritmos podem ser aplicados em sistemas lineares maiores. Sendo assim, considere o seguinte

sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x & = & 4 \\ x + 5y & = & 11 \\ 2x + y + 4z & = & 8 \\ x + 2y + 3z + 6t & = & 26 \end{array} \right.$$

Figura 1: Algoritmo implementado para a resolução do sistema utilizando o software livre GNU Octave

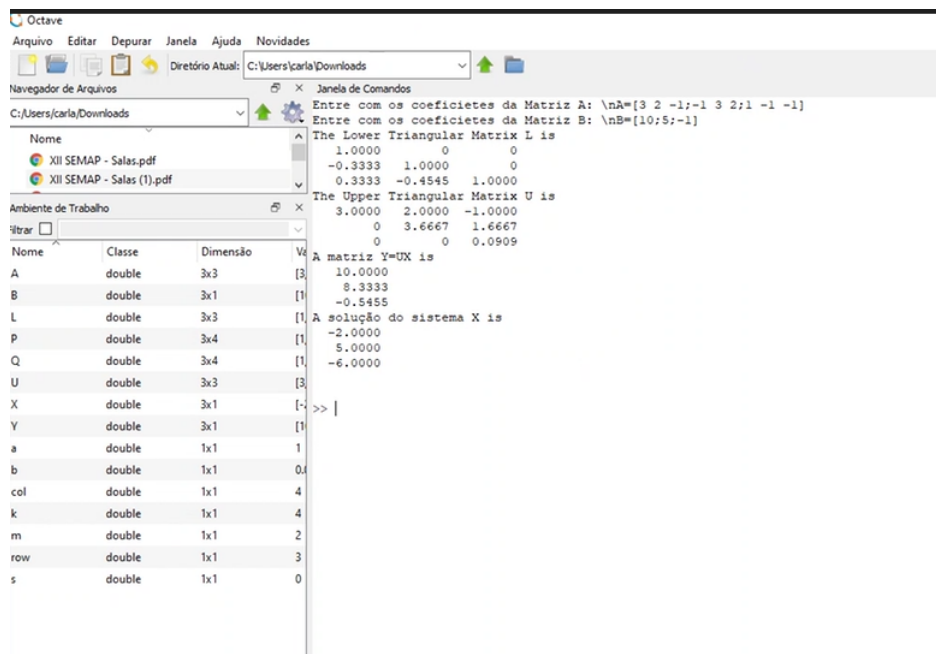
```

1  A=input('Entre com os coeficientes da Matriz A: \n');
2  B=input('Entre com os coeficientes da Matriz B: \n');
3  [L,U]=lu(A);
4  disp('The Lower Triangular Matrix L is')
5  disp(L);
6  disp('The Upper Triangular Matrix U is')
7  disp(U);
8
9  P=[ L B ];
10 [li,col] = size(P);
11 %=====
12 %Algoritmo 1 - Substituição avançada
13 %=====
14 for m=1:li
15     a=P(m,m);
16     if a==0
17         disp('O método não é aplicável ');
18         return
19     end
20     P(m,:)= P(m,:)/a;
21 end
22
23 soma=0;
24 for m=1:li-1
25     for k=li-m:li-1
26         soma=soma+P(m+1,col-k-1)* P(col-k-1,col);
27         P(m+1,col)= P(m+1,col)- soma;
28         soma=0;
29     end
30 end
31 Y= P(:,col);
32 disp('A matriz Y=UX is ');
33 disp(Y);
34 %=====
35 %Algoritmo 2 - Substituição atrasada
36 %=====
37 Q=[U Y];
38 for m=1:li
39     b=Q(m,m);
40     if b==0
41         disp('O método não é aplicável');
42         return
43     end
44     Q(m,:)= Q(m,:)/b; %*
45 end
46
47 soma=0;
48 for m=li:-1:2
49     for k=m+1:col
50         soma=s+Q(m-1,k-1)* Q(k-1,col);
51         Q(m-1,col)= Q(m-1,col)- soma;
52         soma=0;
53     end
54 end
55 X= Q(:,col);
56 disp('A solução do sistema X is');
57 disp(X);
58 %fprintf('%1.5f \n', X);

```

Fonte: Adaptado de [3]

Figura 2: Resultados obtidos da resolução do sistema linear utilizando o software livre GNU Octave



Fonte: Autor

Referências

- [1] ARENALES, S., DAREZZO, A. **Cálculo Numérico**: Aprendizado com apoio de software. 2. ed., rev. ampl. São Paulo: Cengage learning, 2015.
- [2] Apostila de Introdução ao Octave. Disponível em: <http://www.castilho.prof.ufu.br/cn/octave.pdf>. Acesso em: 30 Jul. 2021
- [3] TREFETHEN, L. N., BAU, D. **Numerical linear algebra**. SIAM, 1997.



EDUCAÇÃO FINANCEIRA E MATEMÁTICA

FINANCEIRA: revisão bibliográfica do conceito de juro¹

Roney Andrade da Silva, Érika Maria Chioca Lopes

Universidade Federal de Uberlândia, Universidade Federal de Uberlândia.
roney.andrade@ufu.br, erikalopes@ufu.br.

Introdução

A presença da Matemática na vida das pessoas é inegável, sobretudo, quando se fala de Educação Financeira. Diferentes órgãos e pesquisadores apontam para a necessidade de aprender Educação Financeira. A Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE, 2005, anexo p.5) define Educação Financeira como:

[...] o processo pelo qual consumidores/investidores financeiros aprimoram sua compreensão sobre produtos, conceitos e riscos financeiros e, por meio de informação, instrução e/ou aconselhamento objetivo, desenvolvem as habilidades e a confiança para se tornarem mais conscientes de riscos e oportunidades financeiras, a fazer escolhas informadas, a saber onde buscar ajuda, e a tomar outras medidas efetivas para melhorar seu bem-estar (OCDE, 2005, anexo p.5).

Ainda, ressalta que as decisões relacionadas às questões financeiras aparecem precocemente e estão cada vez mais presentes na vida das pessoas. Entretanto, o seu aprendizado, por vezes, esbarra na dificuldade que os alunos demonstram em lidar com conceitos matemáticos relacionados com a Matemática Financeira.

Esta, por sua vez, pode ser entendida como "[...] um corpo de conhecimento que estuda a mudança de valor do dinheiro com o decurso de tempo" (PUCCINI, 2011, p.13), ou seja, através de suas ferramentas o cidadão tem a possibilidade de estabelecer um processo crítico relativo à tomada de decisões inerentes à educação financeira. Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) complementa e esclarece que "os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas" (BRASIL,

¹Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

2018, p.529). Sendo assim, está sendo realizada uma pesquisa de iniciação científica com a intenção de utilizar a Investigação Matemática em sala de aula como alternativa pedagógica para o ensino de conceitos matemáticos relacionados diretamente com a Educação Financeira, mais especificamente, juros simples e compostos. Em particular, este resumo tem o objetivo de apresentar o levantamento bibliográfico feito no âmbito da pesquisa, buscando estabelecer um panorama de como os trabalhos acadêmicos voltados para a Investigação Matemática em sala de aula retratam o conceito de juro diante das perspectivas da Educação e da Matemática Financeira.

1 Desenvolvimento

Neste estudo, optou-se por fazer um levantamento de artigos, dissertações e teses que abordaram o conceito de juros sob a perspectiva investigativa, nos repositórios do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e Google Acadêmico. No repositório do XII ENEM, na aba "Comunicações Científicas", foi pesquisado por "financeira" nas 17 páginas disponíveis. No repositório do XIII ENEM foram feitas buscas dentro do subeixo 7 - Resolução de Problemas e Investigações Matemáticas que contivessem a palavra "financeira". Com apenas um resultado encontrado, optou-se por realizar nova pesquisa sem restrições de subeixo. Foram encontrados 37 resultados para a palavra "financeira". Dentro da plataforma Google Acadêmico, buscou-se por produções que contivessem as palavras "investigação" e "financeira", juntamente com suas variações no período de dez anos. Pela leitura dos títulos e resumos, foram selecionados quatro trabalhos que compuseram esta revisão bibliográfica.

1.1 Investigações Matemáticas em Sala de Aula

Buscando os principais autores que pesquisaram a dinâmica das aulas investigativas, nos deparamos com João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira (2006). No livro *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*, os autores trazem as linhas gerais dessas investigações bem como exemplos que foram trabalhados em Portugal nos anos oitenta e noventa.

Fazendo um paralelo com o trabalho de um pesquisador matemático, Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) apresentam uma proposta de como emular esse processo investigativo em sala de aula. Em síntese, eles elaboraram um quadro que divide a realização de uma investigação matemática em quatro momentos principais, onde o objetivo é adaptar o processo investigativo realizado por pesquisadores matemáticos para o ensino em sala de aula. Uma descrição mais detalhada destes momentos pode ser encontrada em Silva e Lopes (2022).

2 Bibliografia Analisada

Dentre os trabalhos levantados, que abordam o ensino de juro sob a perspectiva da Investigação Matemática em sala de aula, Cunha e Laudaes (2019) apresentaram uma forma de trabalhar a Educação Financeira de maneira reflexiva e crítica,

Tabela 1: Momentos na realização da Investigação Matemática.

Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática
	Explorar a situação problemática
	Formular questões
Conjecturas	Organizar dados
	Formular conjecturas (e fazer as afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	Realizar testes
	Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura
	Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte, Brocado e Oliveira (2006).

dando enfoque aos conceitos e cálculos relacionados com a Matemática Financeira. Apesar de optarem pela metodologia de Resolução de Problemas, em diversos momentos fica claro que a Investigação Matemática influenciou os autores, motivo pelo qual o trabalho foi selecionado para esta revisão. Tal influência fica nítida ao explicar como funcionaria a atividade em duplas, onde o objetivo era de que os alunos deveriam "defender o seu ponto de vista, abarcando elementos dos textos, vinculando-os a conceitos matemáticos para construir sua argumentação, inicialmente, perante seu parceiro, para, posteriormente, levar suas ideias à sala." (CUNHA; LAUDARES, 2019, p. 3). Essa dinâmica se assemelha com a terceira e quarta etapa da Investigação Matemática (Tabela 1).

A monografia de Barros (2012), tinha o objetivo de apresentar propostas de atividades investigativas que possibilitassem aos estudantes do Ensino Fundamental trabalhar com situações reais relacionadas com transações comerciais e financeiras. A autora traz quatro atividades investigativas que trabalham com os conceitos de lucro, descontos e acréscimos, pagamento à vista e a prazo, juros simples e rendimento de poupança.

Na sequência, a pesquisa de Franzoni e Quartieri (2020) buscou analisar as possibilidades que uma aula investigativa fornece para o estabelecimento de conjecturas e estratégias de resolução. Com uma metodologia qualitativa, foram analisadas duas atividades desenvolvidas junto aos licenciandos em Matemática da universidade no estado do Rio Grande do Sul que envolvia uma abordagem investigativa no trato de conceitos ligados à Matemática Financeira, dentro dos preceitos de uma Educação Financeira.

Por fim, o de Scolari e Grando (2016) buscou estabelecer uma proposta didático-pedagógica que possibilitasse a apropriação de significados relacionados à Educação Financeira ao mesmo tempo que trabalhasse em conjunto com temas transversais, como ética, cidadania, meio ambiente, entre outros. Para tanto, as autoras desenvolveram uma pesquisa de abordagem qualitativa que foi realizada em quinze aulas junto à uma turma o 7º ano de uma escola da rede municipal de Getúlio Vargas/RS.

3 Considerações Parciais

De maneira geral, os autores pesquisados não estabelecem definições exatas do que é Educação Financeira e Matemática Financeira, entretanto, é notável que o primeiro termo está fortemente relacionado com os hábitos dos alunos, já o segundo é comumente relacionado com os saberes matemáticos.

Cunha e Laudares (2019) utilizam a Educação Financeira como eixo condutor das atividades. Partindo de situações reais (formas de poupar dinheiro, o estudo de casos de cálculos trabalhistas, de cálculo de prestações constantes, financiamentos de imóveis etc.) eles estabelecem atividades em que os estudantes utilizam a Matemática Financeira como ferramenta para desenvolver o raciocínio crítico necessário para análise de tais situações.

Em contrapartida, Franzoni e Quartieri (2020) trazem um trabalho voltado conceitualmente para a Educação Financeira, dando definições concisas e explicitando como ela se relaciona com a Matemática Financeira. Entretanto, nas atividades propostas em sala de aula, o foco é no ensino dos conceitos matemáticos.

Scolari e Grando (2016) ressaltam como a alta disponibilidade de crédito e as práticas enganosas podem levar o consumidor ao endividamento, gerando um problema pessoal e social. Na proposta de aula apresentada, a Educação Financeira está presente em todas as etapas da sequência didática, desde o questionário inicial sobre os hábitos de consumo dos alunos até pesquisas de preços em supermercados. Assim, a Matemática Financeira inerente às atividades foi trabalhada sempre em conjunto com situações reais pesquisadas pelos estudantes.

Em resumo, ao estudar os trabalhos pela ótica da Investigação Matemática em sala de aula, fica claro que a principal preocupação dos autores é o trato dos conceitos matemáticos. Entretanto, é nítido que a ausência de conexão com situações reais, possibilitada pela Educação Financeira, gera um empobrecimento nas propostas de aulas. Para que a investigação seja bem-sucedida, é necessário engajamento dos alunos. Este, por sua vez, costuma ser facilmente encontrado entre os estudantes que já apreciam o saber matemático. Entretanto, na maioria dos casos, é necessário buscar os interesses pessoais de cada indivíduo e explorá-los nas aulas. Sendo assim, a Educação Financeira que perpassa qualquer planejamento financeiro (aquisição de imóvel, veículos, empréstimo etc.) se constitui como elemento fundamental para o sucesso de uma aula investigativa.

Barros (2012) cita Educação Financeira em momentos que relata os problemas oriundos da má gestão financeira das pessoas, como endividamento ou ausência de consumo consciente. Seu trabalho de conclusão de curso tem o foco no ensino dos conceitos matemáticos, retratando as atividades desenvolvidas que buscam explorar os conceitos da Matemática Financeira.

Referências

- [1] BARROS, T. S. **Educação Financeira**: uma possibilidade de ensino a partir dos cenários para investigação. UNESP, Guaratinguetá, 2012

- [2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- [3] FRANZONI, P., QUARTIERI, M. T. Tarefas Investigativas Relacionada à Educação Financeira: possibilidades de conjecturas e estratégias de resolução. **Revista Ciência & Educação**, São Paulo: Bauru, v. 26, e20057, 2020.
- [4] CUNHA, C. L. da, LAUDARES, J. B. Promover a Educação Financeira Enfocando Conceitos a Cálculos da Matemática Financeira. **Anais Eletrônicos XIII Encontro Nacional De Educação Matemática**. Mato Grosso: Cuiabá, 2019.
- [5] ORGANIZAÇÃO DE COOPERAÇÃO E DE DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO (OCDE). **Recommendation on principles and good practices for financial education and awareness**. 2005.
- [6] PONTE, J. P., BROCARD, J., OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- [7] SCOLARI, L. C., GRANDI, N. I. Educação financeira: uma proposta desenvolvida no ensino fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.18, n.2, p. 671-695, 2016.
- [8] PUCCINI, E. C. **Matemática financeira e análise de investimentos**. Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração / UFSC; Brasília: CAPES : UAB, 2011.