

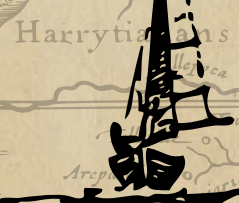
M A R D E L



ANNAIS DA XIII MOSTRA IC

PET Matemática

IME LACVS



Arowaccas pop.

THOMPSON'S

LAND

A publicação Anais da Mostra IC tem periodicidade anual. Cada edição é publicada após a realização do evento que, em geral, ocorre entre os meses de maio e julho. Para este, são aceitos artigos apenas na língua portuguesa.

COMISSÃO ORGANIZADORA

PET Matemática UFU - Campus Santa Mônica

PETIANOS E PETIANAS

Amanda Florentino de Araujo
Andréia Silva Figueredo
Carolina Silva Alves
Elmira Rosa Silva de Melo
Enrique Barbosa Oliveira
Fernando Henrique Vital Filho
Gabriel Melo Gomes Pereira
Inaya Faria Nomura
Joangelo Marins Alves
Kaic Porfírio Almeida
Lorena Bezerra de Almeida
Robert Vieira de Araújo
Thamires Sartori Pereira

TUTOR

Marcus Augusto Bronzi

COMITÊ CIENTÍFICO

Dylene Agda Souza de Barros (Matemática Pura)
Fabiana Fiorezi de Marco Matos (Educação Matemática)
Germano Abud de Rezende (Matemática Aplicada)
Rogério de Melo Costa Pinto (Estatística)

Copyright©2024. Todos os direitos reservados aos autores e autoras e ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia. Qualquer parte desta publicação pode ser reproduzida, desde que atribuídos os devidos créditos de autoria.

Essa obra é pública e gratuita, não sendo permitida nenhuma forma de alteração ou a sua utilização para fins comerciais. Os conteúdos das partes são de responsabilidade dos seus autores.

Sumário

Perfil dos vacinados contra a Covid-19 em Uberlândia	6
<i>Ana Manuela Miranda Araujo Neves, Yan Vitor de Almeida Dantas, Vânia de Fátima Lemes de Miranda</i>	
Sistema Monetário e a Síndrome de Down: um breve relato de experiência	12
<i>Carolina Silva Alves, Ana Claudia Molina Zaquieu Xavier</i>	
Teoria Fuzzy: Introdução aos conceitos de Alfa Nível (α-nível) e Número Fuzzy	18
<i>Cássio Resende Jascoski, Ana Paula Tremura Galves, Fellipe Viana Resende, Otávio Daniel Dias dos Santos</i>	
Uso de Transformações Lineares na Computação Gráfica usando o GeoGebra	24
<i>Clésio Rodrigues da Silva Júnior, Vânia de Fátima Lemes de Miranda, Giselle Moraes Resende Pereira, Eduardo dos Santos Rocha, Luis Florial Espinoza Sánchez, Danilo Elias de Oliveira</i>	
Método de Diferenças Finitas para o Problema Auto-adjunto geral	31
<i>Edinilson Ferreira Vilela, Santos Alberto Enriquez Remigio</i>	
Algoritmos de Aprendizado de Máquina no Diagnóstico de Doenças Cardiovasculares	37
<i>Eduardo dos Santos Rocha, Vânia de Fatima Lemes de Miranda, Fernanda Maria Cunha Santos, Clésio Rodrigues da Silva Júnior</i>	
Em Busca dos Extremos: Uma Exploração dos Conceitos de Supremo e Ínfimo	44
<i>Elmira Rosa Silva de Melo, Elisa Regina dos Santos</i>	
Conjuntos de Julia e de Mandelbrot para a família $P_{d,c}(z) = z^d + c$	50
<i>Euler Borges Ferreira Filho, Jean Venato Santos</i>	
Sistema Baseado em Regras Fuzzy para Avaliação de Risco de Acidentes	56
<i>Fellipe Viana Resende, Ana Paula Tremura Galves, Cássio Resende Jascoski, Otávio Daniel Dias dos Santos</i>	
Introdução aos Métodos Iterativos para Zeros de Funções Reais	62
<i>Fernanda de Carvalho Pinto, Germano Abud de Rezende</i>	
Uma introdução à Teoria de Códigos	68
<i>Gabriel Henrique de Oliveira, Cícero Carvalho</i>	
Cálculo do maior autovalor de uma matriz pelo método da potência	74

Gabriel Melo Gomes Pereira, Santos Alberto Enriquez Remigio

Determinação do Polinômio Característico de uma Matriz usando o Traço das Potências da Matriz	80
<i>Gabriel Melo Gomes Pereira, Santos Alberto Enriquez Remigio</i>	
O uso de dashboards em análise exploratória de dados	86
<i>Gabriel Moreira Bomfim Santos de Freitas, Patrícia Viana da Silva</i>	
A Equação do Calor	92
<i>Gabriel Pereira Galhardo, Luciana Aparecida Alves</i>	
Uma abordagem de Caos e a Aplicação Shift	99
<i>Geraldo Rodrigues de Melo Neto, Catiana Casonatto</i>	
Desvendando a Geometria dos Números Complexos	105
<i>Giovanna Soares Vieira, Ana Carla Piantella</i>	
Condição Necessária e Suficiente para uma Função ser Analítica	111
<i>João Otávio Mazetti de Araújo, Catiana Casonatto</i>	
Teorema de Recorrência de Poincaré	117
<i>Lizandro Valentim Zapelini Billig, Túlio Vales Deslandes Ferreira</i>	
Explorando a Unicidade dos Limites de Sequências	123
<i>Lorena Bezerra de Almeida, Elisa Regina dos Santos</i>	
A independência do ponto base no grupo fundamental de um espaço topológico	129
<i>Mateus Fernando Araújo Silva, Francielle Rodrigues de Castro Coelho</i>	
Introdução aos Conjuntos Fuzzy: Uma Abordagem Prática	135
<i>Otávio Daniel Dias dos Santos, Ana Paula Tremura Galves, Cássio Resende Jascoski, Felipe Viana Resende</i>	
Estatística em cores: Quantização a partir de métodos de agrupamento	140
<i>Pedro de Araujo Ribeiro, Pedro Franklin Cardoso Silva</i>	
Impacto da Pandemia: Investigando Mudanças dos Valores e Volumes de Venda Dos Carros Mais Vendidos	146
<i>Rhuan Flores Cunha Fernandes, Vânia de Fatima Lemes de Miranda, Jair Rocha do Prado</i>	
Irrracionalidade de e Através de Frações Contínuas	152
<i>Robert Vieira de Araujo, Victor Gonzalo Lopez Neumann</i>	
Grupos Solúveis	158
<i>Rodrigo Carneiro, Victor Gonzalo Lopez Neumann</i>	
Explorando o desenvolvimento do conceito de Volume em uma perspectiva Lógico-Histórica	164
<i>Tamiris Teixeira de Carvalho, Ana Cláudia Molina Zaqueu Xavier</i>	

Ações de Grupos e Espaços Homogêneos **169**
Theo Marques Rodrigues Teófilo, Luciana Aparecida Alves



Perfil dos vacinados contra a Covid-19 em Uberlândia

Ana Manuela Miranda Araujo Neves

EEFEP, Escola Estadual Frei Egídio Parisi Ens. fund. e Médio, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
anamanuneves@gmail.com

Yan Vitor de Almeida Dantas

UNIESSA, Odontologia, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
almeida.yanvitor@gmail.com

Vânia de Fátima Lemes de Miranda

UFU, FAMAT, Monte Carmelo, MG, Brasil
vaniaflm@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Vacina Covid-19.
Estatística Descritiva.
Software R.

A difusão de graves doenças vem afetando a humanidade de diferentes maneiras ao longo de sua História. Neste começo de século, a pandemia da Covid-19 foi marcada por atitudes de negligência social fruto da desinformação anticientífica ou de necessidades extremas de trabalhar. Protocolos de segurança não foram seguidos à risca, colocando em perigo a saúde coletiva. Devido isso, a vacinação tornou-se urgente, sendo o meio mais eficiente para controlar o vírus da Covid-19. Este artigo procurou identificar e expor o perfil vacinal da região do triângulo mineiro, utilizando a base de dados da Secretaria Estadual de Saúde, utilizando a estatística descritiva com o auxílio do *Software* livre R. Concluímos que a maioria dos vacinados foram mulheres, brancas, na faixa dos 40 a 50 anos e sendo o maior índice de vacinação na primeira dose.

1 Introdução

Ao longo de toda a história da sociedade fomos assolados por epidemias ao redor do globo, como a gripe espanhola, que foi por longos anos considerada a pior pandemia dos tempos antes de 31 de dezembro de 2019 quando a Organização Mundial de Saúde (OMS) foi alertada sobre casos de SARS-COV em Wuhan na China, que desencadeou no decorrer de cinco anos cerca de 20 milhões de mortos segundo a OMS [4].

O período de quarentena exigiu uma colaboração de todo o corpo social, governos, cidadãos e profissionais da saúde para que a doença não se proliferasse, mas devido a necessidade de buscar sustento para a família, ou negligência para com a saúde coletiva, presenciamos uma grande disseminação do vírus mesmo com as medidas tomadas. Segundo [3] “Foram notificados 623.310 casos de internação derivados a Covid-19, no Brasil em 2020, no ano seguinte, esses casos tiveram um aumento de 16,7% e 73,6% das hospitalizações de Síndrome Respiratória aguda foram devidas a Covid-19.”

Assim que foi decretado a pandemia mundial, já era de urgência o desenvolvimento da vacina, iniciando uma corrida contra o tempo, diversos laboratórios ao redor do mundo começaram a desenvolvê-la, visto que a vacina é o único meio de prevenir as contaminações, como nos mostra o Instituto Butantan [6]. "Apesar de nenhuma vacina ser 100% eficaz, hoje a imunização é essencial para prevenir óbitos, casos graves da Covid-19 e para conter a pandemia". No Brasil as primeiras vacinas autorizadas pelo Programa Nacional de Vacinação foram a CoronaVac, AstraZeneca e Pfizer, a vacinação foi dividida por grupos, selecionados por prioridades que englobavam mais de 77,2 milhões de brasileiros segundo o Governo Federal [5].

Portanto, temos como objetivo identificar e expor o perfil vacinal da população local de Uberlândia, através das variáveis cor/raça, gênero, vacinas, idade e dose da vacina.

2 Metodologia

Foram analisados os dados sobre vacinação obtidos através do banco de dados da Secretaria do Estado de Saúde de Minas Gerais [7], por meio da estatística descritiva, elaborando gráficos, tabelas, obtendo as medidas de tendência central como média, mediana e as medidas de variação como variância e desvio padrão. Para essa análise foi utilizado o *Software R* [8].

Este estudo tem como base a abordagem de pesquisa descritiva, que, de acordo com [2], tem como finalidade analisar aspectos mais profundos em relação a determinado fato ou objeto, gerando análises mais específicas sobre certas atitudes, investigações e tendências de comportamento.

O conjunto de dados contém 34359 observações de 32 variáveis, destas foram consideradas 5, desprezando as que traziam mesmo sentido ou que não agregaria ao presente artigo. Analisando assim, as variáveis idade, gênero, raça/cor, vacinados e doses da vacina tomada. Foi feito também um estudo e comparação do material obtido com outros artigos, visto que esse artigo é uma amostra da população brasileira e sua situação na vacinação.

3 Resultados e Discussão

Após a análise descritiva dos dados obtidos através do site do Governo de Minas sobre o Coronavírus [7], tendo como objetivo expor os dados vacinais da região do triângulo mineiro, próximo a cidade de Uberlândia, considerando uma amostra de 34359 indivíduos, observou-se que a idade média das pessoas vacinada foi de 44,44 anos, com desvio padrão 18,86 e ainda, cerca de 54% dos vacinados são do sexo feminino e 46% masculino, resultado semelhante encontrado por DAGA, 2022 [1]. A dose mais vacinada foi a primeira dose, já a vacina mais tomada foi a Pfizer 45,19%, seguida da AstraZeneca 29,27%.

No Gráfico 1 é apresentado a relação de pessoas vacinadas de acordo com a sua raça.

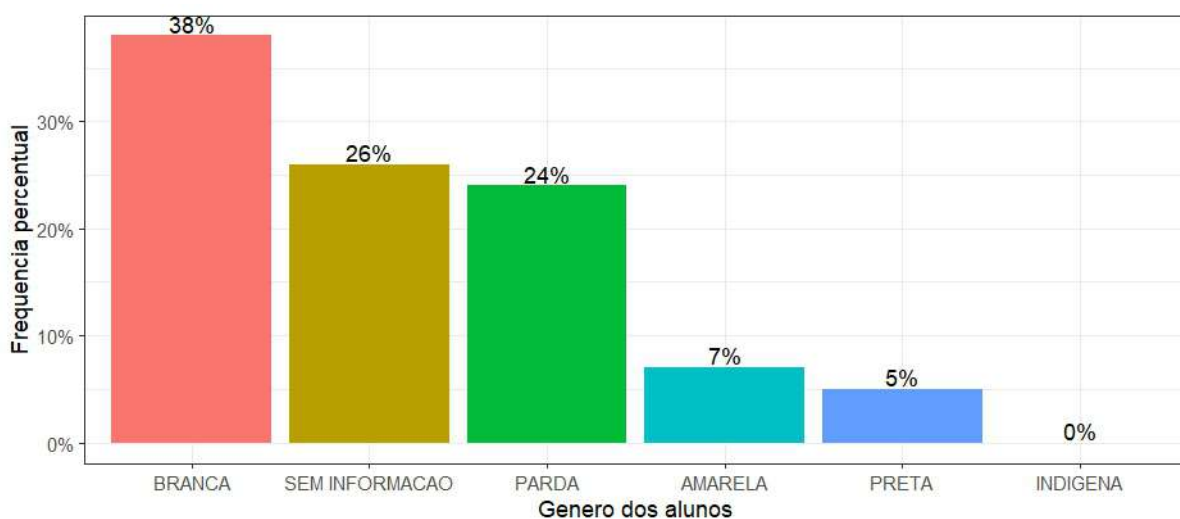


Figura 1: Pessoas vacinadas de acordo com a raça

Para a variável raça apresentada na Figura 1, observa-se que raça branca corresponde a 38% do total de pessoas vacinadas de ambas os gênero, pessoas que não fizeram declaração de raça/cor foi de 26%, já os indígenas foram apenas 0,01% das pessoas vacinadas.

Na figura 2 abaixo apresenta a relação entre o gênero e a raça/cor das pessoas vacinadas.

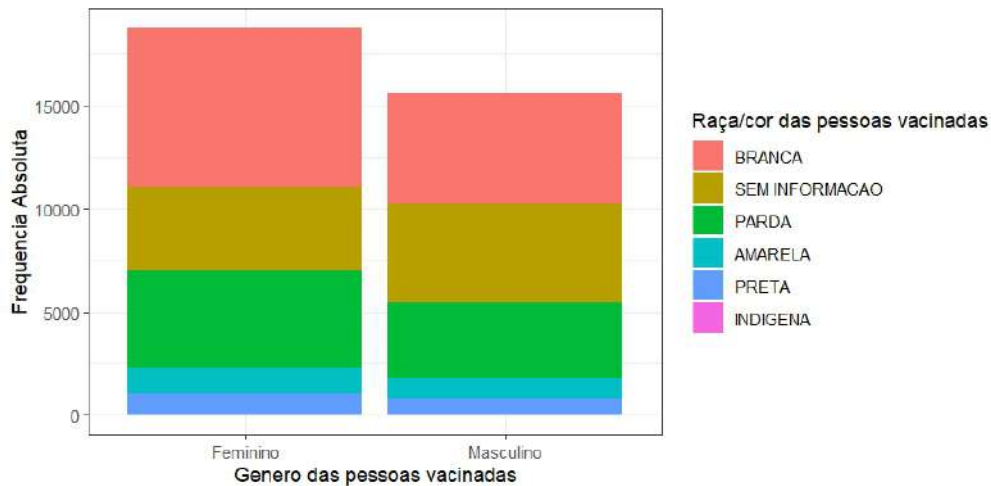


Figura 2: Gráfico em barras empilhadas para apresentar a Raça/Cor das pessoas vacinadas em relação o gênero.

Quanto as variáveis gênero e raça/cor (figura 2) é notório que houve maior vacinação entre as mulheres do que entre os homens, observando em relação de raça/cor fica evidente a discrepância entre os números, sendo branca aproximadamente 37,89% dos vacinados, parda 24,30%, amarela 6,56%, preta 5,41%, indígena 0,01% e 25,83% não tendo se identificado a nenhuma raça/cor.

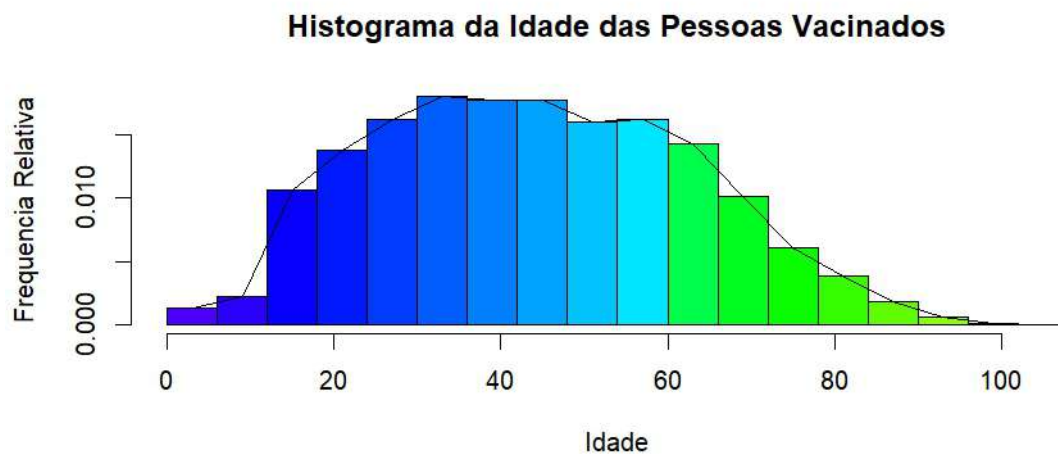


Figura 3: Histograma das idades das pessoas vacinadas.

No quesito idade da população vacinada, pode-se observar na figura 3 que houve um maior índice de vacinação entre 30 e 50 anos, com aproximadamente 32%, sendo seguido pelos 60 anos com aproximadamente 20%, que foi um dos grupos prioritários da vacinação, os jovens entre 18 e 25 anos sendo 18% e tendo uma baixa nas crianças menores de 6 anos sendo apenas 7% que também eram parte do grupo preferencial de vacinação.

Com relação a faixa etária e ao gênero dos vacinados, apresentados na figura 4, observa-se que não

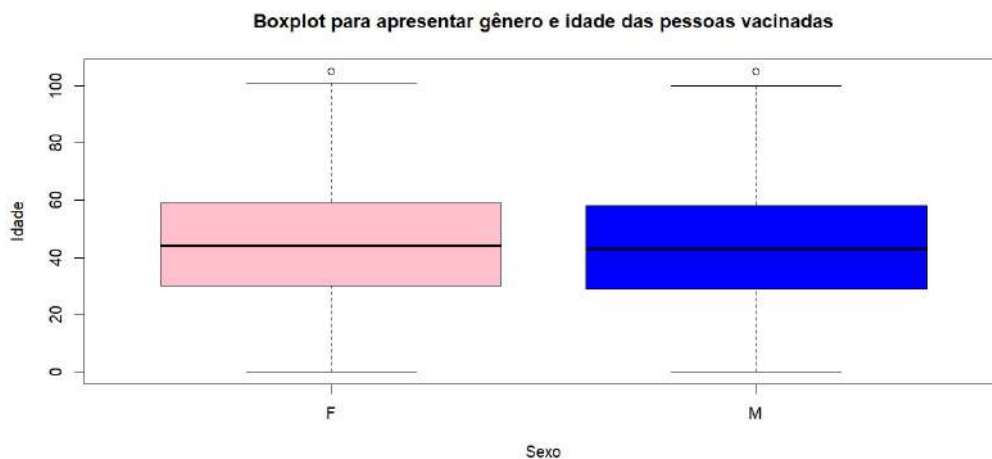


Figura 4: Boxplot das idades com relação ao gênero das pessoas vacinadas.

houve uma diferença significativa entre as idades comparadas ao gênero dos vacinados, sendo a idade média de 44 anos, a maioria dos vacinados com idade entre 30 e 60 anos, sendo a menor idade de 0 anos e a máxima de 105 anos.

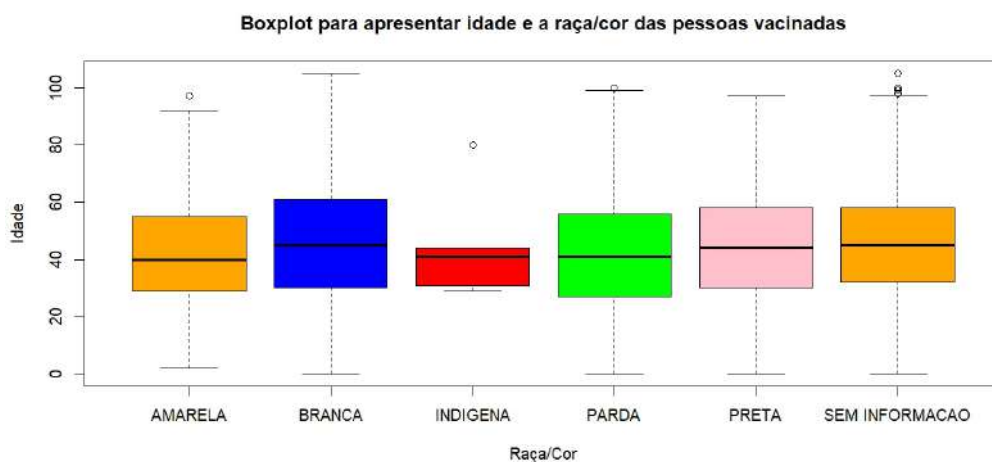


Figura 5: Boxplot das idades com relação Raça/Cor das pessoas vacinadas.

Na figura 5 é apresentada a relação raça/cor e idade, sendo percebido que branca foi mais vacinada em todas as idades correspondendo a 38% dos vacinados, sendo seguida da parda, amarela, preta e indígena respectivamente, enquanto temos um alto valor de pessoas que não se declararam de nenhuma raça/cor.

4 Considerações finais

Este estudo mostrou maior primazia feminina na vacinação da região de Uberlândia sendo 54%, entre as idades 30 e 60 anos, sendo seguido pelos jovens, adultos e idosos. Analisando o artigo

[1] e comparando a outros de mesmo caráter realizados em outras regiões do Brasil, foi observado compatibilidade entre os resultados, mostrando que este estudo, não diverge da realidade das demais regiões.

Agradecimentos

Agradecemos a Universidade Federal de Uberlândia e ao CNPq pela oportunidade de expandir nossos horizontes e nos fornecer novas oportunidades, através da iniciação científica na FAMAT, estatística, e pela fomentação. Agradecemos o apoio e as orientações da Professora Doutora Vânia de Fátima Lemes de Miranda.

Referências

- [1] DAGA, Danielle et al. Perfil vacinal para a COVID-19 no município de Jaraguá do Sul, Santa Catarina. *Research, Society and Development*, v. 11, n. 15, p. e294111537374-e294111537374, 2022.
- [2] MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. *Metodologia do trabalho científico: procedimentos básicos, pesquisa bibliográfica, projeto e relatório, publicações e trabalhos científicos*. 7. ed. 6.reimpr. São Paulo: Atlas, 2011.
- [3] RENCK, Emanuelle et al. Efetividade vacinal na prevenção de óbitos em pessoas com síndrome respiratória aguda grave por covid-19 em Blumenau, 2021. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, v. 33, p. e2023214, 2024.
- [4] SCHULZ, A. et al. Impacto da pandemia (covid-19) na valorização de carros novos e seminovos no período compreendido entre 2020 a 2022. *Revista Interdisciplinar da FARESE*, v. 4, jan. 2023. Disponível em: <<https://revista.grupofaveni.com.br/index.php/revistainterdisciplinardafarese/article/view/930>>. Acesso em: 1 abr. 2024.
- [5] Ministério da Saúde. Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/noticias/2021/janeiro/entenda-a-ordem-de-vacinacao-contr-a-covid-19-entre-os-grupos-prioritarios>. Acesso em: 01 de abril de 2024.
- [6] Portal do Butantan. Disponível em: <https://butantan.gov.br/covid/butantan-tira-duvida/tira-duvida-noticias/quais-sao-as-diferencas-entre-as-vacinas-contr-a-covid-19-que-estao-sendo-aplicadas-no-brasil>. Acesso em: 01 de abril de 2024.
- [7] Secretaria do Estado de Saúde de Minas Gerais. Disponível em: <https://sescloud.saude.mg.gov.br/index.php/s/ZEzzC8jFpobXGjM?path=%2FVACINAS>. Acesso em 16 setembro de 2023.
- [8] R Core Team (2023). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <<https://www.R-project.org/>>.



Sistema Monetário e a Síndrome de Down: Um Breve Relato de Experiência

Carolina Silva Alves

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

carolina.silvaalves@ufu.br

Ana Claudia Molina Zaqueu Xavier

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

ana.zaqueu@ufu.br

Resumo

O presente trabalho faz jus a um breve relato de experiência que tem como objetivo apresentar a elaboração e o desenvolvimento de uma proposta de ensino em uma aula de Matemática para uma aluna com Síndrome de Down. Tal proposta é uma das ações de uma pesquisa de Iniciação Científica que se faz necessária para entender quais são as práticas adotadas pelos professores em sala, como vem sendo o aprendizado de alunos com a Síndrome e como estes se estabelecem no meio escolar. Ao final desta ação empreendida em sala de aula e apresentada neste texto, tivemos como resultado um meio para se fazer conexões entre a Matemática e o mundo real para o estudante.

Palavras-chave

Educação Matemática.

Educação Especial.

Síndrome de Down .

1 Introdução

Em virtude das dificuldades que professores (de Matemática) retratam em relação ao desenvolvimento de suas aulas para alunos, em especial, com necessidades educacionais especializadas, a primeira autora, com a orientação da segunda, decidiram por realizar uma pesquisa de Iniciação Científica por meio do Programa de Educação Tutorial (PET).

Tal projeto de Iniciação Científica tem como um de seus objetivos entender como as aulas de Matemática têm sido ministradas para alunos com Síndrome de Down e, posteriormente, desenvolver uma sequência didática que visa, de fato, a inclusão. Para que tal meta seja atingida, vem sendo necessária algumas ações em sala de aula, sendo que, uma delas, será apresentada neste breve relato de experiência, o qual, assim, tem por objetivo apresentar a elaboração e o desenvolvimento de uma proposta de ensino em uma aula de Matemática para uma aluna com Síndrome de Down.

2 Contextualização

De acordo com Barbosa (2020), as questões relacionadas as interações afetivas entre professor e alunos são de extrema importância para que se obtenha o êxito na escola. Nessa direção, em um primeiro momento, objetivamos conhecer a aluna que acompanharíamos durante algumas aulas e, com isso, entender seus gostos, reconhecer momentos de agitação e incômodo, identificar sinais físicos etc. Tais observações, além do acompanhamento em sala de aula, puderam ser pontuadas e dialogadas graças à parceria estabelecida com a profissional de Atendimento de Educação Especializado (AEE)¹ que a acompanhava na escola.

A profissional que realizava o atendimento relatou alguns hábitos da estudante e o que eles indicavam, tais como, ao se deparar com comandos poucos concisos que a causasse algum nível de ansiedade, ela mordida o dedo mínimo direito ou, quando a fala do professor estava embaraçosa, ela tentava mudar rapidamente de assunto. Esse nível de conhecimento do aluno foi importante para que, durante a execução da proposta, conseguíssemos ter indícios de que a aluna estava compreendendo as questões que lhe fossem colocadas ou não.

¹ Visando o acesso, a participação e o aprendizado de alunos com deficiências e transtornos globais do desenvolvimento, é garantido, por lei, um profissional que os acompanhem em suas rotinas escolares (Secretaria de Educação do Estado de Minas Gerais, s.d).

Assim, após o acompanhamento de algumas aulas e da familiarização da aluna, começamos a pesquisar quais assuntos poderíamos trabalhar. Foi decidido que trabalharíamos com ações envolvendo uma introdução do sistema monetário, uma vez que a aluna não conhecia e era algo que estava no planejamento da profissional do AEE.

3 Elaboração e Execução da Proposta Didática

Ao prezar por propostas que chamassem à atenção da aluna, e atentas ao que Domingos e Gobbi (2007) defendem ao dizer que existem três aspectos que embasam o uso de jogos em sala de aula, isto é, o caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e as relações sociais, optamos por elaborar um jogo de tabuleiro cujo objetivo ia ao encontro de ações que fazem parte do cotidiano da aluna, no caso, o balé.

Aqui, esclarecemos que a atividade foi realizada separadamente tendo em vista que ainda estávamos em um processo de aproximação com a estudante, mas que defendemos uma Educação Matemática na perspectiva inclusiva. De acordo com Uchôa et al., (2022), tal educação visa a valorização das potencialidades de todos os indivíduos, trabalhando, ainda, em conjunto.

Assim, nos acompanhamentos semanais, a aluna relatava o gosto pela dança e suas apresentações de balé e, por isso, em nossa “Trilha Financeira”, na medida em que a aluna avançava no tabuleiro, ao cair em uma casa de atividades, ela se sentia mais interessada em as realizar para que pudesse receber o dinheiro e, com ele, comprar peças de roupa para sua bailarina em uma lojinha fictícia que criamos.

3.1 Apresentando o Tabuleiro

O tabuleiro foi construído em um papel cartão, de tamanho semelhante ao de uma cartolina e foi todo desenhado à mão, contendo casas vermelhas, que significava a “perda” de R\$1,00; casas verdes, onde o jogador ganhava R\$1,00; e casas laranjas, onde se escolhia uma ficha de exercícios para resolver e ganhar uma quantia de dinheiro determinada na própria ficha. Utilizamos também moedas verdadeiras de R\$1,00 e notas de brinquedo de R\$2,00, R\$5,00, R\$10,00 e R\$20,00. O dinheiro conquistado foi usado para comprar roupas de balé para a bailarina que a aluna colaria no caderno após o término do jogo.

3.2 Objetivos Pedagógicos

Dentre nossos objetivos pedagógicos para o uso do jogo, podemos afirmar que queríamos que ela conhecesse as cédulas e entendesse a finalidade das mesmas: adquirir/comprar itens. Como um objetivo secundário, gostaríamos ainda que ela fizesse composições com essas cédulas, isto é, se uma meia-calça que ela desejasse comprar custava R\$7,00, então ela poderia utilizar uma nota de R\$5,00 e outra de R\$2,00.

Também era de nosso desejo que a aluna entendesse o conceito de troco e que pudesse, por conta própria, calcular os valores a serem recebidos ou repassados.

3.3 Desenvolvimento da Proposta

Em razão da elaboração de um plano de aula exclusivo para a aluna, pedimos a autorização do professor regente para que pudéssemos realizar a proposta na biblioteca, para que fosse possível manter um diálogo sem interromper ou sermos interrompidos.

Antes de iniciarmos do jogo, pedimos para que a aluna reconhecesse a necessidade de adquirir produtos, por exemplo, ao desejar comer uma pizza ou tomar refrigerante, precisamos fazer um pedido à loja e que nos é servido logo após o pagamento. Com uma breve introdução, percebemos que, embora ela não conhecesse o nosso sistema monetário, sabia um pouco sobre a ação de comprar.

Após tal reflexão por parte da aluna, mostramos as cédulas e moedas, e indicamos que usaríamos notas de brinquedo e moedas verdadeiras. Foi apresentado, como curiosidade, uma nota verdadeira para que ela pudesse comparar e diferenciar as notas. Em seguida, foi apresentado o jogo, suas regras e objetivos.

Com o desenvolvimento do jogo, percebemos que a aluna passou a compreender a relação de compra, isto é, sempre que ela desejava certo item, realizava composições com as cédulas, como por exemplo, para comprar uma peça de roupa de R\$7,00, ela conseguia perceber que poderia usar uma nota de R\$5,00 e uma de R\$2,00.

4 Considerações finais

Como mencionado anteriormente, as ações desenvolvidas no jogo só foram possíveis por conhecer a aluna, já que foi possível reconhecer quando a aluna não compreendia ações do

jogo ou como manipular dinheiro apenas com suas respostas corporais, podendo intervir imediatamente.

Além disso, consideramos que foi fundamental entender quais eram os limites em termos de conteúdos matemáticos e quais questões poderíamos desenvolver melhor. Uma situação que esclarece bem tal afirmação é que a aluna possuía dificuldades com números maiores do que 20 e não conhecia ainda números decimais, então nossos valores na “lojinha” eram todos inteiros e menores que vinte. Pudemos ainda trabalhar melhor o significado de soma e subtração, que antes estava sendo realizado por mecanização.

Por fim, podemos observar que a aluna mostrava certa naturalidade com o tratamento de dinheiro, e que nosso objetivo de que ela obtivesse consciência do uso do mesmo e que poderia formar diferentes quantias através da combinação de cédulas e moedas foi alcançado.

Ainda, podemos concluir que a aluna relacionou a operação de subtração à uma necessidade real: o troco. Ao cair numa casa que ganhava R\$1,00, a aluna, ao ouvir a frase “não consigo te pagar um real, pois só tenho uma nota e R\$2,00 e não posso te dar a mais”, ela propôs devolver R\$1,00.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

Referências

- [1] BARBOSA, E. S. Afetividade no processo de aprendizagem. **Revista Educação Pública**, v. 20, nº 41, 27 de outubro de 2020
- [2] DOMINGOS, G. A.; GOBBI, B. C. **Dificuldades do processo de aprendizagem**. Monografia, Escola Superior Aberta do Brasil, 2007. Disponível em: <https://www.psicologia.pt/artigos/textos/TL0126.pdf>. Acesso em março de 2024.
- [3] SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE MINAS GERAIS. (s.d). **A Educação Especial na Prespectiva Inclusiva**. ACS – SEE/MG

- [4] UCHÔA, M. M. R; CHACON, J. A. V. Educação Inclusiva e Educação Especial na perspectiva inclusiva: repensando uma Educação Outra. **Revista Educação Especial**, v. 35, n. 46, p. 1–18, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.5902/1984686X69277>. Acesso em maio de 2024.



Teoria Fuzzy: Introdução aos conceitos de Alfa Nível (α -nível) e Número Fuzzy

Cássio Resende Jascoski

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica - FEMEC
cassio200015@gmail.com

Ana Paula Tremura Galves

Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística - IME
ana.galves@ufu.br

Fellipe Viana Resende

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica - FEMEC
fellipe.resende@ufu.br

Otávio Daniel Dias dos Santos

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica - FEMEC
otavio.dias@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Número Fuzzy.
Função de Pertinência.
Alfa Nível (α -nível).

A Teoria Fuzzy é uma teoria recente na matemática que subverteu a lógica tradicional ao abandonar a ideia rígida de verdadeiro ou falso e admitir graus de pertinência dos elementos de um universo aos conjuntos imagem de funções de pertinência. Nela, amplia-se o conjunto contradomínio clássico da matemática $\{0, 1\}$ para o intervalo $[0, 1]$. Dessa forma, há uma mudança na operacionalização de problemas que envolvem variáveis heterogêneas e, para ser eficaz no tratamento de tais problemas, valendo-se de sua nova lógica, a Teoria Fuzzy traz novos conceitos para formar sua base. Dentre eles, estão os objetos tema deste trabalho: os conceitos de Alfa Nível (α -nível), que diz respeito ao grau de pertencimento de um elemento do universo analisado ao conjunto contradomínio, e de Número Fuzzy, que é uma extensão do número real tradicional, não se tratando de um único valor, mas, sim, de um conjunto conectado de valores possíveis que variam entre 0 e 1.

1 Introdução

A Teoria Fuzzy, desenvolvida por Lotfi A. Zadeh, introduz uma abordagem flexível da lógica que é capaz de lidar com imprecisões, contrastando com a lógica clássica que é estritamente binária. Em vez de apenas verdadeiro ou falso, a lógica fuzzy permite graus variáveis de pertinência entre 0 e 1, oferecendo uma representação mais precisa das incertezas presentes em muitos problemas do mundo real.

Nas modelagens matemáticas tradicionais, as funções clássicas têm uma lógica binária, enquanto na Teoria Fuzzy as funções de pertinência atribuem graus variáveis de pertinência. Isso permite uma representação mais detalhada das variáveis e acomoda a incerteza de maneira mais precisa.

Por exemplo, ao modelar o risco de deslizamento de uma encosta, a Teoria Fuzzy considera não apenas a presença ou ausência de chuva, mas também sua intensidade, bem como outros fatores como qualidade do solo e quantidade de vegetação. Cada variável é tratada com conjuntos fuzzy, e seus resultados são combinados para fornecer uma avaliação do risco de deslizamento.

Essa abordagem flexível e precisa torna a Teoria Fuzzy uma ferramenta poderosa na modelagem de problemas do mundo real. Dominar conceitos fundamentais, como conjuntos fuzzy, α -níveis e números fuzzy, é essencial para compreender profundamente essa teoria. Este resumo tem como objetivo introduzir e discutir esses conceitos, mas para uma compreensão mais detalhada, recomenda-se a consulta a fontes adicionais, como a referência [1].

2 Noções preliminares em Teoria Fuzzy

2.1 Conjuntos Fuzzy

Definição 2.1. Um conjunto fuzzy A de um universo U é definido em termos de uma função de pertinência u_A que a cada elemento x de U associa um número $u_A(x)$ entre zero e um, o qual denomina-se grau de pertinência de x a A , ou seja, $u_A : U \rightarrow [0, 1]$.

Os valores $u_A(x) = 1$ e $u_A(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência plena e a não pertinência do elemento x ao conjunto A . Além disso, um conjunto fuzzy pode ser identificado por um conjunto clássico de pares ordenados $G = \{(x, u_A(x)) \mid x \in U\}$, o qual representa o gráfico da função de pertinência.

Do ponto de vista formal, a definição de conjunto fuzzy foi obtida ao simplesmente ampliar o contradomínio da função característica, que é o conjunto $\{0, 1\}$, para o intervalo $[0, 1]$.

2.2 Níveis de um Conjunto Fuzzy

Os níveis de um conjunto fuzzy referem-se ao grau de pertencimento dos elementos do domínio da função ao intervalo $[0, 1]$ do contradomínio, sendo formalmente denominados α -nível.

Definição 2.2. *Sejam A um conjunto fuzzy e $\alpha \in (0, 1]$. Define-se como α -nível de A o conjunto $[A]^\alpha = \{x \in U \mid u_A(x) \geq \alpha\}$.*

Definição 2.3. *Suporte de um conjunto fuzzy A são todos os elementos de U que têm grau de pertinência diferente de zero em A , denotado por $\text{supp}(A)$, ou seja, $\text{supp}(A) = \{x \in U \mid u_A(x) > 0\}$.*

Assim, o nível zero de um conjunto fuzzy A é definido como o fecho topológico do suporte de A , isto é, $[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}$.

Exemplo 2.4. *Considere $U = [0, 10]$ e o conjunto fuzzy A , cuja função de pertinência é $u_A(x) = \frac{x}{x+1}$, que é um ramo de hipérbole (veja Figura 1).*

Neste caso, os limites inferior e superior de x são, respectivamente, 0 e 10. Igualando-se $\frac{x}{x+1}$ a α e isolando x , obtemos uma equação geral em função de α que fornece o intervalo em x associado a um α escolhido:

$$\frac{x}{x+1} = \alpha \Rightarrow x = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Considerando que os limites para x são 0 e 10, podemos transformar a equação em inequação para obter os limites de α , substituindo x pelos seus valores limites. Assim:

$$0 \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha \geq 0 \quad e \quad \frac{\alpha}{1-\alpha} \leq 10 \Rightarrow \alpha \leq \frac{10}{11}.$$

Portanto, $0 \leq \alpha \leq \frac{10}{11}$.

Com isso, temos que

- *os α -níveis do conjunto fuzzy são:*

$$[A]^\alpha = \left[\frac{\alpha}{1-\alpha}, 10 \right], \text{ para } 0 \leq \alpha \leq \frac{10}{11};$$

$$[A]^\alpha = \emptyset, \text{ para } \frac{10}{11} < \alpha \leq 1;$$

- *o suporte do conjunto fuzzy A é $\text{supp}(A) = [0, 10] = U$;*
- *o nível zero do conjunto fuzzy A é $[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)} = \text{supp}(A) = U$.*

3 Números Fuzzy

Os números Fuzzy são uma extensão dos números tradicionais que lidam com incerteza e imprecisão. Eles são úteis em situações onde a precisão exata não é possível ou prática. Existem diversos tipos de números fuzzy, cada um com suas características específicas. A seguir, são apresentadas definições de número fuzzy e dos três principais tipos utilizados na literatura, acompanhados de breves exemplos de aplicação para cada um.

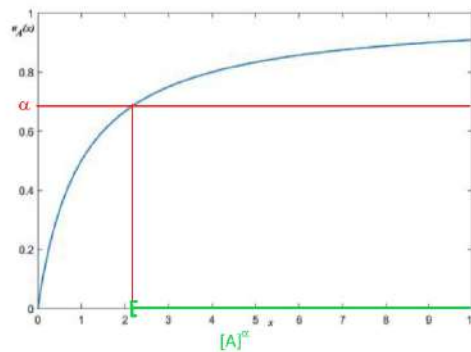


Figura 1: Em vermelho, um α escolhido aleatoriamente entre 0 e 1. Em verde, temos uma representação de um α -nível: $[A]^\alpha$. Em azul, temos o gráfico da função de pertinência do conjunto fuzzy A .

Definição 3.1. Um conjunto fuzzy N é chamado número fuzzy quando o conjunto universo, em que N está definido, é o conjunto dos números reais \mathbb{R} e a função de pertinência $u_N : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é tal que:

1. $u_N(x) = 1$ para pelo menos um valor x do $\text{supp}(N)$;
2. $[N]^\alpha$ é um intervalo fechado, $\forall \alpha \in (0, 1]$;
3. o suporte de N é limitado.

Observa-se que, com a definição anterior, todo número real r é um caso particular de número fuzzy, cuja função de pertinência é sua função característica.

Os números fuzzy frequentemente utilizados na modelagem matemática possuem funções de pertinência que assumem formatos triangulares, trapezoidais ou em sino. As imagens utilizadas nas subseções a seguir foram extraídas de [1], páginas 17, 18 e 19.

3.1 Números Fuzzy Triangulares

Os números fuzzy triangulares são caracterizados por uma função de pertinência triangular, onde a incerteza é distribuída de forma uniforme entre um valor mínimo, um valor máximo e um valor modal.

Exemplo de aplicação: Suponha que estejamos controlando a velocidade de um motor em uma linha de produção. Se a velocidade desejada for 1000 RPM (Rotações por minuto), podemos usar um número fuzzy triangular para representar a incerteza na velocidade real do motor devido a flutuações na carga, eficiência do motor, etc. Por exemplo, podemos definir um conjunto fuzzy triangular com valores entre 950 RPM e 1050 RPM para representar a incerteza na velocidade real do motor.

Definição 3.2. Um número fuzzy A é dito triangular se sua função de pertinência é da forma

$$u_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ \frac{-x+c}{c-b}, & \text{se } b \leq x < c \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Observa-se que um número fuzzy triangular não necessariamente é simétrico.

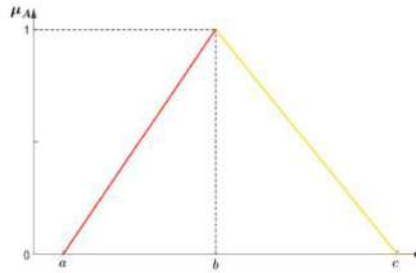


Figura 2: Número fuzzy triangular.

3.2 Números Fuzzy Trapezoidais

Os números fuzzy trapezoidais são semelhantes aos números fuzzy triangulares, mas com uma base mais ampla onde mais de uma variável de entrada possui grau 1 de pertinência. São usados em situações onde a imprecisão é mais significativa.

Exemplo de aplicação: Em um processo de têmpera, suponha que precisamos controlar a temperatura de um forno para garantir que as peças sejam adequadamente tratadas termicamente. Podemos usar um número fuzzy trapezoidal para representar a incerteza na temperatura real do forno. Por exemplo, podemos definir um conjunto fuzzy trapezoidal com valores entre 800°C e 1000°C, onde a temperatura ideal é de 900°C, mas há alguma margem de incerteza devido a variações no sistema de controle de temperatura.

Definição 3.3. Um número fuzzy A é dito trapezoidal se o gráfico de sua função de pertinência tem a forma de um trapézio (veja Figura 3), sendo dada por

$$u_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x < c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c \leq x < d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

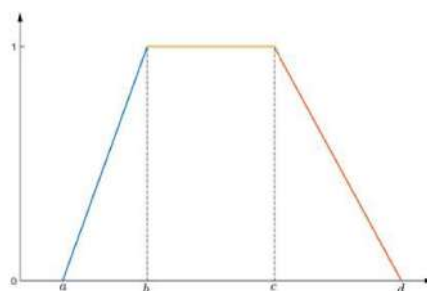


Figura 3: Número fuzzy trapezoidal.

3.3 Números Fuzzy Gaussianos (forma de sino)

Os números fuzzy gaussianos seguem uma distribuição gaussiana, onde a pertinência diminui gradualmente a partir de um valor modal. Eles são aplicados em modelagem estatística e previsão.

Exemplo de aplicação: Ao modelar a vibração em um sistema de suspensão de um veículo, podemos usar números fuzzy gaussianos para representar a distribuição da vibração em diferentes frequências. Por exemplo, podemos considerar uma distribuição gaussiana para a vibração em torno de uma frequência central, como 50 Hz (Hertz), com desvio padrão para representar a dispersão das vibrações em torno dessa frequência central.

Definição 3.4. Um número fuzzy tem forma de sino se a função de pertinência for suave e simétrica em relação a um número real. A seguinte função de pertinência tem estas propriedades para u , a e δ (veja Figura 4).

$$u_A(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2}, & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

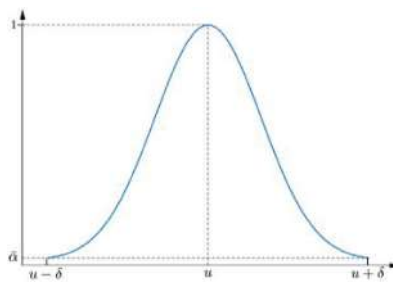


Figura 4: Número fuzzy em forma de sino.

4 Considerações finais

Diante do que foi exposto ao longo deste resumo, é notável que a Teoria Fuzzy oferece recursos para tratar com mais precisão aqueles problemas que possuem elementos imprecisos e, dessa forma, torna-se uma ferramenta poderosa para resolver problemas com variáveis heterogêneas. Sua compreensão abre possibilidades de aplicação em diversas áreas da ciência, contribuindo para o desenvolvimento científico e tecnológico.

Referências

- [1] BARROS, L.C.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R.S.M. **Teoria dos conjuntos fuzzy com aplicações**. 3ª edição. São Carlos: SBMAC, 2023.



Uso de Transformações Lineares na Computação Gráfica usando o GeoGebra

Clésio Rodrigues da Silva Júnior

UFU
Faculdade de Computação
clesio.junior@ufu.br

Prof. Vânia de Fátima Lemes de Miranda

UFU
Faculdade de Matemática
vaniaflm@ufu.br

Prof. Giselle Moraes Resende Pereira

UFU
Faculdade de Matemática
gisellemoraes@ufu.br

Eduardo dos Santos Rocha

UFU
Faculdade de Computação
eduardo.rocha@ufu.br

Prof. Luis Florial Espinoza Sánchez

UFU
Faculdade de Matemática
luis.sanchez@ufu.br

Prof. Danilo Elias de Oliveira

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
danioloelias@ufu.br

Palavras-chave

Álgebra Linear
GeoGebra
Matrizes
Transformação Linear

Resumo

Nesse trabalho serão apresentados conceitos de álgebra linear utilizados na computação gráfica. Foi utilizado o *software* gráfico GeoGebra para demonstrar duas aplicações práticas que possibilitam aos usuários interações dinâmicas para aprender conceitos de transformações lineares, como cisalhamento, contração, dilatação e reflexões.

1 Introdução

A Álgebra Linear desempenha um papel muito importante em várias situações do dia a dia, destacando-se, por exemplo, na computação gráfica. O simples fato de usar um editor de texto e clicar no botão para formatar a fonte em itálico possui uma influência direta da álgebra linear por meio de transformações lineares. Em questão de segundos, são calculadas as novas posições que os vértices dos caracteres devem assumir para atender a essa solicitação. Este trabalho visa apresentar aplicações práticas do uso de matrizes e transformações lineares, com foco na área da computação gráfica [4].

2 Conceitos Importantes

2.1 Matrizes

Uma matriz é uma estrutura matemática que possui elementos organizados em linhas e colunas, onde cada elemento pode ser identificado pelos índices i, j correspondentes à linha e coluna, respectivamente [8]. Esse tipo de estrutura também é amplamente utilizada na computação para armazenamento em bancos de dados, manipulação de imagens e redes neurais, por exemplo. Em geral, uma matriz pode ser expressa na forma:

$$A_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

onde m é o número de linhas e n representa o número de colunas.

Neste trabalho, estudamos as transformações lineares que, embora sejam funções, podem ser representadas por matrizes.

2.2 Transformações Lineares

Transformação Linear é uma função matemática que trabalha com dois espaços vetoriais, caracterizada pelas propriedades da adição e da homogeneidade [5]. A definição é dada por:

$$\text{i) } T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{ii) } T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

A propriedade i) se refere à **aditividade**. Ao aplicar a transformação em dois elementos quaisquer e somá-las, deve-se obter o mesmo resultado que ao somar os dois elementos e depois aplicar a transformação.

Já a propriedade ii) se refere à **homogeneidade**. Ao multiplicar um elemento por um escalar (α) e aplicar a transformação, deve-se obter o mesmo valor que multiplicar o escalar (α) pelo resultado da transformação.

Em nossos estudos, consideramos vetores em duas dimensões, ou seja, $u, v \in \mathbb{R}^2$. Assim, considerando $u = (x, y)$ utilizaremos a notação $T(u) = T(x, y)$.

2.2.1 Reflexão:

A reflexão é uma operação que permite inverter os pontos de um objeto em relação a um eixo. Para isso, é necessário fixar um dos eixos e projetar os reflexos em relação a esse eixo por meio de transformações lineares.

No caso de uma reflexão em relação ao eixo x , este será fixado e a transformação linear irá alterar a coordenada em y : $T_1(x, y) = (x, -y)$.

Ao fixar o eixo y , a transformação linear será aplicada para alterar a coordenada em x : $T_2(x, y) = (-x, y)$.

De forma semelhante, para fazer a reflexão em torno dos dois eixos basta não fixar nenhum deles:

$$T_3(x, y) = (-x, -y)$$

As matrizes são:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Contração e Dilatação:

Resumidamente, esses dois termos correspondem a transformações lineares que podem alterar o tamanho e as dimensões de objetos, vetores e espaços vetoriais. Para que isso aconteça, os componentes precisam ser multiplicados por um escalar k , considerando que:

- i) Se $k < 1$, contração. ii) Se $k > 1$, dilatação. iii) Se $k = 1$, identidade.

Será utilizada essa matriz base para aplicar as transformações: $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

Note que $T(u) = T(x, y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$.

2.2.3 Cisalhamento

O cisalhamento é um tipo de transformação linear que permite distorcer a forma de um objeto por meio de deslocamentos sem alterar sua área ou volume [4]. Para isso, é utilizada uma matriz do tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{para cisalhamento horizontal,} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \quad \text{para cisalhamento vertical,}$$

onde k é o fator do deslocamento.

É muito importante conhecer esses conceitos matemáticos para começar a compreender como a computação gráfica funciona.

3 GeoGebra [3]

O GeoGebra é um *software* gráfico que é muito utilizado por possibilitar a execução de várias funcionalidades relacionadas à matemática em um único ambiente, como álgebra, geometria e plano cartesiano. Por ter uma interface de fácil compreensão, é uma ferramenta muito utilizada na educação para ajudar a difundir o conhecimento matemático utilizando exemplos mais concretos e práticos.

Além disso, é possível se aprofundar e utilizar recursos avançados dentro desse ambiente, como programar funções sofisticadas para solucionar um problema complexo, criar animações e interações dinâmicas com o usuário. Isso cria oportunidades para realizar muitas atividades que vão além do básico.

4 Desenvolvimento

Para mostrar uma aplicação prática de todos esses conceitos mencionados anteriormente, foram criadas algumas situações utilizando o *software* GeoGebra.

4.1 Cisalhamento [6]

Considerando o exemplo do editor de texto, inicialmente, utilizamos o *software* gráfico GeoGebra para representar uma letra de forma, identificando e conectando os pontos que formam a letra de maneira sequencial. Essa disposição visual permitiu uma representação precisa da sigla "UFU", conforme a Figura 1.

A partir disso, o conjunto das coordenadas dos pontos que representam cada letra foram representadas em uma matriz, o que irá proporcionar uma representação eficaz para as transformações lineares subsequentes:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 1 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 8 & 8 & 6 & 6 & 8 & 8 & 6 & 6 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 10 & 10 & 11 & 11 & 12 & 12 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 1 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Para criar o efeito de itálico foi utilizado o cisalhamento horizontal, com o objetivo de inclinar os caracteres em 15 graus usando a matriz:

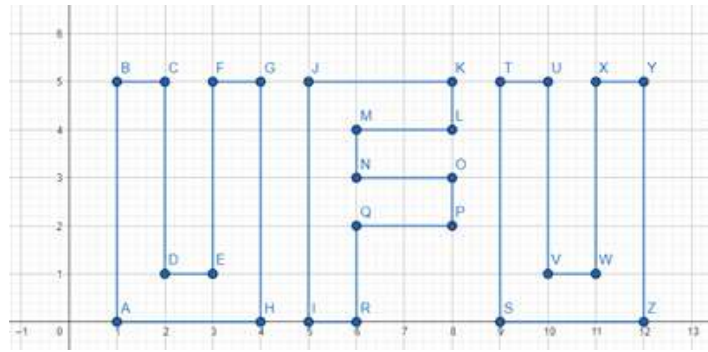


Figura 1: Vértices originais plotados no *software* Geogebra.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \tan(15^\circ) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando os cálculos do cisalhamento, obtém-se o resultado indicado na Figura 2:

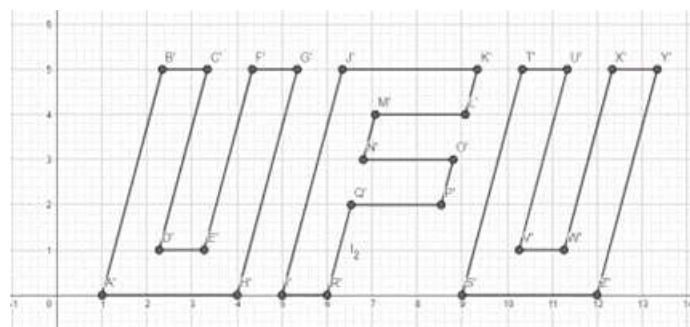


Figura 2: Vértices e segmentos após o cisalhamento de 15° na horizontal.

4.2 Contração, Dilatação e Rotação nos eixos [7]

De maneira semelhante, foi criada uma situação na qual um objeto inicial é definido e submetido a diversas transformações lineares. As coordenadas desse objeto inicial são representadas pela matriz O , apresentada na Figura 3.

Os usuários podem interagir com a interface de forma dinâmica. Ao alterar o estado de variáveis booleanas, diferentes tipos de transformações lineares podem ser exibidos ou ocultos. Além disso, eles podem ajustar os valores das matrizes correspondentes às transformações usando controles deslizantes. É possível também arrastar o objeto inicial e distorcê-lo para ver como todos os outros objetos visíveis são afetados em resposta.

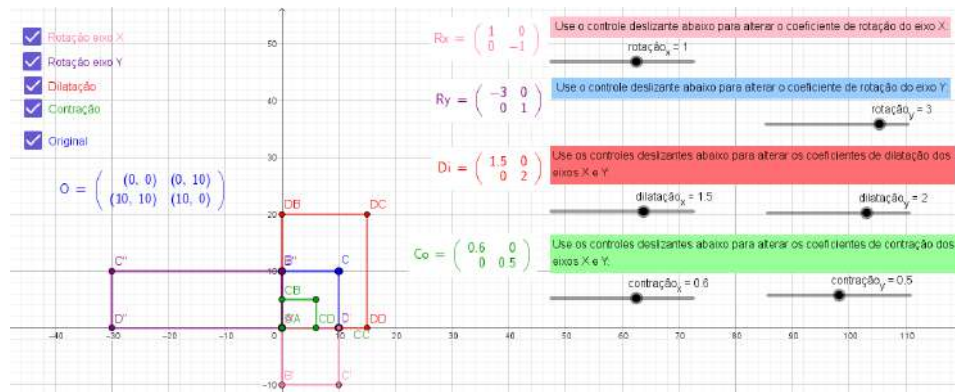


Figura 3: Interface interativa para realizar transformações lineares.

5 Considerações finais

Esse trabalho explorou a aplicação prática de transformações lineares na computação gráfica, destacando o uso de matrizes para representar coordenadas e realizar cisalhamento, contração, dilatação e rotação. Para isso, utilizamos o GeoGebra que se mostrou eficiente e de fácil manipulação na elaboração destas construções matemáticas. A compreensão desses conceitos é essencial para a manipulação eficaz de elementos gráficos. A representação visual dos caracteres "UFU" após as transformações lineares ilustra como esses conceitos podem ser aplicados de maneira significativa. A álgebra linear, portanto, desempenha um papel fundamental na criação e manipulação de elementos gráficos, enriquecendo as possibilidades na área da computação gráfica.

Agradecimentos

Na condição de bolsista de Iniciação Científica do PICME da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao CNPq pelo fomento.

Referências

- [1] ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 8ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- [2] FONSECA JUNIOR, Luiz Fernando Goulart; GALVES, Ana Paula Tremura. Transformações geométricas do plano no plano e suas matrizes associadas. **Anais da XII Mostra IC**. Uberlândia, 2023. Disponível em: <<https://eventos.ufu.br/sites/eventos.ufu.br/files/documentos/anais.pdf>>. Acesso em: 13 mar. 2024.
- [3] GEOGEBRA. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 27 mai. 2024.

- [4] GONÇALVES, H. S. G. **A importância das matrizes e transformações lineares na computação gráfica [manuscrito]**. (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
- [5] LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. **Álgebra linear**. 4ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2011.
- [6] SILVA JUNIOR, C. R. **Efeito_Cisalhamento_UFU_Geogebra**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/calculator/ay36cvxz>. Acesso em: 13 mar. 2024.
- [7] SILVA JUNIOR, C. R. **Transformações_Lineares_Geogebra**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/calculator/yeghq9sw>. Acesso em: 13 mar. 2024.
- [8] STRANG, G. **Álgebra linear e suas aplicações**. 4ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2010.



Método de Diferenças Finitas para o Problema Auto-adjunto geral

Edinilson Ferreira Vilela

UFU, FAMAT, Uberlândia, MG, Brasil
edinilsonfvilela@ufu.br

Santos Alberto Enriquez Remigio

UFU, FAMAT, Uberlândia, MG, Brasil
santos.er@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Análise Numérica.
Método de Diferenças Finitas.
Equações Diferenciais.

Nesse trabalho é apresentado a solução numérica do problema auto-adjunto geral: $[p'(x)u'(x)]' - q(x)u(x) = f(x)$, que possui aplicações em vários problemas físicos, assim como no problema de auto-valores de Sturm-Liouville. A solução da equação é feita pelo Método das Diferenças Finitas centradas de segunda ordem, e a solução do sistema linear tri-diagonal associado é feita pelo algoritmo de Thomas. Os resultados da solução numérica da equação na forma conservativa ou não conservativa mostram a aplicabilidade da metodologia. Além disso, as aproximações para a equação na forma conservativa são melhores, como reportado na literatura.

1 Introdução

O método de diferenças finitas consiste em discretizar o domínio do nosso problema e substituir as derivadas da nossa equação por diferenças finitas, obtendo assim um sistema de equações, que quando resolvido, nos dará uma solução aproximada do problema no nosso domínio discretizado.

No presente trabalho iremos resolver o problema *auto-ajunto geral* sujeito as condições de contorno de Dirichlet, que é um problema de valor de contorno definido por:

$$\begin{cases} [p(x)u'(x)]' - q(x)u(x) = f(x), \\ a < x < b, \text{ e } u(a) = u_a, u(b) = u_b. \end{cases}$$

onde $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ são funções reais contínuas dadas, com $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ e $p(x)$ possui derivada contínua. Mais detalhes sobre o método de diferenças finitas aplicado ao problema auto-ajunto geral podem ser encontrado em [5, 4].

1.1 Discretização do domínio

Seja $[a, b]$ o domínio do nosso problema, consideremos $n + 1$ pontos de domínio igualmente espaçados, incluindo os pontos extremos a e b .

Neste caso o espaçamento será dado por $h = \frac{b-a}{n}$, assim nosso primeiro ponto será $x_0 = a$, seguido por $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$ até $x_n = b$. Assim podemos definir os pontos da malha como:

$$x_i = a + ih, \text{ com } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

1.2 Diferença Finitas

Uma vez definida a malha, deve-se aproximar as derivadas da equação diferencial por diferenças finitas em cada ponto da malha. Usaremos as diferenças finitas centradas de segunda ordem para a derivada primeira e para a derivada segunda de nossa função. Para mais detalhes sobre as fórmulas de diferenças finitas pode ser consultado a referência [5].

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^2),$$

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

2 Metodologia

Podemos aplicar o método das diferenças finitas para a equação diferencial dada na forma conservativa ([1]), ou expandir a derivada do produto e encontrar uma equação diferencial equivalente (forma

não conservativa). Isto é:

- Forma conservativa:

$$[p(x)u'(x)]' - q(x)u(x) = f(x).$$

- Forma não conservativa

$$p(x)u''(x) + p'(x)u'(x) - q(x)u(x) = f(x).$$

2.1 Discretização da forma não conservativa

Seja $U_i \approx u(x_i)$ a solução aproximada de $u(x_i)$, podemos substituir a derivada segunda $u''(x)$ pela diferença centrada de segunda ordem, e substituir a derivada primeira $u'(x)$ pela diferença centrada de segunda ordem. Dessa forma teremos para cada ponto interno da malha:

$$p_i \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} + p'_i \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} - q_i U_i = f_i,$$

colocando em evidência os termos U_{i-1} , U_i e U_{i+1} obtemos:

$$\left(\frac{p_i}{h^2} - \frac{p'_i}{2h}\right) U_{i-1} + \left(-\frac{2p_i}{h^2} - q_i\right) U_i + \left(\frac{p_i}{h^2} + \frac{p'_i}{2h}\right) U_{i+1} = f_i,$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Podemos aplicar as condições de contorno do nosso problema, substituímos o termo U_0 por u_a na primeira equação do sistema, quando $i = 1$, obtemos assim:

$$\left(-\frac{2p_1}{h^2} - q_1\right) U_1 + \left(\frac{p_1}{h^2} + \frac{p'_1}{2h}\right) U_2 = f_1 - \left(\frac{p_1}{h^2} - \frac{p'_1}{2h}\right) u_a,$$

ao substituir U_n por u_b na última equação, quando $i = n-1$ obtemos:

$$\left(\frac{p_{n-1}}{h^2} - \frac{p'_{n-1}}{2h}\right) U_{n-2} + \left(-\frac{2p_{n-1}}{h^2} - q_{n-1}\right) U_{n-1} = f_{n-1} - \left(\frac{p_{n-1}}{h^2} + \frac{p'_{n-1}}{2h}\right) u_b.$$

Dessa forma, temos em um sistema de $n-1$ equações e $n-1$ incógnitas. Podemos colocar o sistema na forma matricial $AU = F$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2p_1}{h^2} - q_1 & \frac{p_1}{h^2} + \frac{p'_1}{2h} & & & & \\ \frac{p_2}{h^2} - \frac{p'_2}{2h} & -\frac{2p_2}{h^2} - q_2 & \frac{p_2}{h^2} + \frac{p'_2}{2h} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \frac{p_{n-1}}{h^2} - \frac{p'_{n-1}}{2h} & -\frac{2p_{n-1}}{h^2} - q_{n-1} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - \left(\frac{p_1}{h^2} - \frac{p'_1}{2h}\right) u_a \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} - \left(\frac{p_{n-1}}{h^2} + \frac{p'_{n-1}}{2h}\right) u_b \end{bmatrix}.$$

Obtemos assim um sistema tri-diagonal, onde a solução do sistema é a solução aproximada do problema de valor de contorno auto-adjunto nos pontos da malha.

2.2 Discretização da forma conservativa

Para aplicarmos a diferença finita na forma conservativa devemos inicialmente definir novos pontos da forma:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Podemos assim aplicar diferença finita centrada usando espaçamento $\frac{h}{2}$:

$$[p(x)u'(x)]' = \frac{p_{i+\frac{1}{2}}u'_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}u'_{i-\frac{1}{2}}}{h} + O(h^2),$$

aplicando novamente a diferença finita centrada usando espaçamento $\frac{h}{2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} [p(x)u'(x)]' &= \frac{p_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i-u_{i-1}}{h}}{h} + O(h^2) \\ &= \frac{p_{i+\frac{1}{2}}u_{i+1} - \left(p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}\right)u_i + p_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1}}{h^2} + O(h^2). \end{aligned}$$

Assim chegamos na seguinte discretização da equação:

$$\frac{p_{i+\frac{1}{2}}U_{i+1} - \left(p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}\right)U_i + p_{i-\frac{1}{2}}U_{i-1}}{h^2} - q_iU_i = f_i,$$

para $i = 1, 2, \dots, n-1$

Reordenando os termos U_{i-1} , U_i e U_{i+1} obtemos:

$$\left(\frac{p_{i+\frac{1}{2}}}{h^2}\right)U_{i+1} + \left(-\frac{p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}}{h^2} - q_i\right)U_i + \left(\frac{p_{i-\frac{1}{2}}}{h^2}\right)U_{i-1} = f_i.$$

Ao aplicarmos a condição de contorno em U_0 na equação para $i = 1$, obtemos a seguinte o equação:

$$\left(\frac{p_{\frac{3}{2}}}{h^2}\right)U_2 + \left(-\frac{p_{\frac{3}{2}} + p_{\frac{1}{2}}}{h^2} - q_1\right)U_1 = f_1 - \frac{p_{\frac{1}{2}}}{h^2}u_a,$$

aplicando a condição de contorno em U_n na equação para $i = n-1$, obtemos:

$$\left(-\frac{p_{n-\frac{1}{2}} + p_{n-\frac{3}{2}}}{h^2} - q_{n-1}\right)U_{n-1} + \left(\frac{p_{n-\frac{3}{2}}}{h^2}\right)U_{n-2} = f_{n-1} - \frac{p_{n-\frac{1}{2}}}{h^2}u_b.$$

n	h	erro ₁	erro ₂	erro _∞
4	0.5	0.01423102	0.02012570	0.01413572
8	0.25	0.00382156	0.00764312	0.00348961
16	0.125	0.00097144	0.00274764	0.00087905
32	0.0625	0.00024390	0.00097561	0.00022029
64	0.03125	0.00006104	0.00034531	0.00005510

Tabela 1: Erro do sistema na forma não conservativa.

n	h	erro ₁	erro ₂	erro _∞
4	0.5	0.00655366	0.00926828	0.00944567
8	0.25	0.00211652	0.00423304	0.00264180
16	0.125	0.00056492	0.00159784	0.00068887
32	0.0625	0.00014361	0.00057444	0.00017507
64	0.03125	0.00003605	0.00020395	0.00004385

Tabela 2: Erro do sistema na forma conservativa.

Podemos ver que no geral o quociente entre os erros sucessivos das soluções se aproxima de $4 = 2^2$, o que nos diz que o método é de ordem 2. Além disso, vemos também que quando aplicado o método de diferenças finitas à forma conservativa obtemos um resultado no geral melhor, se comparado à forma não conservativa do problema.

Agradecimentos

Meus agradecimentos ao CNPq pelo fomento da Bolsa de Iniciação Científica do PICME.

Referências

- [1] Fortuna, A., **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, p. 241, 2000.
- [2] Isaacson, E., Keller, H. B. **Analysis of Numerical Methods**. New York: Dover Publications, 1994.
- [3] LeVeque, R. J. **Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady State and Time Dependent Problems**. Texts in applied mathematics. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [4] Süli, E.; Mayers, D. F. **An Introduction to Numerical Analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [5] Zhilin, J.; Bulirsch, R. **Numerical Solution of Differential Equations: Introduction to Finite Difference and Finite Element Methods**. Texts in applied mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.



ALGORITMOS DE APRENDIZADO DE MÁQUINA NO DIAGNÓSTICO DE DOENÇAS CARDIOVASCULARES

Eduardo dos Santos Rocha

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação
eduardo.rocha@ufu.br

Vânia de Fatima Lemes de Miranda

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
vaniaflm@ufu.br

Fernanda Maria Cunha Santos

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação
fmcsantos@ufu.br

Clésio Rodrigues da Silva Júnior

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação
clesio.junior@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Machine learning.
classificador.
estatística.

Um diagnóstico rápido possibilita que pacientes busquem assistência adequada, visando uma condição de vida melhor. O presente trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre técnicas de aprendizado de máquinas e técnicas estatísticas no âmbito da identificação de doenças cardiovasculares. Inicialmente, foi realizado o pré-processamento dos dados onde inconsistências (Ruidos, Outliers e Valores missing) foram devidamente tratadas, permitindo uma maior compreensão sobre informações vigentes desses dados. O modelo mais eficiente foi o XGBOOST (Extreme Gradient Boosting), obtendo acurácia de 87,32% e f1-score de 87,00%.

1 Introdução

Doenças cardiovasculares estão no topo do ranking de causas de mortes no Brasil e o desenvolvimento de técnicas capazes de detectar precocemente essas doenças seria de grande valia. [1] Segundo Nikola Tesla, “O futuro vai mostrar os resultados e julgar a cada segundo suas realizações.”[2], nessa frase é possível interpretar a atuação da inteligência artificial(IA) em muitos aspectos da vida moderna, principalmente, no auxílio direto ou indireto na área da saúde. No contexto da medicina preventiva, a detecção precoce de problemas cardíacos ajuda a tomar medidas profiláticas para melhorar a qualidade de vida das pessoas.

Utilizando técnicas de aprendizado de máquina e mineração de dados, Kavitha [3], desenvolveu uma solução para detecção de doenças cardíacas a partir conjunto de dados de doenças cardíacas de Cleveland onde foram utilizadas técnicas de mineração de dados. No estudo do pesquisador Jindal [4] foi utilizado a inteligência artificial (IA) com aprendizado de máquina, o qual mostrou ser eficaz no diagnóstico de problemas cardíacos, onde a potencial contribuição disso poderia levar à substituição, ou mesmo servir de indicador, da angiografia coronariana com base no algoritmo KNN(K-Vizinhos Mais Próximos).

Portanto, o presente trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre técnicas de aprendizado de máquinas e técnicas estatísticas no âmbito de detecção de doenças cardiovasculares de maneira eficiente e eficaz, empregando métodos diversificados com o intuito de alcançar a otimização dos resultados.

2 Materiais e Métodos

Dentro da inteligência(IA), há a linha de estudos em Aprendizado de Máquinas que emprega algoritmos capazes de auxiliar na classificação de uma base de dados. Neste trabalho, os classificadores utilizados foram Máquina de Vetores de Suporte Random Forest, XGBoost e CatBoost. Para este estudo de classificação foi utilizada a base de dados “heart failure prediction dataset” extraída da plataforma Kaggle [5] com as variáveis idade, sexo, tipo de dor no peito, pressão sanguínea em repouso, colesterol sérico, açúcar no sangue em jejum, eletrocardiograma em repouso, frequência cardíaca máxima, angina induzida por exercício, depressão de ST induzida por exercício em relação ao repouso e Inclinação do segmento, totalizando um total de onze variáveis e novecentas e dezoito observações. A avaliação desses classificadores possibilitará a verificação da eficiência dos algoritmos para identificação de doenças cardíacas, possibilitando uma análise precoce dessas condições.

2.1 Classificadores em estudo

2.1.1 XGBOOST (Extreme Gradient Boosting)

O modelo XGBOOST é um algoritmo empregado na classificação e regressão, originado da evolução do Random Forest, Boosting e Gradient Boosting. Onde implementa técnicas que oferecem uma alta desempenho e escalabilidade, criando um algoritmo otimizado, que visa trabalhar com dados avulsos com um aprendizado ponderado, lidando com pesos ao utilizar arvores de decisão. Ademais, implementa técnicas de podas de árvores, regularização L1 (lasso) penaliza a somas dos valores obsoletos dos pesos e L2 (Ridge) em que penaliza a soma dos quadrados dos pesos, etc.[6]

$$\text{Obj}(\Theta) = \sum_{i=1}^n L(y_i, \hat{y}_i) + \sum_{k=1}^K \Omega(f_k) \quad (1)$$

- Θ É a representação do conjunto de parâmetros a serem otimizados (incluindo os parâmetros de cada árvore).
- n É o número de instâncias de treinamento.
- K É o número de árvores.
- L É a função de perda.
- Ω É o termo de regularização.
- y_i É o rótulo verdadeiro da i^{th} instância.
- \hat{y}_i É o rótulo previsto na i^{th} instância.
- f_k Representa a k^{th} árvore do conjunto.

2.1.2 CatBoost (Category Boosting)

CatBoost é adequado para dados categóricos heterogêneos, muito utilizado em aprendizagem supervisionada em tarefas de classificação e regressão. Seu destaque é a alta velocidade de processamento e transformação das variáveis categóricas em numéricas automaticamente [7].

$$F(x) = F_0(x) + \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^N f_m(x_i) \quad (2)$$

- $F(x)$ Representa a função geral de previsão que o CatBoost cogita aprender. Ele pega um vetor de entrada x e prevê a variável alvo correspondente y .

- $F_0(x)$ É a estimativa inicial ou a previsão da linha de base. Onde muitas vezes é definido como a média da variável alvo no conjunto de dados de treinamento. Este termo captura o comportamento médio geral da variável alvo.
- $\sum_{m=1}^M$ Representa a soma do conjunto de árvores. Onde M denota o número total de árvores no conjunto.
- $\sum_{i=1}^N$ Representa a soma das amostras de treinamento. Onde N denota o número total de amostras de treinamento.
- $f_m(x_i)$ Representa a previsão da m -ésima árvore para a i -ésima amostra de treinamento. Onde cada árvore do conjunto contribui para previsão geral, portanto, fazendo sua própria previsão para cada amostra do treinamento.

2.1.3 Floresta Aleatória (Random Forest)

O modelo floresta aleatória é um algoritmo de classificação em aprendizado supervisionado, onde utiliza do método Ensemble (Construção de vários modelos onde visa obter um resultado único), sendo mais robusto que a árvore de decisão, por ser um conjunto de árvores de decisão onde possibilita a construção do método Ensemble, onde muitas vezes são obtidos resultados mais satisfatórios, em contrapartida, com custos computacionais e complexidade elevada.

$$E(S) = - \sum_{i=1}^n P_i \cdot \log_2(p_i) \quad (3)$$

- p_i é a probabilidade de ocorrência do atributo nos dados.
- n número de classes que pode ser atingida.
- \sum é o somatório.
- \log_2 é o logaritmo.

$$1 - \sum_{i=1}^n P_i^2 \quad (4)$$

- p_i é a probabilidade de ocorrência do atributo nos dados.
- n número de classes que pode ser atingida.
- \sum é o somatório.

3 Resultados

Nessa seção será apresentado os resultados dos algoritmos citados anteriormente.

3.1 XGBOOST (Extreme Gradient Boosting)

Tabela 1: Métricas de desempenho do modelo XGBOOST

Classe	Precisão	Revocação	F1-Score	Suporte
0	0,85	0,84	0,85	121
1	0,88	0,88	0,88	155
Acurácia			0,87	276
Média Macro	0,86	0,86	0,86	276
Média Ponderada	0,87	0,87	0,87	276

A técnica aplicada foi o algoritmo de classificação XGboost, onde é perceptível que ambas as classes estão equilibradas, com 87,32% de acurácia e a validação cruzada possui 241 acertos em termos percentuais 87,02%, vale ressaltar que a base de dados está utilizando a técnica de transformação de variáveis categóricas em numéricas manualmente.

3.2 CatBoost (Category Boosting)

Tabela 2: Métricas de desempenho do modelo CatBoost

Classe	Precisão	Revocação	F1-Score	Suporte
0	0,84	0,84	0,84	121
1	0,88	0,88	0,88	155
Acurácia			0,86	276
Média Macro	0,86	0,86	0,86	276
Média Ponderada	0,86	0,86	0,86	276

A técnica aplicada foi o algoritmo de classificação CatBoost, onde é perceptível que ambas as classes estão equilibradas, com 86,96% de acurácia e na validação cruzada com 240 acertos em termos percentuais 88,00%, vale ressaltar que a base de dados está utilizando a técnica de transformação de variáveis categóricas em numéricas manualmente.

3.3 Floresta Aleatória (Random Forest)

Tabela 3: Métricas de desempenho do modelo Floresta Aleatória

Classe	Precisão	Revocação	F1-Score	Suporte
0	0,79	0,83	0,81	121
1	0,86	0,83	0,85	155
Acurácia			0,83	276
Média Macro	0,83	0,83	0,83	276
Média Ponderada	0,83	0,83	0,83	276

A técnica aplicada foi o algoritmo de classificação Random Forest, onde é perceptível que ambas as classes estão equilibradas, com 86,59% de acurácia e na validação cruzada com 239 acertos em termos percentuais 85,92%, vale ressaltar que a base de dados está utilizando a técnica de transformação de variáveis categóricas em numéricas manualmente.

4 Considerações finais

O XGBoost se destacou como o superior, ainda que as diferenças entre CatBoost e Random Forest fossem mínimas em termos de métricas de desempenho, como precision, recall e F1-score.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Sistemas de informação de Monte Carmelo da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial PETSIMC pelo fomento. E agradecimentos a orientadora e coautores.

Referências

- [1] Lenice Harumi Ishitani.; Glaura da Conceição Franco.; Ignez Helena Oliva Perpétuo. **Socioeconomic inequalities and premature mortality due to cardiovascular diseases in Brazil**. Saúde Pública, 2006.
- [2] Tesla, Nikola and Childress, David Hatcher. *The fantastic inventions of Nikola Tesla*. Adventures Unlimited, 1993.
- [3] Kavitha, M., Gnaneswar, G., Dinesh, R., Sai, Y. R., Suraj, R. S. Heart disease prediction using hybrid machine learning model. In: 2021 6th international conference on inventive computation technologies (ICICT). IEEE, 2021. p. 1329-1333.
- [4] Jindal, Harshit, Agrawal, S., Khera, R., Jain, R., Nagrath, P. Heart disease prediction using machine learning algorithms. In: IOP conference series: materials science and engineering. Vol. 1022. No. 1. IOP Publishing, 2021. p. 012072.
- [5] Plataforma Kaggle. Disponível em: <<https://www.kaggle.com/datasets/fedesoriano/heart-failure-prediction>>.
- [6] CHEN, T.; GUESTRIN, C. **Xgboost: A scalable tree boosting system**. In: ACM. Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. San Francisco, California, USA, 2016. (KDD'16), p. 785–794. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/2939672.2939785>>. Acesso em: MUDAR DATA DE ACESSO.
- [7] HANCOCK, J. T.; KHOSHGOFTAAR, T. M. **Catboost for big data: an interdisciplinary review**. Journal of big data, SpringerOpen, v. 7, n. 1, p. 1–45, 2020.
- [8] CORTES, C.; VAPNIK, V. N. **Support-vector networks**. Machine learning, Springer, v. 20, n. 3, p. 273–297, 1995.



Em Busca dos Extremos: Uma Exploração dos Conceitos de Supremo e Ínfimo

Elmira Rosa Silva de Melo

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
elmira.rosa@ufu.br

Elisa Regina dos Santos

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
elisars@ufu.br

Resumo

Um corpo ordenado é um conjunto munido de uma estrutura algébrica rica onde existe uma relação de ordem entre os elementos. O supremo e o ínfimo são conceitos importantes nesse contexto: o supremo é o menor limitante superior de um conjunto, enquanto o ínfimo é o maior limitante inferior. Esses conceitos são essenciais na Análise Matemática, permitindo a definição de limites, convergência de sequências, integrais e propriedades de conjuntos. Além disso, a completude do corpo ordenado, onde todo conjunto não vazio e limitado superiormente tem supremo, é crucial. Essa propriedade garante a existência de soluções para diversos problemas matemáticos e é fundamental para muitos teoremas na Análise Real. Assim, compreender a noção de corpo ordenado e os conceitos de supremo e ínfimo é fundamental para uma variedade de áreas da Matemática e suas aplicações. Este trabalho apresenta tais conceitos em detalhes e também algumas propriedades e exemplos.

Palavras-chave

Corpo ordenado.
Cotas inferior e superior.
Conjunto limitado.

1 Introdução

Desde os primórdios da civilização humana, a necessidade de quantificar e compreender as grandezas que nos cercam tem impulsionado o desenvolvimento dos sistemas numéricos. Contudo, foi em momentos cruciais da história da matemática que a concepção e a formalização dos números reais, tal como os conhecemos hoje, se solidificaram. Um marco significativo desse processo foi o surgimento dos conceitos fundamentais por renomados matemáticos como Dedekind e Cantor no final do século XIX. Suas contribuições revolucionárias estabeleceram as bases teóricas para a compreensão profunda dos números reais. Posteriormente, na primeira metade do século XX, a formalização rigorosa dos números reais foi alcançada através da definição dos axiomas do corpo ordenado completo. Essa estrutura matemática consolidou os fundamentos essenciais para a Análise Real, fornecendo uma base sólida para a compreensão e o desenvolvimento de uma ampla gama de teorias e aplicações matemáticas. Para maiores informações, consultar [4]. A principal referência para a elaboração deste trabalho foi [1].

2 Corpo Ordenado

Antes de adentrarmos diretamente ao conceito de corpo ordenado, é imprescindível estabelecermos uma compreensão clara do que constitui um corpo. Em seguida, exploraremos algumas definições e resultados preliminares fundamentais relacionados a esse conceito.

Definição 2.1. Um *corpo* K é um conjunto não vazio de elementos onde se acham definidas uma operação de adição

$$\begin{aligned} + : K \times K &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

e uma operação de multiplicação

$$\begin{aligned} \cdot : K \times K &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades.

1) *Comutativa:*

$$x + y = y + x, \quad xy = yx, \quad \forall x, y \in K.$$

2) *Associativa:*

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad (xy)z = x(yz), \quad \forall x, y, z \in K.$$

3) *Distributiva:*

$$(x + y)z = xz + yz, \quad \forall x, y, z \in K.$$

4) *Existência de um zero:*

$$\exists 0 \in K \mid x + 0 = x, \forall x \in K.$$

5) *Existência de uma unidade:*

$$\exists 1 \in K \mid x \cdot 1 = x, \forall x \in K.$$

6) *Existência de inversos:*

$$\forall x \in K, \exists (-x) \in K \mid x + (-x) = 0, \text{ e } \forall x \in K, x \neq 0, \exists x^{-1} \in K \mid x \cdot x^{-1} = 1.$$

Exemplo 2.2. O conjunto \mathbb{Q} dos racionais é um corpo e o conjunto \mathbb{R} dos reais também. O conjunto \mathbb{Z} dos inteiros não é um corpo, pois nem todo elemento possui inverso multiplicativo.

Entendendo a definição de corpo, avancemos agora para compreender a noção de corpo ordenado.

Definição 2.3. Um corpo K é **ordenado** se contiver um subconjunto P com as seguintes propriedades:

- 1) $x \in P, y \in P$ implica $x + y \in P$ e $xy \in P$;
- 2) dado $x \in K$, então uma, e somente uma, das três possibilidades ocorre: $x \in P, -x \in P, x = 0$.

Exemplo 2.4. O conjunto \mathbb{Q} dos racionais é um corpo ordenado, onde P é o conjunto \mathbb{Q}^+ dos racionais positivos, e o conjunto \mathbb{R} dos reais é um corpo ordenado, onde P é o conjunto \mathbb{R}^+ dos reais positivos.

Este exemplo justifica a denominação de **elementos positivos** para os elementos pertencentes ao subconjunto P de um corpo ordenado K .

Podemos introduzir uma ordem estrita entre os elementos de um corpo ordenado K da seguinte maneira:

$$x > y \text{ se } x - y \in P.$$

No caso dos racionais e dos reais, essa é a ordem usual. Usamos ainda os símbolos : “ \geq , $<$, \leq ”, onde esses têm o seguinte significado:

$$x \geq y \text{ se } x > y \text{ ou } x = y; \quad x < y \text{ se } y > x; \quad x \leq y \text{ se } y \geq x.$$

Observação 2.5. É possível verificar que $x \in P$ se, e somente se, $x > 0$.

Proposição 2.6. As seguintes propriedades são válidas em qualquer corpo ordenado K :

- 1) $x > y, y > z \Rightarrow x > z$;
- 2) $x > y, z > t \Rightarrow x + z > y + t$;

- 3) $x > y, z > 0 \Rightarrow xz > yz$;
- 4) $x > 0, xy > 0 \Rightarrow y > 0$;
- 5) $x > 0, 0 > y \Rightarrow 0 > xy$;
- 6) $0 > x, 0 > y \Rightarrow xy > 0$;
- 7) $x > y \Rightarrow x + z > y + z, \forall z \in K$;
- 8) $K \neq \{0\} \Rightarrow 0 < 1$.

Recordemos agora a noção de relação de ordem total.

Definição 2.7. *Sejam A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R é uma relação de ordem total em A se*

- (i) $(x, x) \in R$, para todo $x \in A$ (reflexividade);
- (ii) $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$ (antissimetria);
- (iii) $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (transitividade);
- (iv) $x, y \in A \Rightarrow (x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R$ (totalidade).

Exemplo 2.8. *O símbolo “ \leq ” introduzido na página anterior é uma relação de ordem total em K .*

3 Supremo e Ínfimo

A seguir, dedicaremos nossa atenção a algumas definições preliminares, com o intuito de estabelecer uma base sólida para a compreensão dos conceitos de ínfimo e supremo.

Definição 3.1. *Sejam K um corpo ordenado e A um subconjunto de K . Um elemento $x \in K$ é uma cota superior de A se $x \geq y$, para todo $y \in A$.*

Existem conjuntos que não possuem cota superior. Por exemplo, o subconjunto \mathbb{N} dos números naturais do corpo ordenado \mathbb{Q} não possui cota superior. Esse fato motiva a próxima definição.

Definição 3.2. *Sejam K um corpo ordenado e A um subconjunto de K . Dizemos que A é limitado superiormente se ele possui cota superior.*

Analogamente, definimos os conceitos de cota inferior e conjunto limitado inferiormente.

Definição 3.3. *Sejam K um corpo ordenado e A um subconjunto de K . Um elemento $x \in K$ é uma cota inferior de A se $x \leq y$, para todo $y \in A$. Dizemos que A é limitado inferiormente se ele possui cota inferior.*

Nem todo conjunto possui cota inferior. Por exemplo, o subconjunto \mathbb{Z} do corpo ordenado \mathbb{Q} não possui cota inferior.

Definição 3.4. *Sejam K um corpo ordenado e A um subconjunto de K . Dizemos que A é **limitado** se ele é limitado inferiormente e superiormente.*

Exemplo 3.5. *O conjunto $A = \{[0, 1) \cap \mathbb{Q}\}$ é limitado no corpo ordenado \mathbb{Q} , pois 0 é cota inferior e 1 cota superior de A .*

Com isso, vejamos as definições formais de supremo e ínfimo.

Definição 3.6. *Sejam K um corpo ordenado e $A \subset K$ limitado superiormente. O **supremo** do conjunto A denotado por $\sup A$, é definido como a menor das cotas superiores de A (quando existe), isto é, $x = \sup A$ se:*

- (i) $x \geq y$ para todo $y \in A$;
- (ii) se z é uma cota superior de A , então $x \leq z$.

Veremos um exemplo a seguir.

Exemplo 3.7. *Considere o corpo ordenado \mathbb{Q} e o subconjunto $A = \{y \in \mathbb{Q} : 0 < y < 1\}$. Todo racional maior ou igual a 1 é cota superior de A e $\sup A = 1$. Considere agora o conjunto $B = \{y \in \mathbb{Q} : 0 \leq y \leq 1\}$. É fácil ver que $\sup B = 1$. Assim, o supremo (quando existe) pode pertencer ou não ao conjunto.*

Definição 3.8. *Sejam K um corpo ordenado e $A \subset K$ limitado inferiormente. O **ínfimo** do conjunto A , denotado por $\inf A$, é definido como a maior das cotas inferiores de A (quando existe), isto é, $x = \inf A$ se:*

- (i) $x \leq y$ para todo $y \in A$;
- (ii) se z é uma cota inferior de A , então $z \leq x$.

Vejamos alguns exemplos a seguir.

Exemplo 3.9. *Considere o corpo ordenado \mathbb{Q} e o subconjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Então $\inf A = 0$.*

Exemplo 3.10. *Considere o seguinte subconjunto de \mathbb{Q} :*

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2, x > 0\}.$$

Demonstraremos que A não tem ínfimo em \mathbb{Q} . Seja

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2, x > 0\}.$$

Como não existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$, segue que dado $r \in \mathbb{Q}$ positivo, ou $r \in A$ ou $r \in B$. Agora, vamos mostrar que:

(1) se $x \in A$, existe $y \in A$ tal que $y < x$;

(2) se $x \in B$, existe $y \in B$ tal que $x < y$.

Para provar (1), escreva $x = \frac{p}{q}$. Vamos procurar por um inteiro n tal que $\frac{np-1}{nq} \in A$, pois assim teremos que $y = \frac{np-1}{nq} \in A$ e $y < x$. Temos que

$$\frac{np-1}{nq} \in A \Leftrightarrow \frac{(np-1)^2}{n^2q^2} > 2 \Leftrightarrow n^2p^2 - 2np + 1 > 2n^2q^2 \Leftrightarrow n^2(p^2 - 2q^2) - 2np + 1 > 0.$$

Como $x = \frac{p}{q} \in A$, $p^2 - 2q^2 > 0$. Daí, existe n suficientemente grande tal que $n^2(p^2 - 2q^2) - 2np + 1 > 0$, ou seja, tal que $\frac{np-1}{nq} \in A$. Isso prova (1). De modo análogo provamos (2).

Suponhamos agora que A tenha um ínfimo $x_0 \in \mathbb{Q}$. Então $x_0 \leq x$ para todo $x \in A$. Por (1), temos que $x_0 \notin A$. Observe que 1 é cota inferior para A . Logo, $x_0 \geq 1 > 0$. Assim, x_0 deve pertencer a B . De (2), obtemos $z \in B$ tal que $x_0 < z$. Como $z^2 < 2$, segue que $z < x$ para todo $x \in A$, ou seja, z é uma cota inferior de A . Isso é uma contradição, pois $z > x_0 = \inf A$.

Logo, A não tem ínfimo.

Observação 3.11. Usando um argumento análogo ao anterior é possível mostrar que o conjunto B não possui supremo em \mathbb{Q} .

Por fim, gostaríamos de comentar que no conjunto dos números reais todo conjunto limitado superiormente tem supremo e todo conjunto limitado inferiormente tem ínfimo. Na verdade, o conjunto dos reais é construído para que essa propriedade seja válida. Para mais informações sobre esse assunto, indicamos as referências [1], [2] e [3].

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

Referências

- [1] FIGUEIREIDO, D. G. **Análise 1**. 2. ed. LTC, 1996.
- [2] LIMA, E. L. **Análise Real: Funções de uma variável**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. v. 1.
- [3] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. v. 1.
- [4] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.



Conjuntos de Julia e de Mandelbrot para a família $P_{d,c}(z) = z^d + c$

Euler Borges Ferreira Filho

UFU, Faculdade de Engenharia Elétrica, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

euler.ferreira@ufu.br

Jean Venato Santos

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

jvenatos@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Dinâmica complexa.
Conjuntos de Julia.
Conjuntos de Mandelbrot.

Dentre as ferramentas típicas de dinâmica complexa se destacam os conjuntos de Julia e de Mandelbrot que, para além de se destacarem por sua estética exuberante, sintetizam importantes informações sobre a dinâmica estudada. Com inspiração no texto [1] de Robert L. Devaney, serão apresentadas propriedades fundamentais para esses conjuntos no âmbito da família de polinômios $P_{d,c}(z) = z^d + c$.

1 Introdução

Em sistemas dinâmicos discretos, tem papel fundamental o estudo das iteradas de funções $F : X \rightarrow X$ definidas em espaços métricos. Dado um ponto $x_0 \in X$, $x_1 = F(x_0)$ é a primeira iterada de x_0 pela F , $x_2 = F^2(x_0)$ é sua segunda iterada, ou seja, $F(F(x_0))$ e, em geral, $x_n = F^n(x_0)$ é a n -ésima composição de F em x_0 . A sequência de pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ é chamada *órbita de x_0 pela F* . O entendimento das órbitas e seus destinos quando n se torna grande é um objetivo central por fornecer informações primordiais da dinâmica modelada por F .

Nessa direção, para uma função complexa $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se destacam seu *conjunto preenchido de Julia* constituído pelos pontos de órbitas limitadas e o *conjunto de Julia* que é sua fronteira. Para a família de polinômios $P_{d,c}(z) = z^d + c$ em \mathbb{C} , o *conjunto de Mandelbrot* M_d consiste de todos os parâmetros c em \mathbb{C} cujo conjunto de Julia é conexo.

Com inspiração nos apontamentos de Devaney em [1, Capítulos 16 e 17] sobre a família quadrática $Q_c(z) = z^2 + c$, será apresentada uma análise de tais conjuntos para a família $P_{d,c}(z) = z^d + c$, para $d > 2$ natural e $c, z \in \mathbb{C}$. Na próxima seção será visto que, a depender do parâmetro c , $P_{d,c}$ pode ter conjuntos preenchidos de Julia ($K_{d,c}$) conexos ou com infinitas componentes disjuntas. Na Seção 3 se provará que estas são as únicas possibilidades para $K_{d,c}$ e as mesmas são caracterizadas pela órbita do 0 escapar ou não para o infinito. Tal resultado é conhecido por Dicotomia fundamental. Esses resultados se apoiam no Critério de escape e no Princípio da aplicação de fronteiras, conforme lemas 2.1 e 2.2. O trabalho finaliza estabelecendo certas simetrias em conjuntos de Mandelbrot.

2 Conjuntos de Julia da família $P_{d,c}$

Primeiramente, considere a dinâmica de $P_{d,0}(z) = z^d$ no plano complexo. Escrevendo $z_0 = re^{i\theta}$, a órbita de z_0 por $P_{d,0}$ é: $z_0 = re^{i\theta}$, $z_1 = r^d e^{i(d\theta)}$, $z_2 = r^{d^2} e^{i(d^2\theta)}$, \dots , $z_n = r^{d^n} e^{i(d^n\theta)}$, \dots . Assim, há três possibilidades para o destino de uma órbita de $P_{d,0}$ quando $n \rightarrow \infty$: $P_{d,0}^n(z_0) \rightarrow 0$ se $r < 1$, $P_{d,0}^n(z_0) \rightarrow \infty$ se $r > 1$ ou $P_{d,0}^n(z_0)$ permanece na circunferência de raio 1 para todo n se $r = 1$. Portanto, para $P_{d,0}$, o conjunto preenchido de Julia é $K_{d,0} = \{z; |z| \leq 1\}$ e o conjunto de Julia é $J_{d,0} = \{z; |z| = 1\}$. Em particular, $J_{d,0}$ é conexo. Outra consequência é que 0 está no Mandelbrot M_d .

No Teorema 2.3 serão exibidos parâmetros c para os quais o conjunto preenchido de Julia de $P_{d,c}$ é desconexo. Para isto serão necessários dois resultados preliminares:

Lema 2.1 (Critério de escape). *Se existe inteiro não negativo k , tal que $|P_{d,c}^k(z)| \geq |c|$ e $|P_{d,c}^k(z)| > 2^{\frac{1}{d-1}}$, então $|P_{d,c}^{k+1}(z)| > (1 + \lambda)|P_{d,c}^k(z)|$ e conseqüentemente $|P_{d,c}^n(z)| \rightarrow \infty$ se $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Inicialmente suponha que a propriedade é válida para $k = 0$, ou seja, que $|z| > |c|$ e $|z| > 2^{\frac{1}{d-1}}$. Pela propriedade da desigualdade triangular: $|P_{d,c}(z)| \geq |z|^d - |c| \geq |z|^d - |z| = |z|(|z|^{d-1} - 1)$. Como $|z|^{d-1} > 2$, $(|z|^{d-1} - 1)$ pode ser escrito como $(1 + \lambda)$, com $\lambda > 0$, donde a desigualdade anterior se reescreve por $|P_{d,c}(z)| \geq |z|(1 + \lambda)$. Aplicando esse argumento repetidamente, temos $|P_{d,c}^n(z)| \geq |z|(1 + \lambda)^n$. Dessa forma, $|P_{d,c}^n(z)| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Agora note que se $|P_{d,c}^k(z)| \geq |c|$ e $|P_{d,c}^k(z)| > 2^{\frac{1}{d-1}}$ para algum $k \geq 0$, então aplicando o raciocínio acima segue que $|P_{d,c}^{k+1}(z)| > (1 + \lambda)|P_{d,c}^k(z)|$ e portanto $|P_{d,c}^n(z)| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. ■

Lema 2.2 (Princípio da aplicação de fronteiras). *Seja R um subconjunto fechado do plano complexo. Se z_0 é um ponto interior de R , então $P_{d,c}(z_0)$ é interior a $P_{d,c}(R)$.*

Demonstração. Dado $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ no interior de R , é possível escolher $r_1 < r_0 < r_2$ e $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ tais que $W = \{r e^{i\theta}; r_1 < r < r_2, \theta_1 < \theta < \theta_2\}$ é uma vizinhança de z_0 contida em R . Note que $P_{d,0}(W) = \{r e^{i\theta}; r_1^d < r < r_2^d, d\theta_1 < \theta < d\theta_2\}$, com $P_{d,0}(z_0)$ contido no interior de $P_{d,0}(W)$. Dessa forma, como $P_{d,c}$ só translada de c os valores obtidos por $P_{d,0}$, temos que $P_{d,c}(z_0)$ está no interior de $P_{d,c}(W) \subset P_{d,c}(R)$ e portanto $P_{d,c}(z_0)$ está no interior de $P_{d,c}(R)$. Se $z_0 = 0$, W é tomado como um pequeno disco centrado na origem. ■

Teorema 2.3. *Se $|c| > 2^{\frac{1}{d-1}}$, então o conjunto $K_{d,c}$ possui infinitas componentes disjuntas.*

Demonstração. Seja D o disco dado por $\{z; |z| \leq |c|\}$. Note que, o conjunto preenchido de Julia $K_{d,c}$ de $P_{d,c}$ é dado por $\bigcap_{n \geq 0} P_{d,c}^{-n}(D)$, sendo $P_{d,c}^{-n}(D) = \{z; P_{d,c}^n \in D\}$. De fato, caso $z \notin \bigcap_{n \geq 0} P_{d,c}^{-n}(z)$, então $P_{d,c}^k(z) \notin D$ para algum $k \geq 0$. Logo, pelo Critério de escape, a órbita de z tende ao infinito.

A fim de entender $K_{d,c} = \bigcap_{n \geq 0} P_{d,c}^{-n}(D)$, considere a circunferência $C = \{z; |z| = |c|\}$, que corresponde à fronteira de D . Note que o conjunto $P_{d,c}^{-1}(C)$ é obtido subtraindo c de cada ponto de C , o que resulta numa circunferência passando pela origem, e extraíndo a d -ésima raiz complexa deste resultado. Como cada ponto desse conjunto possui d raízes d -ésimas, exceto 0, que possui somente uma, o resultado será o contorno de uma rosa de d pétalas contida em D , conforme Figura 1 para o caso $d = 3$. Além disto, pelo Princípio da aplicação de fronteiras, $P_{d,c}^{-1}(D)$ é precisamente esta rosa com cada pétala. Tais pétalas serão denotadas por I_0, I_1, \dots, I_{d-1} . Como $P_{d,c}$ é injetora em cada uma das pétalas da rosa e como $P_{d,c}^{-1}(C)$ está contido no interior de D , segue que $P_{d,c}^{-2}(C)$ corresponde ao contorno de d rosas menores de d pétalas, cada uma contida em uma das pétalas I_0, I_1, \dots, I_{d-1} de $P_{d,c}^{-1}(C)$. Pelo Princípio da aplicação de fronteiras, temos que $P_{d,c}^{-2}(D)$ consiste dessas d rosas com suas d^2 pétalas, conforme ilustrado na Figura 1, para $d = 3$.

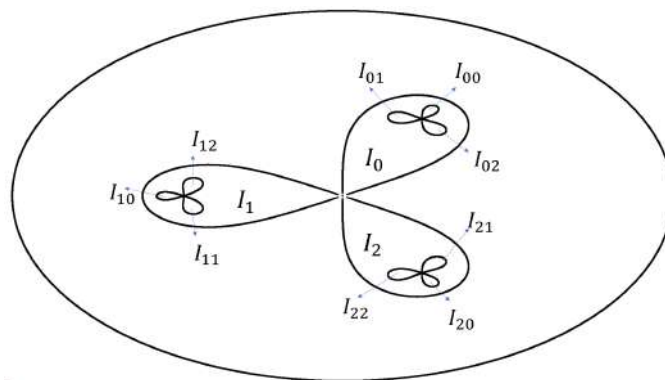


Figura 1: Iterações reversas de C por $P_{3,c}$.

Defina $I_{00} = \{z \in I_0; P_{d,c}(z) \in I_0\}$, $I_{01} = \{z \in I_0; P_{d,c}(z) \in I_1\}$, \dots , $I_{0(d-1)} = \{z \in I_0; P_{d,c}(z) \in I_{d-1}\}$, \dots , $I_{(d-1)0} = \{z \in I_{d-1}; P_{d,c}(z) \in I_0\}$, $I_{(d-1)1} = \{z \in I_{d-1}; P_{d,c}(z) \in I_1\}$, \dots , $I_{(d-1)(d-1)} = \{z \in I_{d-1}; P_{d,c}(z) \in I_{d-1}\}$. Assim, $P_{d,c}^{-2}(D)$ consiste de uma rosa em I_0 cujas pétalas

são $I_{00}, I_{01}, I_{02}, \dots, I_{0(d-1)}$, uma rosa em I_1 cujas pétalas são $I_{10}, I_{11}, I_{12}, \dots, I_{1(d-1)}$ e sucessivamente a uma rosa em I_{d-1} com pétalas $I_{(d-1)0}, I_{(d-1)1}, I_{(d-1)2}, \dots, I_{(d-1)(d-1)}$.

Seguindo esse raciocínio, é possível ver que $P_{d,c}^{-n}(D)$ consiste de d^{n-1} rosas com d^n pétalas no interior das pétalas associadas a $P_{d,c}^{-(n-1)}(D)$. Dada uma sequência $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$ de termos $s_i \in \{0, 1, 2, \dots, d-1\}$, para $i = 0, 1, \dots, n$, segue que $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = \{z \in D; z \in I_{s_0}, P_{d,c}(z) \in I_{s_1}, \dots, P_{d,c}^n(z) \in I_{s_n}\}$ é uma pétala de $P_{d,c}^{-(n+1)}(D)$. Além disso, $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = I_{s_0} \cap P_{d,c}^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap P_{d,c}^{-n}(I_{s_n}) = I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}} \cap P_{d,c}^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}$.

Assim, $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ forma uma família de pétalas fechadas e encaixadas e portanto, pela propriedade da interseção de conjuntos fechados encaixados, segue que $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ é não vazio. Então, se $z \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$, $P_{d,c}^k(z) \in D$ para todo k , donde z pertence a $K_{d,c}$.

Uma interseção infinita de pétalas da forma $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ é uma componente de $K_{d,c}$, sendo que quaisquer duas componentes são necessariamente disjuntas. Reciprocamente, se $z \in K_{d,c}$, z está em uma dessas componentes. Em particular, $K_{d,c}$ possui infinitas componentes conexas. ■

3 Dicotomia fundamental e o conjunto de Mandelbrot

Sendo a derivada de $P_{d,c}(z) = z^d + c$ dada por $P'_{d,c}(z) = dz^{d-1}$, tal família tem o 0 como único ponto crítico. Na seção anterior foram apresentados um exemplo na família $P_{d,c}$ para o qual o conjunto preenchido de Julia $K_{d,c}$ é conexo e uma subfamília de $P_{d,c}$ na qual $K_{d,c}$ possui infinitas componentes disjuntas. Um resultado fundamental em dinâmica complexa é que na família $P_{d,c}$ estas são as únicas possibilidades, as quais são caracterizadas pela órbita do ponto crítico escapar ou não para o infinito:

Teorema 3.1 (Dicotomia Fundamental). *Para $P_{d,c}(z) = z^d + c$:*

1. $P_{d,c}^n(0) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $K_{d,c}$ é composto de infinitas componentes disjuntas, ou,
2. A órbita do ponto crítico 0 é limitada e $K_{d,c}$ é conexo.

Demonstração. Se $|c| > 2^{\frac{1}{d-1}}$, como $|P_{d,c}(0)| = |c|$, do Critério de Escape, a órbita de 0 escapará para o infinito e, do Teorema 2.3, $K_{d,c}$ possui infinitas componentes disjuntas.

Considere agora o caso $|c| \leq 2^{\frac{1}{d-1}}$. Pelo Critério de escape, caso $|P_{d,c}^n(0)| > 2^{\frac{1}{d-1}}$ para algum n , a órbita de 0 tende a infinito. Assim, primeiro suponha que $|P_{d,c}^n(0)| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, para algum c com $|c| \leq 2^{\frac{1}{d-1}}$. Logo, existe um primeiro k tal que $|P_{d,c}^k(0)| > 2^{\frac{1}{d-1}}$. Seja $\rho = |P_{d,c}^k(0)|$ e considere a circunferência C_ρ de raio ρ centrada na origem. A aplicação $P_{d,c}$ leva C_ρ na circunferência de raio ρ^d centrada em c . Pelo Critério de escape, as órbitas de C_ρ escapam para o infinito e, mais ainda, a imagem da circunferência se situa no exterior do disco $D_\rho = \{z; |z| \leq \rho\}$. Pelo Princípio da aplicação de fronteiras, o interior do disco D_ρ é levado ao interior de $P_{d,c}(D_\rho)$.

Agora note que $P_{d,c}^{-1}(D_\rho)$ está inteiramente contido em D_ρ , já que C_ρ é levado por $P_{d,c}$ para fora de D_ρ . Mais ainda, 0 está no interior de $P_{d,c}^{-1}(D_\rho)$, desde que $P_{d,c}(0) = c$ e $|c| < \rho$. Consequentemente, $P_{d,c}^{-1}(D_\rho)$ tem como fronteira uma curva fechada simples contendo 0 no seu interior.

Como k é o menor inteiro para o qual $P_{d,c}^k(0) \in C_\rho$, segue que pode-se repetir o argumento acima $k - 1$ vezes, obtendo-se $P_{d,c}^{-(k-1)}(D_\rho) \subset \dots \subset P_{d,c}^{-1}(D_\rho) \subset D_\rho$ com $P_{d,c}^{-j}(D_\rho)$ contido no interior de $P_{d,c}^{-j+1}(D_\rho)$ para $j = 1, \dots, k - 1$. Mais ainda, $P_{d,c}^{-j}(D_\rho)$ tem como fronteira uma curva fechada simples que é aplicada por $P_{d,c}$ na fronteira de $P_{d,c}^{-j+1}(D_\rho)$.

Na k -ésima iteração, a situação muda, com o ponto crítico 0 pertencendo à fronteira de $P_{d,c}^{-k}(D_\rho)$. Com efeito, como $P_{d,c}^k(0) \in C_\rho$, segue que 0 está na fronteira de $P_{d,c}^{-k}(D_\rho)$. Então a fronteira de $P_{d,c}^{-k}(D_\rho)$ é uma rosa de d pétalas como descrita na demonstração do Teorema 2.3, sendo que cada uma dessas d pétalas são levadas injetivamente por $P_{d,c}$ no interior de $P_{d,c}^{-k+1}(D_\rho)$.

A partir daí, como na demonstração do Teorema 2.3, $P_{d,c}^{-k-1}(D_\rho)$ consistirá de d rosas de d pétalas contidas no interior das pétalas de $P_{d,c}^{-k}(D_\rho)$, sendo que em geral, $P_{d,c}^{-k-n}(D_\rho)$ torna-se d^{n-1} rosas de d pétalas, mostrando que $K_{d,c}$ se decompõem em infinitas componentes disjuntas quando a órbita de 0 escapa para o infinito, provando a primeira parte da dicotomia.

A única outra possibilidade é que $P_{d,c}^k(0)$ nunca saia do círculo de raio $2^{\frac{1}{d-1}}$. Nesse caso, para qualquer $\rho > 2^{\frac{1}{d-1}}$, $P_{d,c}^{-k}(D_\rho)$ é sempre uma região conexa limitada por uma curva simples. Assim, $\bigcap_{n \geq \infty} P_{d,c}^{-n}(D_\rho)$ é um conjunto conexo, como usual este é o conjunto preenchido de Julia. ■

3.1 Algoritmo para a construção do conjunto de Mandelbrot

Com inspiração na Dicotomia fundamental, segue:

Algoritmo para o conjunto de Mandelbrot de $P_{d,c}$: Escolha um número máximo de iterações (N), considere o quadrado de lado $2 \cdot 2^{\frac{1}{d-1}}$ centrado na origem. Escolha k pontos igualmente distribuídos pelo quadrado e os considere como c . Itere 0 por $P_{d,c}$ até que $|P_{d,c}^i(0)| > 2^{\frac{1}{d-1}}$ pela primeira vez para $i \leq N$, ou até a N -ésima iterada. Caso o ponto não extravase o limite, pinte o ponto de preto. Caso contrário, divida o intervalo $[0, N]$ em 7 subintervalos de mesmo tamanho e associe a cada subintervalo uma cor. Pinte o ponto com a cor associada ao intervalo contendo i .

Tal algoritmo foi implementado utilizando Python e está disponível em [2]. Sua aplicação na família $P_{3,c}$ está exposta na Figura 2.

3.2 Simetria do conjunto de Mandelbrot

Conjuntos de Mandelbrot possuem propriedades intrigantes, tais como a seguinte:

Proposição 3.2. *Os conjuntos de Mandelbrot associados à família $P_{d,c}$ possuem simetria com relação à rotação pelo ângulo $\frac{2\pi}{d-1}$ em torno da origem.*

Demonstração. Basta exibir uma conjugação que preserva a origem entre $P_{d,c}$ e $P_{d,q}$, com $q = e^{\frac{2\pi i}{d-1}}c$. Com efeito, nesse caso o comportamento da órbita do 0 será equivalente via conjugação para c e q . Para isso, considere a função linear e portanto contínua $H(z) = ze^{\frac{2\pi i}{d-1}}$ cuja inversa $H^{-1}(z) = ze^{-\frac{2\pi i}{d-1}}$ também é contínua. E note que $P_{d,q}(H(z)) = (ze^{\frac{2\pi i}{d-1}})^d + e^{\frac{2\pi i}{d-1}}c = z^d e^{\frac{2\pi i(d-1)}{d-1}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{d-1}} + e^{\frac{2\pi i}{d-1}}c = (z^d + c)e^{\frac{2\pi i}{d-1}} = H(P_{d,c}(z))$. Estabelecendo a conjugação assim como a referida simetria. ■

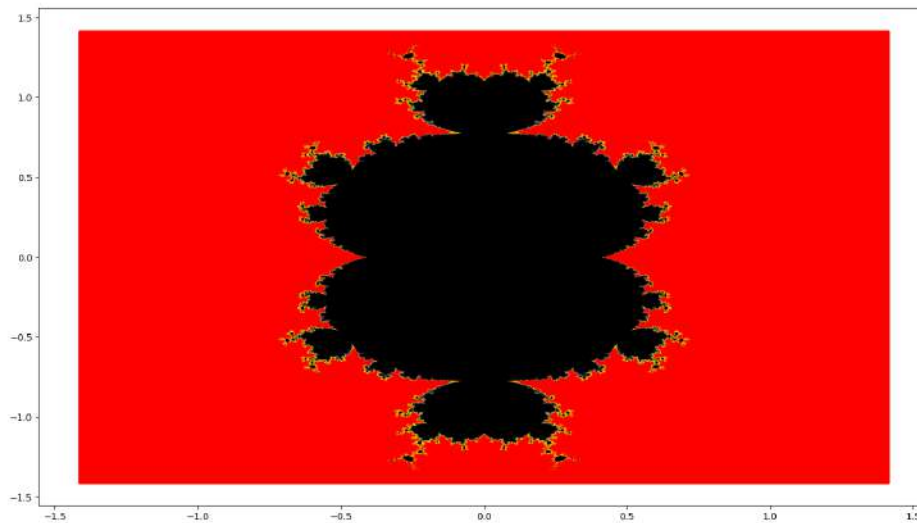


Figura 2: Conjunto de Mandelbrot para $P_{3,c}$. Produzido via [2].

4 Considerações finais

Em [1, pág. 246], Devaney observa que no 1º caso da Dicotomia fundamental, é possível provar que o conjunto preenchido de Julia $K_{d,c}$ equivale a um conjunto de Cantor, porém a prova envolve sofisticadas ferramentas de análise complexa. Portanto, vale um resultado mais forte na Dicotomia: ou $K_{d,c}$ é totalmente desconexo ou $K_{d,c}$ é conexo. No primeiro caso, conclui-se que os conjuntos de Julia $J_{d,c}$ e preenchido de Julia coincidem e portanto a dinâmica interessante se restringe ao conjunto $J_{d,c}$, uma vez que fora do mesmo as órbitas escapam para o infinito. Devaney ressalta ainda que, neste caso, a dinâmica de $P_{d,c}$ no conjunto $J_{d,c}$ é conjugada ao do shift de d símbolos, o qual exhibe comportamento caótico, como pode ser visto com detalhes em [3].

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pela bolsa de iniciação científica via programa PICME.

Referências

- [1] DEVANEY, R. L. **A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiments**, Perseus Books Publishing, 1992.
- [2] FERREIRA FILHO, E. B. **Rotina em Python para plotar conjunto de Mandelbrot**. Disponível em: <<https://github.com/euler-borges/JuliaMandelbrotConstruction/>>. Acesso em: 7 abr. 2024.
- [3] FERREIRA FILHO, E. B.; VENATO-SANTOS, J. **Dinâmica simbólica com N símbolos**. Anais da XXIII SEMAT e XIII SEMEST. Uberlândia, 2023. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1LgFcFo6D-GJzQuDUKZzize_PmbiL_LmV/view>. Acesso em: 7 abr. 2024.



Sistema Baseado em Regras Fuzzy para Avaliação de Risco de Acidentes

Fellipe Viana Resende

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica
fellipe.resende@ufu.br

Ana Paula Tremura Galves

Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística
ana.galves@ufu.br

Cássio Resende Jascoski

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica
cassiojascoski@ufu.br

Otávio Daniel Dias dos Santos

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica
otavio.dias@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Risco de acidentes.
Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF).
Conjunto Fuzzy.

O trabalho apresenta um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) cujo objetivo é atribuir graus de pertencimento a números para um sistema de variáveis que não seja binário. Neste caso, estamos lidando com a classificação quantitativa do risco de acidentes em uma determinada situação. Na metodologia, utilizamos os parâmetros de velocidade, intensidade de chuva, tempo de desatenção e nível de álcool no sangue, que são variáveis pertinentes ao nosso objetivo. Com isso, obtivemos diversos tipos de respostas para as mais variadas situações.

1 Introdução

A modelagem matemática é essencial para analisar e prever fenômenos complexos em diversas áreas do conhecimento. Em sistemas determinísticos, a precisão das previsões depende da exatidão dos dados e parâmetros. Já em modelos estocásticos, as soluções consideram uma distribuição estatística dos dados, sendo úteis para analisar variações sujeitas a essas distribuições.

Para modelar situações com elementos heterogêneos, como a previsão de acidentes em rodovias, a teoria dos conjuntos fuzzy é aplicada. Os conjuntos fuzzy permitem representar e lidar com a imprecisão e incerteza dos dados de forma flexível e intuitiva, cada elemento considerado tem um grau de pertinência em um conjunto fuzzy, refletindo a intensidade da característica em questão. Nesse contexto, o Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) surge como uma aplicação prática dos conceitos dos conjuntos fuzzy, empregando regras linguísticas para inferir resultados a partir de conjuntos fuzzy de dados de entrada. Esses sistemas permitem inferências a partir de dados imprecisos ou subjetivos. Este trabalho tem como objetivo explorar a utilização do SBRF na modelagem do risco de acidentes em rodovias. Para um estudo mais aprofundado de conceitos preliminares consultar [1].

2 Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF)

Sistemas baseados em regras Fuzzy são usados para modelar e lidar com incerteza e imprecisão em sistemas complexos. Eles servem para mapear entradas vagas para saídas definidas, permitindo uma abordagem flexível e adaptável à tomada de decisões.

Em um SBRF, a ordem das etapas geralmente segue um processo sequencial que envolve a definição das variáveis de entrada, variáveis de saída, formulação das regras e escolha do método de defuzzificação.

As variáveis de entrada (também chamadas **variáveis linguísticas**) são parâmetros do sistema que podem ser difusos, o que significa que eles não são representados por números precisos, mas sim por intervalos ou distribuições de valores. Por exemplo, em um sistema de controle de temperatura, uma variável de entrada poderia ser a "temperatura ambiente", com valores difusos (também chamados **termos linguísticos**) como "frio", "morno" e "quente". Esses valores difusos permitem que o sistema fuzzy lide com a imprecisão e a incerteza de forma mais flexível do que os sistemas tradicionais, que exigem valores precisos e bem definidos.

As variáveis de saída são os resultados ou ações que o sistema produz com base nas entradas difusas. Continuando com o exemplo do controle de temperatura, uma variável de saída poderia ser a "quantidade de aquecimento", com valores difusos como "nenhum", "baixo" e "alto".

As regras fuzzy são formuladas com base no conhecimento especializado sobre o problema e no comportamento desejado do sistema. Elas geralmente seguem uma estrutura de "se... então...", onde as condições do antecedente determinam as ações ou conclusões do consequente. Por exemplo, uma regra pode ser: "Se a temperatura estiver baixa e a umidade estiver alta, então aumente a quantidade de

aquecimento".

A escolha das regras depende do conhecimento do domínio e da lógica subjacente ao sistema. As regras são selecionadas para cobrir uma ampla gama de situações possíveis e garantir que o sistema possa tomar decisões adequadas em diferentes cenários. A experiência prática e o conhecimento especializado desempenham um papel crucial na determinação das regras mais apropriadas.

O método de defuzzificação é escolhido para converter as saídas difusas do sistema em valores ou ações concretas. Existem vários métodos de defuzzificação, como o centro de área, média dos máximos, e escolha do máximo, entre outros. A escolha do método depende das características do problema, das preferências do projetista e das propriedades desejadas para a saída final.

Neste trabalho o método de defuzzificação utilizado é o método de Mamdani, um dos métodos mais populares de defuzzificação em SBRF. Ele foi proposto pelo engenheiro Lotfi A. Zadeh, o mesmo criador da teoria dos conjuntos fuzzy.

No método de Mamdani, a defuzzificação é feita calculando-se o centro de massa ponderado das saídas difusas produzidas pelas regras fuzzy. Em outras palavras, é calculada a média ponderada dos valores das saídas difusas de todas as regras ativadas pelo conjunto de entradas. Cada valor de saída difusa é ponderado pela medida de pertinência da regra associada.

Este método é amplamente utilizado devido à sua simplicidade e eficácia.

2.1 SBRF aplicado ao risco de acidentes em rodovias

Criar um SBRF relacionado ao risco de acidentes em rodovias pode melhorar significativamente a segurança viária, salvando vidas, reduzindo custos associados a acidentes e promovendo uma mobilidade mais segura e eficiente. Isso pode aumentar a conscientização sobre os principais fatores que contribuem para acidentes rodoviários, incentivando comportamentos mais seguros por parte dos motoristas. Esses sistemas podem ser usados por autoridades de trânsito, empresas de transporte e motoristas para tomar decisões informadas sobre segurança na estrada.

A ideia do trabalho é apresentar um SBRF utilizado para modelar o risco de acidentes em rodovias, considerando as seguintes variáveis de entrada: velocidade do veículo (medida em quilômetros por hora - km/h), intensidade de chuva (medida em milímetros por hora - mm/h), tempo de desatenção do motorista (medido em segundos - s) e nível de álcool no sangue do motorista (medido em miligramas de álcool por decilitro de sangue - mg/dl). Tais variáveis foram colocadas com as seguintes referências [4] e [5].

É relevante ressaltar que no texto foram utilizados pesquisas e dados reais fundamentados para a escolha das funções de pertinência e seus parâmetros, sendo assim o ajuste da mesma foi encontrado buscando coesão entre os dados obtidos anteriormente já citados.

As variáveis de entrada são classificadas da seguinte forma e suas funções de pertinência são trapezoidais, conforme ilustrado nas Figuras 1, 2, 3 e 4.

- Velocidade do veículo:

- De 0 a 50 km/h é considerada *baixa*;
 - De 50 a 100 km/h é considerada *média*;
 - Maior do que 100 km/h é considerada *alta*.
- Intensidade de chuva (ver [2]):
 - De 0 a 10 mm/h é considerada *fraca*;
 - De 10 a 50 mm/h é considerada *forte*;
 - Maior do que 50 mm/h é considerada *muito forte*.
 - Tempo de desatenção do motorista (ver [3]):
 - De 0 a 1 segundo é considerado *pouco*;
 - De 1 a 3 segundos é considerado *médio*;
 - Maior do que 3 segundos é considerado *muito*.
 - Nível de álcool no sangue do motorista(ver [6]):
 - De 0 a 99 mg/dl é considerado *baixo*;
 - De 100 a 199 mg/dl é considerado *médio*;
 - De 200 a 299 mg/dl é considerado *médio alto*;
 - Maior do que 300 mg/dl é considerado *alto*.

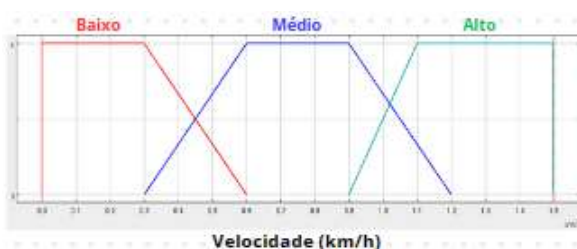


Figura 1: Funções de pertinência da velocidade (km/h).



Figura 2: Funções de pertinência da intensidade de chuva (mm/h).

Esses gráficos representam a pertinência de cada valor de entrada ao seu respectivo conjunto fuzzy. Por exemplo, no gráfico da intensidade de chuva, um valor de 30 mm/h teria uma pertinência alta no conjunto *forte* e baixa nos outros conjuntos. Essa representação gráfica facilita a compreensão e interpretação dos conjuntos fuzzy em cada entrada do sistema. A pertinência de número 1 é a maior possível em um SBRF e indica um alto nível de pertencimento à variável indicada. Neste exemplo citado acima, 30 mm/h pertence 100% ao nível *forte* de chuva.

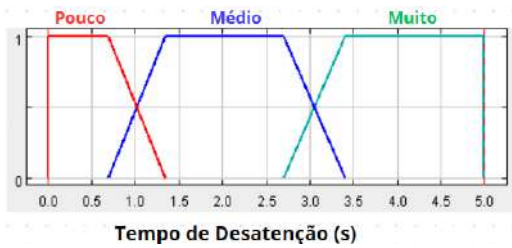


Figura 3: Funções de pertinência do tempo de desatenção do motorista (s).

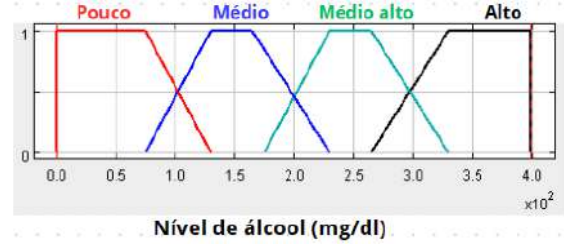


Figura 4: Funções de pertinência do nível de álcool no sangue (mg/dl).

A variável de saída é o risco de acidentes em rodovias, medido em porcentagem e calculado em um intervalo de 0 a 100%. Os termos linguísticos são: *baixo*, *médio baixo*, *médio*, *médio alto* e *alto*, conforme ilustrado na Figura 5. Cada termo linguístico tem um intervalo associado que reflete o grau de pertinência de um determinado nível de risco. Por exemplo:

- De 0 a 25% é considerado *baixo*;
- De 18 a 43% é considerado *médio baixo*;
- De 37 a 62% é considerado *médio*;
- De 55 a 80% é considerado *médio alto*;
- De 75 a 100% é considerado *alto*.

Esses intervalos são apenas exemplos e podem variar dependendo do contexto e das regras do sistema.

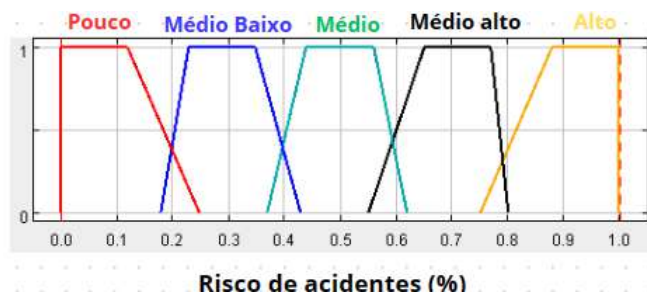


Figura 5: Funções de pertinência do risco de acidentes em rodovias.

Para definir as regras do sistema, podemos usar uma abordagem baseada em lógica fuzzy. Cada regra é uma sentença condicional do tipo "Se A e B e C e D, então E", onde A, B, C e D são as condições (entradas) e E é a consequência (saída). No SBRF aplicado ao risco de acidentes em rodovias, foi utilizado um conjunto de 108 regras.

Exemplos de regras para o nosso sistema:

1. Se a velocidade é alta e a intensidade de chuva é muito forte e o tempo de desatenção do motorista é alto e o nível de álcool no sangue é alto, então o risco de acidentes é alto.

2. *Se a velocidade é baixa e a intensidade de chuva é fraca e o tempo de desatenção do motorista é baixo e o nível de álcool no sangue é baixo, então o risco de acidentes é baixo.*

3. *Se a velocidade é média e a intensidade de chuva é forte e o tempo de desatenção é médio e o nível de álcool no sangue é médio, então o risco de acidentes é médio.*

Esses são exemplos simplificados e genéricos. O conjunto completo de regras deve ser, e foi, elaborado com base em conhecimento especializado e dados empíricos, levando em consideração a complexidade das interações entre as variáveis.

Para determinar o risco de acidentes no final, o SBRF utiliza essas regras e o método de defuzzificação de Mamdani para calcular a pertinência de cada nível de risco a partir das condições fornecidas pelas entradas. O resultado final é um valor de risco de acidentes que reflete a combinação das condições específicas em termos de velocidade, intensidade de chuva, tempo de desatenção do motorista e nível de álcool no sangue. Esse valor pode então ser mapeado para um dos termos linguísticos de risco de acidentes em rodovias definidos anteriormente.

3 Considerações finais

A informação final gerada pelo SBRF para medir o risco de acidentes em rodovias pode ser ajustada e aprimorada com base em dados empíricos e feedback especializado, tornando-o uma ferramenta valiosa para avaliar e classificar o nível de perigo potencial na estrada. Isso poderia auxiliar na implementação de medidas preventivas, como alertas aos motoristas, restrições de velocidade ou intervenções de segurança, visando reduzir o risco de acidentes.

Referências

- [1] BARROS, L.C.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R.S.M. **Teoria dos conjuntos fuzzy com aplicações**. 3ª edição. São Carlos: SBMAC, 2023.
- [2] GUITARRARA, Paloma. **Chuvas**. Brasil Escola <[link referencia](#)>. Acesso em: 30 mar. 2024.
- [3] **Celular e direção: conheça os riscos dessa prática perigosa**. <[link referencia](#)>. Acesso em: 30 mar. 2024.
- [4] **As principais causas de acidentes de trânsito no Brasil**. <[link referencia](#)>. Acesso em: 30 mar. 2024.
- [5] **As 10 principais causas de acidentes**. <[link referencia](#)>. Acesso em: 30 mar. 2024.
- [6] **Álcool afeta funcionamento do corpo mesmo quando ingerido em pouca quantidade; entenda o impacto**. <[link referencia](#)>. Acesso em: 30 mar. 2024.



Introdução aos Métodos Iterativos para Zeros de Funções Reais

Fernanda de Carvalho Pinto

UFU, FEELT, Uberlândia, MG, Brasil
fernanda.carvalho@ufu.br

Germano Abud de Rezende

UFU, FAMAT, Uberlândia, MG, Brasil
germano.abud@ufu.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos alguns métodos iterativos para se aproximar zeros (raízes) de funções reais, isto é, soluções de equações do tipo $f(x) = 0$. Para certas funções pode ser trabalhoso ou até impossível de se obter o valor exato de suas raízes. Através de métodos iterativos podemos aproximar uma solução de $f(x) = 0$ com a precisão desejada (número de casas decimais corretas) e, sob certas condições, num tempo curto.

Na seção 1 apresentamos o Método da Bisseção e o Método do Ponto Fixo. Dentre os métodos apresentados destacamos o método de Newton-Raphson, na seção 2, que além de apresentar convergência quadrática, é de fácil compreensão e implementação.

Na seção 3 apresentamos uma aplicação do Método de Newton-Raphson em sistemas de controle, particularmente em um Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) e apresentamos brevemente uma segunda aplicação neste contexto, onde desejamos obter as raízes de um polinômio de grau maior. Esta última aplicação encontra-se em fase de estudo e por este motivo não apresentamos um detalhamento maior.

Palavras-chave

Zeros.
Raízes.
Newton-Raphson.

1 Introdução

A compreensão do comportamento de sistemas dinâmicos, a modelagem de fenômenos naturais, a análise de dados, entre outras situações práticas, muitas vezes se relacionam com a obtenção de zeros (raízes) de alguma função real. Ou seja, tais problemas envolvem equações do tipo $f(x) = 0$ onde desejamos obter um número real ξ tal que $f(\xi) = 0$.

Para certas equações é possível obter a solução exata, por exemplo, para uma equação polinomial do segundo grau utilizamos a *Fórmula de Bhaskara*. Contudo, certas equações exigem processos mais complicados para encontrar suas raízes, sendo algumas vezes impossível obter a solução exata. Assim, foram desenvolvidos diversos métodos que buscam aproximar os zeros de funções por meio de processos iterativos, até atingir a precisão desejada.

A seguir falaremos brevemente sobre três métodos matemáticos para obtenção de zeros de funções e apresentaremos uma aplicação em um problema real.

1.1 Método da Bissecção

O Método da Bissecção exige que a função seja contínua no intervalo $[a, b]$. Pelo Teorema de Bolzano, se a função é contínua em $[a, b]$ e satisfaz $f(a)f(b) < 0$ então existe ao menos um zero no interior deste intervalo [1, 2].

Assim, esse método busca reduzir a amplitude do intervalo dividindo-a ao meio em cada iteração i , escolhendo-se os subintervalos $[a_i, b_i]$ de forma que $f(a_i)$ e $f(b_i)$ sempre tenham sinais opostos, garantindo que há um zero da função entre eles. Esse processo é repetido até que $(b_i - a_i) < \epsilon$.

Exemplo 1.1. Consideremos a função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ (o qual uma de suas raízes é $\xi_1 = 0.337608956$), com intervalo inicial $I_0 = [0, 1]$ e precisão desejada de $\epsilon = 10^{-3}$. Observe que $f(0) > 0$ e $f(1) < 0$, logo temos uma raiz neste intervalo.

Iteração	x	f(x)	b - a
1	0.5	-1.375	0.5
2	0.25	0.765625	0.25
⋮	⋮	⋮	⋮
9	0.337890625	$-2.43862718 * 10^{-3}$	$1.953125 * 10^{-3}$
10	0.336914063	$6.01691846 * 10^{-3}$	$9.765625 * 10^{-4}$

Tabela 1: Iterações do Método da Bissecção

Percebe-se que a cada iteração o valor de $f(x)$ é reduzido (aproximando-se de zero). O processo continua até que a amplitude do intervalo seja menor que a precisão ϵ estabelecida inicialmente. Para esse exemplo, que trata de uma equação relativamente simples, foram necessárias 10 iterações.

Antes de iniciar a resolução do problema, é possível estimar o número mínimo de iterações necessárias para se resolver o problema. O número mínimo k de iterações satisfaz $k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\epsilon)}{\log(2)}$ [1, 2].

Verificando o exercício anterior obtemos $\frac{\log(1-0)-\log(10^{-3})}{\log(2)} = 9,96578$ e, logo, são necessárias no mínimo 10 iterações, em conformidade com o constatado na Tabela 1.

1.2 Método do Ponto Fixo (MPF)

O Método do Ponto Fixo (MPF) consiste em transformar uma equação $f(x) = 0$, com f contínua no intervalo $[a, b]$, em um equação equivalente $x = \varphi(x)$, ou seja, um ponto fixo de φ corresponde a um zero de f . Observe que para uma mesma equação, há diferentes escolhas para $\varphi(x)$ [1]. Para ilustrar o método, vamos considerar a equação $x^2 + x - 6 = 0$ (cujas raízes $\xi_1 = -3, \xi_2 = 2$ são obtidas facilmente). Algumas opções para φ seriam: $\varphi_1(x) = 6 - x^2, \varphi_2(x) = \pm\sqrt{6 - x}, \varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$ e $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$. A partir da função $\varphi(x)$ escolhida e de uma aproximação inicial para x_0 (obtida por exemplo, pelo Método da Bissecção ou uma análise gráfica) gera-se uma sequência x_k de aproximações para ξ pela relação $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Como a função φ é tal que $f(\xi) = 0$ somente se $\varphi(\xi) = \xi$, o problema passa a ser encontrar um ponto fixo de $\varphi(x)$ [1, 2]. Contudo, em alguns casos, a função φ escolhida pode não ser ideal para a resolução do problema (a sequência não converge para a solução do problema).

Exemplo 1.2. Para a equação $x^2 + x - 6 = 0$, consideremos a função $\varphi_1(x)$ e $x_0 = 1.5$. Tentaremos obter uma aproximação para a raiz $\xi_2 = 2$:

$$x_1 = \varphi(x_0) = 3,75, x_2 = \varphi(x_1) = -8.0625, x_3 = \varphi(x_2) = -59.003906, x_4 = \varphi(x_3) = -3475.4609 \dots$$

É possível perceber que x_k não está convergindo para a raiz $\xi_2 = 2$.

Desta forma, destaca-se a importância do seguinte teorema:

Teorema 1.3. Seja ξ uma raiz da equação $f(x) = 0$, isolada num intervalo I centrado em ξ . Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$. Se $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I , $|\varphi(x)| < 1, \forall x \in I$ e $x_0 \in I$, então a sequência (x_k) gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge para ξ [1, 2].

No Exemplo 1.2 acima, observe que $|\varphi_1'(x)| = |-2x| = 2|x| \geq 1$, se $|x| \geq 0.5$. Logo para qualquer x próximo da raiz $\xi = 2$ a função de iteração $\varphi_1(x)$ não gera uma sequência convergente.

Nesse método, as iterações são feitas até que $|x_k - x_{k-1}| = |\varphi(x_{k-1}) - x_{k-1}| < \epsilon$ ou se $|f(x_k)| < \epsilon$, assim escolhe-se x_k como raiz aproximada de ξ . Pode-se verificar que o MPF tem convergência linear [2].

Antes de iniciar a próxima seção, observamos que, de modo geral, uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$ assume a forma $\varphi(x) = x + A(x)f(x)$, onde $A(\xi) \neq 0$ (ponto fixo de φ) [1, 2].

2 Método de Newton-Raphson

O Método de Newton-Raphson é amplamente utilizado para encontrar os zeros de uma função, sendo um Método de Ponto Fixo. Neste contexto, destaca-se que, na tentativa de acelerar a convergência do MPF, esse procedimento busca escolher uma função de iteração $\varphi(x)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$. Portanto, deseja-se obter a função $A(x)$ tal que $\varphi'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0$, donde obtém-se $A(\xi) = \frac{-1}{f'(\xi)}$. Logo, escolhemos $A(x) = \frac{-1}{f'(x)}$ e a função de iteração desejada é $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Exemplo 2.1. Para $f(x) = x^2 + x - 6$, $\xi_2 = 2$, $x_0 = 1,5$ e $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 + x - 6}{2x + 1}$ obtemos a sequência $x_0 = 1,5$, $x_1 = \varphi(x_0) = 2,0625$, $x_2 = \varphi(x_1) = 2,00076$, $x_3 = \varphi(x_2) = 2,00000$. E a raiz foi obtida com 3 iterações.

2.1 Ordem de convergência

Supondo que o método de Newton gera uma sequência (x_k) que converge para ξ , se o analisarmos como sendo um MPF, constataríamos que ele apresenta convergência linear. Contudo, escolhendo a função de iteração tal que $\varphi'(\xi) = 0$, é possível verificar, por meio do desenvolvimento de Taylor de $f(x)$ em torno de x_k , que o método possui convergência quadrática [2].

Exemplo 2.2. A convergência quadrática pode ser facilmente observada a partir da solução de um problema que visa encontrar a raiz quadrada de um número A positivo, ou seja obter a raiz de $f(x) = x^2 - A$. Seja $A = 7$ ($f(x)$ apresenta, portanto, uma raiz $\xi_1 = 2.64575131106$) e $x_0 = 2$. Fazendo $\varphi(x) = x - \frac{x^2 - 7}{2x}$ obtemos:

$$\begin{array}{lll} x_0 = 2 & x_2 = 2, \overline{64772723} & x_4 = 2, \overline{645751311} \\ x_1 = 2,75 & x_3 = 2, \overline{645752048} & x_5 = 2, \overline{645751311} \end{array}$$

A partir da segunda iteração é possível perceber que os dígitos corretos duplicam, ilustrando a convergência quadrática do método.

3 Aplicação do método de Newton-Raphson

3.1 Controlador Proporcional Integral Derivativo

O Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) é um mecanismo essencial em sistemas de controle, usado para manter uma variável controlada em um valor desejado ajustando a saída do sistema com base no erro entre a referência e o valor real da variável.

A grande maioria dos sistemas necessitam de um controle para que alguns parâmetros possam ser ajustados à maneira desejada ou para ajustar interferências presentes no sistema, logo, o mecanismo de

controle é amplamente utilizado, como em sistemas de controle de temperatura em câmaras, controle de velocidade em motores elétricos, entre diversos outros.

3.2 Importância dos zeros das funções para aplicação do controle PID

Um circuito RLC é apresentado na Figura 1, o qual R, L e C são componentes elétricos, sendo, respectivamente, um resistor, um indutor e um capacitor. Assim, esses componentes afetam a passagem de corrente do circuito, e conseqüentemente seu comportamento, dessa forma um controle pode ser aplicado.

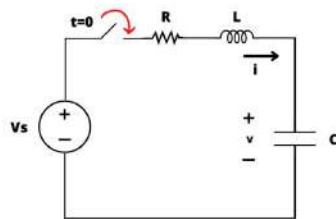


Figura 1: Circuito elétrico do tipo RLC série.
(Fonte: <https://embarcados.com.br/circuito-rlc-em-serie/>)

Esse sistema é descrito fisicamente pela seguinte equação diferencial 1:

$$\frac{d^2v}{dt^2}(t) + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt}(t) + \frac{1}{LC}v(t) = \frac{1}{LC}V_s(t) \quad (1)$$

Aplicando a Transformada de Laplace e dividindo a saída ($v(s)$) pela entrada ($V_s(s)$), obtém-se:

$$\frac{V(s)}{V_s(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (2)$$

Agora aplicamos o método de Newton-Raphson na expressão do denominador da Equação 2, com o objetivo de fatorar esta expressão.

Por exemplo, suponhamos os seguintes valores para os parâmetros: $R = 40\Omega$, $L = 100mH$ e $C = 400\mu F$. Considere ainda $\varphi(s) = s - \frac{s^2 + 400s + 25000}{2s + 400}$, $s_0 = -75$ para primeira raiz e $s_0 = -325$ para segunda raiz (os valores de s_0 foram obtidos por meio da plotagem do gráfico da função). Obtemos deste modo, a seguinte sequência:

$$\begin{aligned} x_0 &= -75 & x_1 &= -77,5 & x_2 &= -77,52551 & x_3 &= -77,52551 \\ x_0 &= -325 & x_1 &= -322,5 & x_2 &= -322,47449 & x_3 &= -322,47449 \end{aligned}$$

Desta forma, $-77,52551$ e $-322,47449$ são aproximações para as raízes do polinômio do denominador da Equação 2. Tais valores são ditos *polos do sistema*, enquanto as raízes do polinômio do numerador (que nesse caso não possui raiz), são ditos *zeros do sistema*. Os polos e os zeros determinam alguns parâmetros do sistema, como dito anteriormente, e a associação do sistema com o controlador PID busca modificar esses parâmetros por meio da adição ou remoção desses polos e zeros.

Assim, os controladores PID adicionam polos e zeros a esse sistema de modo a modificar esses parâmetros obtendo um sistema final com um comportamento diferente ou melhor do que o atual, como por exemplo um sistema mais rápido ou menos oscilatório, por isso destaca-se a importância de encontrar os polos e zeros do sistema inicial.

3.3 Aplicando o Método de Newton-Raphson em Problemas Maiores

Em uma indústria, por diversas vezes, os engenheiros se deparam com situações em que o sistema precisa controlar uma variável, por exemplo, controlar um tanque de aquecimento com agitação contínua cujo fluxo de alimentação é líquido precisa ser mantido sob aquecimento para manter sua composição uniforme [3], necessitando do controle da temperatura que o tanque se encontra para não haver danos ao produto final.

Assim, é necessário obter a equação que rege o funcionamento desse tanque por meio da coleta de dados em diferentes condições e, após esse procedimento, aplicar um controle PID sob o sistema do tanque de modo que ele controle corretamente uma determinada temperatura estabelecida pelo usuário.

Em [3] um modelo é apresentado e a equação característica corresponde a um polinômio de grau 4. Tal polinômio possui duas raízes reais. Desejamos aplicar o método de Newton-Raphson para obter aproximações para tais raízes e após divisões sucessivas, obter um polinômio na forma $(x - x_1)(x - x_2)q(x)$ onde $q(x)$ tem duas raízes complexas, que podem ser obtidas via fórmula de Bháskara.

4 Conclusão

Com este trabalho percebemos a importância dos métodos iterativos para se aproximar os zeros de uma função. O Método de Newton-Raphson destaca-se nesta classe de métodos pela sua eficiência e aplicabilidade. No futuro, desejamos investigar mais aplicações do método em problemas reais de engenharia, além de aprofundarmos os estudos nos métodos de ajustes de curvas e cálculo numérico de uma maneira mais geral. Na condição de bolsista do PICME, agradeço ao CNPq pelo fomento.

Referências

- [1] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico, aspectos teóricos e computacionais**. 2a edição. Pearson, 2002.
- [2] FRANCO, N. M. B. **Cálculo numérico**. 1a edição. Pearson, 2006.
- [3] JOHNSON, J. R. **Simulação da Estabilidade de um Sistema de Controle em um Tanque de Aquecimento com Agitação sob Ação PID**. Monografia de Graduação: Escola de Engenharia de Lorena (USP). Lorena-SP, 2021.



Uma introdução à Teoria de Códigos

Gabriel Henrique de Oliveira

UFU, IME, Uberlândia, MG, Brasil
gabrielhenrique25052003@gmail.com

Cícero Carvalho

UFU, IME, Uberlândia, MG, Brasil
cicero@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Teoria de códigos.
Álgebra comutativa.
Corpos finitos.

Neste trabalho abordaremos conceitos fundamentais para a Teoria de Códigos, ramo da matemática que estuda e desenvolve códigos corretores de erros através de ferramentas da Álgebra Comutativa, como corpos finitos e anéis de polinômios, e também da Álgebra Linear, através de espaços vetoriais e transformações lineares. Os códigos corretores de erros são utilizados na transmissão de dados, permitindo que se identifique e corrija os erros advindos do processo de transmissão da informação. No final do trabalho, apresentaremos também exemplos de códigos muito utilizados atualmente.

1 Introdução

Nas últimas décadas, com o desenvolvimento e a popularização de novas tecnologias, a transmissão de informações se tornou uma ferramenta fundamental para nossa sociedade, e junto dela, surgiu o problema de como corrigir erros que acontecem durante essas transmissões de dados.

Um exemplo seria a troca de mensagem entre dois celulares, o celular A , que seria o emissor, transmite a informação 011, que no caminho ao receptor, neste caso, o celular B , passa para 010, contendo um erro no terceiro dígito. Uma possibilidade em que poderíamos pensar para a solução desse problema, seria que o receptor enviasse uma nova mensagem ao emissor pedindo a confirmação da informação recebida, porém, novos erros seriam introduzidos, e esse ciclo se repetiria infinitamente, tornando esta opção inviável. Recorremos então à Teoria de Códigos Corretores de Erros, fundada pelo matemático C. E. Shannon em um trabalho publicado em 1948. Tais códigos possuem como finalidade identificar e corrigir erros na transmissão de dados, tendo, portanto, grande importância no desenvolvimento tecnológico.

2 Elementos da teoria de Corpos Finitos

A Teoria de Códigos baseia-se em grande parte na álgebra linear sobre corpos finitos. Nesta seção, abordaremos alguns tópicos de corpos finitos e, ao final, mostraremos uma maneira de relacioná-los com espaços vetoriais.

Definição 2.1. *Um anel comutativo K com unidade no qual todo elemento não nulo é invertível (ou seja, tem inverso com relação à multiplicação) é chamado de corpo.*

Em particular, se a cardinalidade do corpo K é finita, o chamaremos de corpo finito.

Proposição 2.2. *Seja K um corpo finito. Então K possui p^n elementos, onde p é um número primo e n é um inteiro positivo (denotaremos o conjunto dos inteiros positivos por $\mathbb{Z}_{>0}$).*

Iremos agora mostrar alguns exemplos de corpos finitos.

Exemplo 2.3. *O conjunto $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ é um corpo finito com 2 elementos.*

Exemplo 2.4. *O conjunto $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ é um corpo finito com 5 elementos.*

Exemplo 2.5. *De maneira geral, os corpos finitos mais simples são da forma $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$, onde p é um número primo.*

Apresentaremos agora um resultado muito importante sobre corpos finitos.

Teorema 2.6. *Para todos os números inteiros positivos p e n com p primo, existe um corpo com p^n elementos. Além disso, dois corpos finitos com o mesmo número de elementos são isomorfos.*

Para ligarmos os corpos finitos à álgebra linear, vamos recordar um resultado sobre espaços vetoriais.

Proposição 2.7. *Se K é um corpo, então K^n , com $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ é um espaço vetorial sobre K de dimensão n .*

Denotaremos por \mathbb{F}_q o único (a menos de isomorfismos) corpo finito com q elementos, de maneira que, para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tenhamos um espaço vetorial \mathbb{F}_q^n de dimensão n sobre \mathbb{F}_q .

3 Códigos

Começaremos essa seção com a definição do nosso objeto principal de estudo.

Definição 3.1. *Um conjunto $C \subset \mathbb{F}_q^n$ será chamado de código (linear) se for um subespaço vetorial de \mathbb{F}_q^n .*

Apresentamos agora o importante conceito de distância de Hamming.

Definição 3.2. *Dados dois elementos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^n$, a distância de Hamming entre $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ é definida como*

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\{i; u_i \neq v_i, 1 \leq i \leq n\}|.$$

As propriedades abaixo mostram que a distância de Hamming define uma métrica em \mathbb{F}_q^n .

Proposição 3.3. *Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{F}_q^n$, valem as seguintes propriedades:*

1. *Positividade: $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.*
2. *Simetria: $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$*
3. *Desigualdade triangular $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.*

Definição 3.4. *Seja C um código. A distância mínima de C é o número*

$$d = \min\{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \mathbf{u}, \mathbf{v} \in C \text{ e } \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\}.$$

Dado um elemento $\mathbf{a} \in \mathbb{F}_q^n$ e um número real $t \geq 0$, podemos definir o disco e a esfera de centro em \mathbf{a} e raio t como sendo respectivamente os conjuntos

$$D(\mathbf{a}, t) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n; d(\mathbf{u}, \mathbf{a}) \leq t\},$$

$$S(\mathbf{a}, t) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n; d(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = t\}.$$

Dado um código C com distância mínima d , definimos

$$\kappa = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$

onde $\lfloor t \rfloor$ representa a parte inteira de um número real t .

Lema 3.5. *Seja C um código com distância mínima d . Se \mathbf{c} e \mathbf{c}' são elementos distintos de C , então*

$$D(\mathbf{c}, \kappa) \cap D(\mathbf{c}', \kappa) = \emptyset, \text{ onde } \kappa = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor.$$

A distância mínima d de um código têm sua grande relevância devido ao seguinte teorema.

Teorema 3.6. *Seja C um código com distância mínima d . Então C pode corrigir até $\kappa = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ erros e detectar até $d-1$ erros.*

4 Matriz geradora

Seja $C \subset \mathbb{F}_q^n$ um código. Chamamos de parâmetros do código C a terna de inteiros (n, k, d) , onde k é a dimensão de C sobre \mathbb{F}_q e d é a distância mínima de C .

Seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ uma base ordenada de C e considere a matriz G , cujas linhas são os vetores $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$, com $i = 1, \dots, k$, isto é

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & \cdots & v_{kn} \end{pmatrix}$$

A matriz G é chamada matriz geradora do código C associada à base β . Dizemos que um código C' é um código equivalente a C se sua matriz geradora pode ser obtida da matriz G através de permutações de colunas ou pela multiplicação de colunas por um escalar não nulo. Dois códigos equivalentes têm os mesmos parâmetros.

Definição 4.1. *Diremos que uma matriz geradora G está na forma padrão se tivermos*

$$G = (Id_k | A),$$

onde Id_k é uma matriz identidade $k \times k$ e A é uma matriz $k \times (n-k)$.

Dado um código C , nem sempre é possível encontrarmos uma matriz geradora de C na forma padrão, o que evidencia a importância do seguinte resultado.

Teorema 4.2. *Dado um código C , existe um código equivalente C' com matriz geradora na forma padrão.*

5 Códigos Duais

Definição 5.1. Definimos o código dual de um código C como sendo o conjunto

$$C^\perp = \{\mathbf{v} \in K^n; \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{u} \in C\}.$$

onde $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ é o produto interno usual e K é um corpo.

Corolário 5.2. Se D é um código em \mathbb{F}_q^n de dimensão m , então D^\perp é um código de dimensão $n - m$.

Corolário 5.3. Seja C um código. Temos então que $(C^\perp)^\perp = C$.

Proposição 5.4. Se $G = (Id_k | A)$ é uma matriz geradora na forma padrão de um código C , então, a matriz $H = (-A^t | Id_{n-k})$ é uma matriz geradora de C^\perp .

A matriz H geradora de C^\perp é chamada matriz teste de paridade de C . Os próximos dois resultados relacionam a H com a distância mínima de C .

Proposição 5.5. Seja H a matriz teste de paridade de um código C . Temos que a distância mínima de C é maior ou igual a s se, e somente se, quaisquer $s - 1$ colunas de H são linearmente independentes.

Teorema 5.6. Seja H a matriz teste de paridade de um código C . Temos que a distância mínima de C é igual a s se, e somente se, quaisquer $s - 1$ colunas de H são linearmente independentes e existem s colunas de H linearmente dependentes.

Corolário 5.7. Os parâmetros (n, k, d) de um código linear satisfazem a seguinte desigualdade, conhecida como Cota de Singleton

$$d \leq n - k + 1.$$

6 Exemplos

6.1 Códigos de Hamming

Um código de Hamming de ordem m sobre \mathbb{F}_2 é um código com matriz teste de paridade H_m de ordem $m \times n$, cujas colunas são os elementos de $\mathbb{F}_2^m \setminus \{0\}$ numa ordem qualquer. Desta maneira, a matriz H_m determina o código C a menos de equivalências. O comprimento de um código de Hamming de ordem m é $n = 2^m - 1$, e assim, sua dimensão é $k = n - m = 2^m - m - 1$. Podemos verificar que $d = 3$, pois em H_m é fácil achar três colunas que sejam linearmente dependentes, e quaisquer duas são linearmente independentes.

Um exemplo numérico pode ser obtido considerando a matriz

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sendo essa a matriz de um código de Hamming correspondente a $m = 3$.

6.2 Códigos de Reed-Solomon

Seja \mathbb{F}_q um corpo finito e seja

$$\mathbb{F}_q[X]_{k-1} := \{P \in \mathbb{F}_q[X]; \text{gr}(P) \leq k-1\} \cup \{0\}.$$

Este conjunto é um espaço vetorial de dimensão k cuja base é $\{1, X, X^2, \dots, X^{k-1}\}$. Seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq k$, e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ elementos distintos de \mathbb{F}_q . Consideremos a transformação linear

$$\begin{aligned} T : \mathbb{F}_q[X]_{k-1} &\rightarrow \mathbb{F}_q^n \\ P &\mapsto (P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

Podemos destacar que T é uma transformação linear injetora, pois

$$\text{Ker}(T) = \{P \in \mathbb{F}_q[X]_{k-1}; P(\alpha_1) = \dots = P(\alpha_n) = 0\} = \{0\}$$

pois um polinômio não nulo P de grau menor do que k não pode ter n raízes distintas.

A imagem C de T é um código de comprimento n e dimensão k . Tais códigos são chamados de Códigos de Reed-Solomon, que são utilizados por exemplo em “QR codes” e nos discos de DVDs.

7 Considerações finais

Neste trabalho buscamos mostrar a forte influência da álgebra linear sobre a teoria de códigos, apresentando também conceitos básicos para tal teoria, bem como uma motivação para seu estudo e desenvolvimento.

8 Agradecimentos

Na condição de bolsista PICME (Programa de Iniciação Científica e Mestrado), agradeço ao CNPq e ao IMPA.

Referências

- [1] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Códigos corretores de erros**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2017.
- [2] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1976.



Cálculo do maior autovalor de uma matriz pelo método da potência.

Gabriel Melo Gomes Pereira

UFU, Matemática, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
gabriel.pereira3@ufu.br

Santos Alberto Enriquez Remigio

UFU, Matemática, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
santos.er@ufu.br

Palavras-chave

Método das Potências.
Maior autovalor.
Cálculo Numérico.

Resumo

O Método das Potências é uma técnica iterativa para calcular o maior autovalor de uma matriz. Utilizado em cálculo numérico, destaca-se pela simplicidade computacional e rápida convergência. Aplicações abrangentes incluem resolução de sistemas lineares e análise de dados, tornando-o uma ferramenta essencial em áreas como física, engenharia e aprendizado de máquina.

1 Introdução

O método das potências consiste em determinar o autovalor de maior valor absoluto de uma matriz A e seu autovetor correspondente, sem a necessidade de se calcular o polinômio característico. Ao longo deste artigo, exploraremos a essência do Método das Potências e abordaremos seus princípios fundamentais. Em suma, o Método das Potências destaca-se como uma ferramenta essencial no arsenal do cientista e engenheiro computacional, desempenhando um papel crucial em análises numéricas e simulações. O cálculo do autovalor de maior valor absoluto de uma matriz é de grande importância em diversas aplicações práticas, especialmente nas áreas de álgebra linear, estatística, engenharia, entre outras. O autovalor de maior valor em módulo é frequentemente referido como o autovalor dominante e possui implicações significativas. Podemos citar alguns exemplos: Em métodos numéricos e algoritmos iterativos, o autovalor dominante influencia diretamente na taxa de convergência; Na análise de dados, especialmente na análise de componentes principais, o autovalor dominante está associado à variância máxima dos dados. Logo, existe uma necessidade de calcular-se o autovalor de maior módulo de uma matriz. A seguir apresentam-se algumas definições e propriedades que permitirão entender o Método das Potências, uma metodologia para determinar o autovalor de maior módulo

Definição 1.1. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n , com entradas reais, dizemos que um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A quando existe um vetor não nulo v tal que:*

$$Av = \lambda v.$$

Neste caso, v é dito um autovetor de A associado a λ .

Definição 1.2. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n , o polinômio de grau n dado por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é denominado polinômio característico da matriz A .*

Definição 1.3. *Uma matriz A é diagonalizável se existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.*

Quando A é diagonalizável, existe uma base constituída por autovetores de A . Logo, qualquer vetor u_0 é uma combinação linear destes autovetores. Esse fato será usado na demonstração do Método das Potências que segue.

2 Método das Potência

Teorema 2.1. *Seja A uma matriz real de ordem n e u_1, u_2, \dots, u_n autovetores de A , com autovalores correspondentes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Suponha que os autovetores u_1, u_2, \dots, u_n de A são linearmente independentes e que seus autovalores verificam a seguinte relação $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.*

Seja a sequência y_k definida por:

$$y_{k+1} = Ay_k, k \in \mathbb{N},$$

onde $y_0 = \sum_{j=1}^n c_j \cdot u_j$, com $c_1 \neq 0$. Então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1,$$

onde o índice r indica a r -ésima componente do vetor, podendo ser qualquer um dos componentes, tendo em mente que alguns componentes convergem mais rapidamente do que outros. Além disso, quando $k \rightarrow \infty$, y_k tende a um múltiplo do autovetor correspondente a λ_1

Demonstração. Temos, por hipótese:

$$y_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n.$$

Agora, lembrando que $Au_i = \lambda_i u_i$, obtemos:

$$\begin{aligned} y_1 &= Ay_0 = c_1 Au_1 + c_2 Au_2 + \dots + c_n Au_n = c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 u_2 + \dots + c_n \lambda_n u_n \\ &= \lambda_1 \left[c_1 u_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_2 + \dots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} u_n \right], \\ y_2 &= Ay_1 = A^2 y_0 = \lambda_1 \left[c_1 Au_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} Au_2 + \dots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} Au_n \right] \\ &= \lambda_1 \left[c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda_2 u_2 + \dots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \lambda_n u_n \right] \\ &= \lambda_1^2 \left[c_1 u_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 u_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^2 u_n \right], \\ &\vdots \\ y_k &= Ay_{k-1} = A^k y_0 = \lambda_1^k \left[c_1 u_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k u_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k u_n \right]. \end{aligned}$$

Pela hipótese, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Consequentemente, para $i = 1, \dots, n$, temos que $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$. Portanto, quando $k \rightarrow \infty$, $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \rightarrow 0$. Assim, o vetor:

$$\left[c_1 u_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k u_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k u_n \right],$$

converge para $c_1 u_1$ que é um múltiplo do auto-vetor correspondente ao auto-valor λ_1 . Assim, λ_1 é obtido de:

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(A^{k+1}y_0)_r}{(A^k y_0)_r}, r = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Observamos que, teoricamente, a equação (1) nos fornece o autovalor de maior valor absoluto de uma matriz A . Contudo, na prática, durante a execução do método das potências, é necessário realizar um processo de normalização nos cálculos para evitar o crescimento ou diminuição exponencial dos valores durante as iterações, o que pode resultar em problemas numéricos e instabilidade no algoritmo. Portanto, para obter λ_1 , empregamos o algoritmo que utiliza um processo de normalização, conforme descrito a seguir. A partir de um vetor y_k , arbitrário, não nulo, construímos dois outros vetores y_{k+1} e z_{k+1} , do seguinte modo:

$$z_{k+1} = Ay_k, \\ y_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}} z_{k+1}, \text{ onde } \alpha_{k+1} = \max_{1 \leq r \leq n} |(z_{k+1})_r|,$$

ou seja, dado um vetor y_0 qualquer, não nulo, construímos a seguinte sequência:

$$z_1 = Ay_0, \\ y_1 = \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \frac{1}{\alpha_1} Ay_0, \alpha_1 = \max_{1 \leq r \leq n} |(z_1)_r|, \\ z_2 = Ay_1 = \frac{1}{\alpha_1} A^2 y_0, \\ y_2 = \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} A^2 y_0, \alpha_2 = \max_{1 \leq r \leq n} |(z_2)_r|, \\ z_3 = Ay_2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} A^3 y_0, \\ \vdots \\ y_k = \frac{1}{\alpha_k} z_k = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} A^k y_0, \alpha_k = \max_{1 \leq r \leq n} |(z_k)_r|, \\ z_{k+1} = Ay_k = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} A^{k+1} y_0.$$

Logo:

$$(z_{k+1})_r = \left(\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} A^{k+1} y_0 \right)_r \quad (2)$$

e

$$(y_k)_r = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} A^k y_0, \alpha_k = \max_{1 \leq r \leq n} |(z_k)_r|. \quad (3)$$

De (1) e (2):

$$\frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \frac{(A^{k+1}y_0)_r}{(A^k y_0)_r}. \quad (4)$$

Mas foi visto que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1.$$

Então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(A^{k+1}y_0)_r}{(A^k y_0)_r} = \lambda_1.$$

■

3 Resultados

Neste estudo, exploramos a eficácia deste método utilizando a linguagem de programação Julia. Assim, foi feita a análise em uma matriz quadrada de tamanho 6×6 .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Os resultados encontrados neste experimento estão apresentados nas Tabelas 1 e 2, onde são comparados com o valor do maior autovalor da matriz $\lambda_1 = 3.801937$.

Tabela 1: Tabela com os resultados do experimento parte 1

Número de Iterações	Valor Encontrado	Erro
1	2.50000	1.301937735804838
2	2.80000	1.0019377358048382
3	3.00000	0.8019377358048381
4	3.119047619047619	0.682890116757219
5	3.1832061068702293	0.6187316289346088
6	3.215827338129496	0.5861103976753421
7	3.231916480238628	0.5700212555662101
8	3.239732348869405	0.5622053869354331
9	3.2435011751299765	0.5584365606748616
10	3.245312019674147	0.5566257161306911

Tabela 2: Tabela com os resultados do experimento parte 2

Número de Iterações	Valor Encontrado	Erro
20	3.2469785446903376	0.5549591911145004
40	3.2469796037170413	0.5549581320877968
80	3.2469796037176217	0.5549581320872163
160	3.2469796505294926	0.5549580852753455
320	3.801866280131869	7.145567296928945e-5
500	3.8019377358048385	4.440892098500626e-16
1000	3.8019377358048385	4.440892098500626e-16

Os resultados mostram que, com o aumento do número de iterações, o valor encontrado se aproxima cada vez mais do valor desejado. Observa-se que o erro diminui significativamente com o aumento do número de iterações, indicando a convergência do método para o resultado desejado.

Referências

- [1] HUMES, A. F. P. C; MELO, I. S. H; YOSHIDA, L. K; MARTINS, W. T. **Noção de Cálculo Numérico**. São Paulo: USP, 1984.
- [2] JULIA DOCUMENTATION. **Julia Language Documentation**. Disponível em: <https://docs.julialang.org/en/v1/>. Acesso em: 10 jan. 2023.
- [3] Dartmouth, Numerical methods. **Chapter 10.3 Power method for approximating eigen values**, ENGS 91, Dartmouth College Hanover. New Hampshire.



Determinação do Polinômio Característico de uma Matriz usando o Traço das Potências da Matriz

Gabriel Melo Gomes Pereira

UFU, Matemática, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
gabriel.pereira3@ufu.br

Santos Alberto Enriquez Remigio

UFU, Matemática, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
santos.er@ufu.br

Palavras-chave

Método de Leverrier.
polinômio característico.
Palavra-chave 3.

Resumo

O artigo aborda o Método de Leverrier, destacando suas propriedades matriciais e conceitos fundamentais de álgebra linear para calcular o polinômio característico de uma matriz. Este método destaca-se pela sua simplicidade e eficácia, utilizando matrizes iterativas para extrair coeficientes importantes de maneira computacionalmente viável.

1 Introdução

A Álgebra Linear desempenha um papel fundamental em diversas disciplinas científicas e tecnológicas, sendo essencial para analisar sistemas lineares e entender suas propriedades. No contexto da álgebra linear, o polinômio característico de uma matriz é uma ferramenta crucial para a determinação dos autovetores e autovalores. Esse polinômio é obtido a partir do determinante da diferença entre a matriz original e um múltiplo da matriz identidade, λI , resultando em um polinômio na variável λ . O polinômio característico fornece informações valiosas sobre as propriedades e o comportamento de sistemas lineares representados por matrizes. Porém, o cálculo do polinômio usando a definição é complicado para matrizes de ordem maior do que 3. Daí a necessidade de se encontrar outros métodos matemáticos que permitam seu cálculo. A seguir apresentamos algumas definições e propriedades que permitem entender o método de Leverrier, uma metodologia para cálculo do polinômio característico.

Definição 1.1. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n , com entradas reais, dizemos que um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A quando existe um vetor não nulo v tal que:*

$$Av = \lambda v.$$

Neste caso, v é dito um autovetor de A associado a λ .

Definição 1.2. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n , o polinômio de grau n dado por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é denominado polinômio característico da matriz A .*

Definição 1.3. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n , o traço da matriz A é denotado por $tr(A)$ e definido por:*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Exemplo 1.4. *Considere a seguinte matriz de ordem 2:*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é obtido calculando o determinante da matriz $A - \lambda I$, onde λ é um escalar e I é a matriz identidade. Logo, o polinômio característico $p(\lambda)$ é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \right) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$

A expressão estendida do polinômio característico seria:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A). \end{aligned}$$

Exemplo 1.5. Considere a seguir matriz de ordem 3:

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de B é um polinômio de grau 3 em λ , denotado aqui por $p(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ e obtido calculando o determinante da matriz $B - \lambda I$, isto é:

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} a - \lambda & b & c \\ d & e - \lambda & f \\ g & h & i - \lambda \end{bmatrix} \right)$$

Mas:

$$\det(B - \lambda I) = (a - \lambda)(e - \lambda)(i - \lambda) + (b \cdot f \cdot g) + (c \cdot d \cdot h) - ((g(e - \lambda)c) + (h \cdot f(a - \lambda)) + ((i - \lambda)d \cdot b))$$

Expandindo a expressão acima e igualando os coeficientes, pode-se verificar que:

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_1 &= a + e + i = \text{tr}(B) \\ a_2 &= -(ai + ei + ae + bd - hf - cg) \\ a_3 &= aei + bfg + cdh - ceg - ahf - idb = \det(B). \end{aligned}$$

Portanto, $p(\lambda) = -\lambda^3 + \text{tr}(B)\lambda^2 + a_2\lambda + \det(B)$

Teorema 1.6. (Teorema de Newton)

Considere o polinômio de coeficientes reais:

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

cujas raízes são: $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Seja ainda:

$$s_k = \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Então,

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i s_{k-i} + k a_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Logo, o conhecimento das somas s_k das potências das raízes, $k = 1, \dots, n$, possibilita a determinação dos coeficientes a_k , para $k = 1, \dots, n$.

Aplicando a relação (1) para $k = 1$, temos que:

$$a_0 s_1 + a_1 = 0.$$

Daí, $s_1 = -\frac{a_1}{a_0}$, onde $s_1 = \sum_1^n x_i$ (soma das raízes do polinômio).

Para os métodos numéricos descritos a seguir, usaremos a seguinte notação para o polinômio característico de uma matriz A , de ordem n :

$$P(\lambda) = (-1)^n [\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_{n-1} \lambda - p_n]. \quad (2)$$

A seguir apresentam-se o Método de Leverrier que fornece o polinômio característico de uma matriz A de ordem n .

2 Metodo de Leverrier

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ seus autovalores. Logo, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os zeros do polinômio característico (2). Da definição de s_k , temos que:

$$s_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

e pelo Teorema de Newton, segue que:

$$k p_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \dots - p_{k-1} s_1, \quad 1 \leq k \leq n \quad (3)$$

Portanto, se conhecermos os $s_k, 1 \leq k \leq n$, poderemos determinar os coeficientes do polinômio característico de $P(\lambda)$: p_1, p_2, \dots, p_n .

Vejamus então como determinar as somas parciais s_k . Fazendo expansão direta do determinante de $A - \lambda I$, o coeficiente de λ^{n-1} em $P(\lambda)$ é $(-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$. Por outro lado, este mesmo coeficiente em (1) é $(-1)^{n+1} p_1$. Logo, devemos ter:

$$p_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Então, de 3, $s_1 = p_1$, e assim:

$$s_1 = \text{tr}(A),$$

isto é, a soma dos autovalores da matriz A é igual ao traço de A . Assim, como os autovalores de A^k são a k -ésima potência dos autovalores de A , temos:

$$s_k = \text{tr}(A^k).$$

Portanto, os números s_1, s_2, \dots, s_n são obtidos através do cálculo das potências de A , e 3 pode ser usada para determinar os coeficientes do polinômio característico. Determinando as raízes deste polinômio por qualquer método numérico, obtemos os autovalores de A .

3 Resultados

Neste estudo, exploramos a eficácia deste método utilizando a linguagem de programação Julia. Assim, foi feita a análise da seguinte matriz quadrada de tamanho 6×6 :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Foi utilizado no trabalho o seguinte código para o cálculo em linguagem Julia:

```

1 x = variable()
2 n = 6
3 A = zeros(n, n)
4
5 A[1,1] = n
6
7 for i =2:n
8     A[1,i] = 1
9     A[i,1] = 1
10    A[i,i] = 1
11 end
12
13 p = zeros(n)
14 s = zeros(n)
15
16 for i in 1:n
17     s[i]=tr(A^i)
18     p[i]= (s[i]-sum(p[j]s[i-j] for j in 1:i-1; init=0) ) / i
19 end
20
21 p = (-1)^n * ( x^n - (sum(p[j]*x^(n-j) for j in 1:n; init=0)))

```

e com isso encontramos que o polinômio característico dessa matriz é:

$$p(\lambda) = 1.0 - 11.0\lambda + 35.0\lambda^2 - 50.0\lambda^3 + 35.0\lambda^4 - 11.0\lambda^5 + 1.0\lambda^6$$

4 Considerações finais

O método de Leverrier evita o cálculo direto do determinante, o que pode ser computacionalmente caro para matrizes grandes. Em vez disso, ele utiliza a relação de recorrência entre os coeficientes do polinômio característico, permitindo calcular os autovalores de forma mais eficiente. Que pode ser usada para a diagonalização de matrizes, análise de sistemas dinâmicos, e redução de dimensionalidade em algoritmos de aprendizado de máquina, como o PCA (Análise de Componentes Principais).

Referências

- [1] HUMES, A. F. P. C; MELO, I. S. H; YOSHIDA, L. K; MARTINS, W. T. **Noção de Cálculo Numérico**. São Paulo: USP, 1984.
- [2] JULIA DOCUMENTATION. **Julia Language Documentation**. Disponível em: <https://docs.julialang.org/en/v1/>. Acesso em: 10 jan. 2023.



O uso de *dashboards* em análise exploratória de dados

Gabriel Moreira Bomfim Santos de Freitas

UFU, IME/Estatística, Uberlândia, MG, Brasil

gabriel.moreira419@ufu.br

Patrícia Viana da Silva

UFU, IME/Estatística, Uberlândia, MG, Brasil

patriciaviana@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Dashboards.
Análise exploratória.
shiny.
League of Legends.

Este trabalho se propõe a investigar a Análise Exploratória de dados por meio da concepção e implementação de *dashboards* utilizando o pacote *Shiny* do programa R. A estatística tem um papel crucial na construção de *dashboards* com uma metodologia que combina o tradicional ferramental teórico da estatística descritiva com a inovação dos painéis dinâmicos de visualização. Além disso, o uso do R permite o pré-processamento, o resumo e a exploração dos dados para embasar a criação das interfaces interativas. Para ilustrar a utilização da metodologia, foram elaborados três *dashboards* a partir de dados dos campeonatos mundiais do jogo League of Legends.

1 Introdução

Em 2021, a humanidade protagonizou a criação de incrível 1 trilhão de megabytes de dados por dia, com previsões projetando um salto extraordinário de 74, em 2021, para 180 zettabytes até 2025 [Gilbert, 2024]. Nesta realidade, é completamente inviável o entendimento desses dados por meio de planilhas e dados brutos, o que faz cada vez mais indispensável o uso de medidas resumo e gráficos que, em conjunto, podem formar algo mais concreto, visando contar uma história mais fluída e de fácil entendimento, por exemplo, com um *dashboard*.

Um *dashboard* é um painel visual que exhibe os indicadores mais importantes necessários para atingir um ou mais objetivos, consolidados e organizados para permitir que as informações sejam monitoradas e ações tomadas rapidamente, Few [2006]. E quando o objetivo é responder uma pergunta ou entender as causas de um problema, a Análise Exploratória de Dados (AED) está na linha de frente. Tukey [1977] escreveu que a AED é um trabalho numérico de detetive, que busca pistas e evidências. Ao contrário da inferência estatística, a AED extrai informações do conjunto de dados sem a necessidade de assumir um modelo probabilístico específico, utilizando técnicas gráficas como ferramentas principais em busca de padrões e estruturas subjacentes.

Ao explorar as funcionalidades do programa R em conjunto com a interatividade do *shiny*, este projeto oferece contribuições valiosas sobre como desenvolver *dashboards* dinâmicos e personalizados. Além de fornecer exemplos concretos e orientações claras para que os usuários possam aplicar essas técnicas em seus próprios projetos, tornando suas análises mais práticas e aperfeiçoadas.

O trabalho está organizado da seguinte forma: a Seção 2 oferece um contexto geral sobre a metodologia da Análise Exploratória e a produção de *Dashboards* com o pacote *shiny*. Na Seção 3 são apresentados a análise exploratória e a produção dos três *dashboards* relacionados a aplicação. Finalmente, a Seção 4 traz a discussão e conclusões do trabalho.

2 Análise Exploratória de Dados e os *dashboards*

A metodologia deste trabalho é desenvolvida com a apresentação da Análise Exploratória de Dados (AED) e as principais métricas da estatística descritiva; os principais aspectos dos *dashboards*; e, por fim, a apresentação do ambiente computacional R e seus pacotes para análise exploratória e o pacote *shiny* com sua estrutura própria para construção de *dashboards*.

A estatística descritiva, oferece uma coletânea de métricas para que possamos aplicar o melhor método respectivo a cada variável, a fim de obter algum conhecimento prévio dos dados.

Definição 2.1. *A Estatística Descritiva, é um ramo da estatística utilizado para resumir ou descrever as características importantes de conjuntos de dados [Triola, 2014].*

As medidas resumo são métricas da estatística descritiva que sintetizam e representam características essenciais de um conjunto de dados e classificam-se em:

Medidas de posição ou locação: Medidas relacionadas à “posição” dos dados, ou ainda valores em torno dos quais as observações da amostra tendem a se agrupar (tendência central). Exemplos: média, mediana, moda [Bussab, 2005].

Medidas de dispersão: Medidas que resumizam a variabilidade de um conjunto de observações, permitindo comparar conjuntos de comportamento diferentes, mesmo que possuam medidas de posição iguais. Exemplos: variância, desvio padrão, amplitude [Bussab, 2005].

As medidas de posição amostrais mais conhecidas são as medidas de tendência central: a moda (Mo), a mediana (Md) e a média (\bar{X}). A moda é o valor que ocorre com maior frequência em um conjunto de dados, indicada, principalmente, para variáveis qualitativas ou categorizadas. Um conjunto de dados pode ter mais de uma moda (multimodal) ou não ter nenhuma quando não há valores repetidos. A mediana, é o valor que divide o conjunto de dados ordenados em duas partes de tamanhos iguais. A média, apresentada em 1, representa o valor médio de um conjunto de dados brutos, calculada somando todos os valores do conjunto e dividindo o resultado pelo número total de valores.

As medidas de dispersão mais conhecidas são a amplitude (A), que é a diferença entre o máximo e o mínimo da amostra, e o desvio padrão (S), apresentada em 2, obtido pela raiz quadrada da variância. O S indica o quanto, em média, os valores de um conjunto de dados estão afastados da média, muito utilizada para indicar qual será o "erro" cometido ao substituir cada observação pela média. Pode ser representado pelo s para amostra. Calculado da seguinte forma:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1)$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}} \quad (2)$$

Também vale ressaltar a importância das técnicas gráficas, como histogramas e gráficos de dispersão, para visualizar a distribuição e relacionamento dos dados, identificar padrões, tendências e outliers. Um gráfico ou diagrama de dispersão é uma representação gráfica que utiliza coordenadas cartesianas para exibir valores de duas variáveis em um conjunto de dados.

2.1 Dashboards

Os *dashboards* têm uma ampla gama de utilidades, incluindo monitoramento de desempenho, análise de tendências, identificação de padrões e comunicação de informações-chave. Few [2006] classifica eles em três tipos: operacionais, utilizados para monitorar operações; estratégicos, são estáticos e fornecem informação unidirecional; e os analíticos, que suportam análise de dados.

Para a produção dos *dashboards* existem diversas ferramentas, que incluem: Tableau (plataforma líder de mercado para criação de *dashboards* interativos), Microsoft Power BI, e Google Data Studio.

2.2 O R e o *shiny*

O projeto [Equipe do R Core \[2023\]](#) é um ambiente computacional para análises estatísticas com linguagem de programação própria e que permite interface com outras plataformas. O R é amplamente utilizado em estatística e em ciência de dados, devido a sua natureza de código aberto, permitindo flexibilidade para a área acadêmica e contando com inovação constante pela sua enorme comunidade de usuários. O R possibilita o uso de seus módulos opcionais, chamados pacotes, permitindo implementar novas técnicas de análises quase diariamente. Um exemplo disso é o pacote *shiny*.

O *shiny* [[Chang, 2023](#)] é uma estrutura de desenvolvimento *web* que permite a criação de aplicativos interativos e interfaces compartilháveis de usuário intuitivas e dinâmicas, sem a necessidade de conhecimento em linguagens *web* como HTML, CSS ou JavaScript. Um aplicativo *shiny* é composto por três elementos principais: A Interface do Usuário (*ui*); O Servidor (*server*); Uma função que chama o *shinyApp*. A Interface do Usuário (*ui*), é responsável pelo visual da sua aplicação *web*. É onde se declara o posicionamento de todas as informações, define as cores iniciais, o tamanho de cada estrutura e outros aspectos relacionados ao design da interface. O servidor, desempenha um papel fundamental na criação da lógica por trás da aplicação *web*. É nele que são criadas bases reativas, funcionalidades para botões, realização de cálculos e até mesmo a possibilidade de alterar o estilo da interface em resposta a determinados eventos. E, por fim, a função *shinyApp* cria a aplicação em si, executando simultaneamente a *ui* e o *server*.

3 Resultados

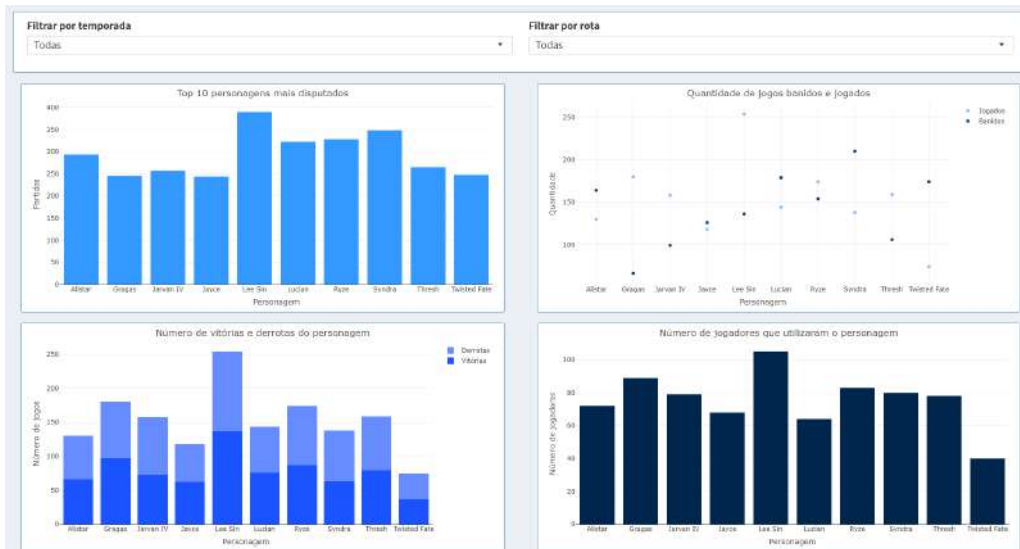
League of Legends (LOL) é um jogo de estratégia disputado em equipes formadas por cinco entre os mais de 140 personagens conhecidos como Campeões. As partidas nos campeonatos mundiais ocorrem com duas equipes se enfrentando para destruir a base uma da outra, principalmente seu núcleo conhecido como *Nexus*. Os dados utilizados no projeto são referentes aos campeonatos mundiais anuais de LOL (2011 a 2022) obtidos na comunidade *Kaggle* [[Pedrocsar](#)].

O conjunto de dados consiste em três arquivos CSV, cada um fornecendo informações específicas: *Players*, detalha o desempenho dos jogadores em cada partida; *Champions*, apresenta os personagens utilizados durante os campeonatos; e *Matches*, fornece informações sobre cada partida. O pacote *tidyverse* do R foi utilizado para realizar uma AED visando compreender as bases, saber como estavam organizadas e realizar alguns tratamentos prévios. Com o pacote *shiny*, foram desenvolvidas três painéis de visualização distintos, um dedicado a cada base de dados.

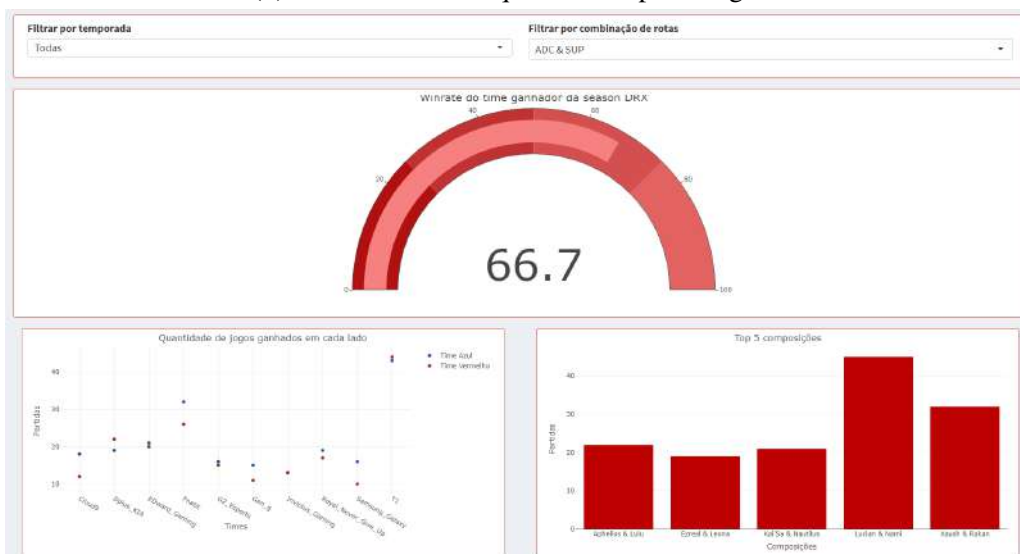
O primeiro *dashboard*, intitulado "Player", Figura 1a, conta a história do jogador, exibindo seu desempenho ao longo das várias temporadas. Ele pode ser utilizada por jogadores de todos os níveis para se inspirarem nas métricas de jogadores profissionais, identificando áreas para melhoria em suas próprias partidas. Além disso, também é útil para equipes na avaliação e comparação de jogadores, ajudando a identificar quem melhor se encaixa no perfil desejado para o time.



(a) Dashboard das características dos jogadores.



(b) Dashboard das frequências de personagem.



(c) Dashboard dos jogos.

O segundo *dashboard*, denominado "Personagens", Figura 1b, destaca os personagens mais escolhidos, os mais banidos e aqueles com a maior taxa de vitória. Este pode ser utilizado para orientar os jogadores na seleção de personagens e aprimorar suas habilidades.

Por fim, o terceiro *dashboard*, "Partidas", Figura 1c, oferece informações gerais sobre os campeonatos, incluindo o time vencedor da temporada, sua taxa de vitória, um gráfico de dispersão mostrando a relação entre vitórias por lado (azul e vermelho), em que o time disputou a partida, e outro mostrando as composições de equipe mais frequentes.

4 Considerações finais

Durante esta investigação, foram aprofundados conceitos e técnicas de estatística básica, abrangendo desde o estudo das variáveis até as medidas de dispersão. Foram empregados recursos computacionais do R para uma análise ampla dos dados e ressalta-se a natureza versátil do *shiny*, não restrita apenas à criação de dashboards. Esta ferramenta oferece inúmeras possibilidades para o desenvolvimento de aplicações analíticas ou interfaces para projetos científicos. A base de dados é de interesse pessoal, o que forneceu uma aplicação atual e atrativa. No entanto, o desafio foi a limitação das informações disponíveis.

Referências

- P. A. Bussab, W. O. e Morettin. Estatística básica (5ª edição). Saraiva, São Paulo, 2005.
- J. e Allaire J. J. e Sievert C. e Schloerke B. e Xie Y. e Allen J. e McPherson J. e Dipert A. e Borges B. Chang, W. e Cheng. *shiny: Framework de Aplicação Web para R*, 2023. URL <https://CRAN.R-project.org/package=shiny>. Versão 1.7.5.1 do pacote R.
- Equipe do R Core. *R: Uma Linguagem e Ambiente para Computação Estatística*. R Foundation for Statistical Computing, Viena, Áustria, 2023. URL <https://www.R-project.org/>.
- S. Few. *Design de Dashboards de Informação: A Comunicação Visual Eficaz de Dados*. O'Reilly Media, Inc., 2006.
- N. Gilbert. O que é análise de big data? definição, tipos e casos de uso. <https://financesonline.com/what-is-big-data-analytics/>, 2024. Acessado em março de 2024.
- Pedrocsar. Estatísticas do league of legends worlds (2011-2022). <https://www.kaggle.com/datasets/pedrocsar/league-of-legends-worlds-20112022-stats>. Acessado em agosto de 2023.
- M. F. Triola. *Introdução à Estatística: atualização da tecnologia*. LTC, Rio de Janeiro, 2014.
- J. W. e outros Tukey. *Análise Exploratória de Dados*, volume 2. Reading, MA, 1977.



A Equação do Calor

Gabriel Pereira Galhardo

INFIS, Instituto de Física, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
gabriel.galhardo@ufu.br

Luciana Aparecida Alves

FAMAT, Faculdade de Matemática, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
luciana.alves@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Equação Diferencial Parcial.
Equação do Calor.
Barra delgada.

Este trabalho aborda um método de resolução da equação do calor, um problema clássico na Física e Matemática que modela a transferência de calor em um meio. Foram empregados o método de separação de variáveis na resolução da equação diferencial parcial que rege o sistema, e séries de Fourier na aplicação da condição de fronteira. Tais fatos permitiram encontrar a solução do problema e a compreensão da influência que as condições iniciais e de contorno possuem na indução de calor em uma barra de ferro. Este estudo é importante na aplicação de técnicas analíticas no entendimento do comportamento de certos materiais.

1 Introdução

A equação do calor é um dos clássicos exemplos de equações diferenciais parciais utilizadas na Física e, é fundamental para o entendimento da transferência de calor em determinado corpo ou material. Neste trabalho, visamos explorar as condições e as definições da transferência de calor em uma barra delgada de tamanho finito e bordas adiabáticas.

A equação do calor é oriunda do princípio da conservação de energia e descreve como a energia térmica se propaga na matéria. A equação relaciona a taxa de transferência de calor no tempo, com a taxa de difusão do calor no material, garantindo, sob determinadas condições, que toda variação de energia interna na barra é igual à diferença de calor que flui para fora e para dentro do material.

A dedução para a solução da equação do calor nos proporciona uma compreensão mais detalhada no processo de condução térmica e permite o desenvolvimento de soluções para problemas práticos, como sistemas de refrigeração e a otimização de propriedades térmicas de materiais.

O objetivo deste estudo será determinar uma possível solução para o problema da equação de calor, submetida a determinadas condições iniciais e de contorno.

2 Condução de calor em uma barra delgada

Seja uma barra fina feita de um material homogeneamente condutor de calor, com superfície lateral isolada de forma adiabática.



Figura 1: Barra delgada

Para solucionar o problema da condução de calor em uma barra, considere a faixa em \mathbb{R}^2 dada por $R = [0, L] \times [0, +\infty]$. Agora, devemos encontrar uma função $u(x, t)$ que satisfaça a *equação do calor* em R , dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

onde o coeficiente $K > 0$ representa a condutividade térmica do material. Para a dedução da equação (1), veja [1].

Considere, também, as condições iniciais e de fronteira do problema:

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), & f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}; \\ u(0, t) = u(L, t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Aqui, definimos uma função f que descreve a temperatura inicial em qualquer ponto da barra, e também estamos supondo que nas extremidades da barra, a temperatura é constante e igual à zero.

Para resolver a equação diferencial utilizamos o *método de separação de variáveis*, o qual consiste em escrever $u(x, t)$ da seguinte forma:

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

Assim, substituindo na equação (1), obtemos

$$F(x) \frac{\partial G}{\partial t} = KG(t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Supondo que $G(t)$ e $F(x)$ devem ser diferentes de zero (caso contrário, teríamos a solução trivial nula), segue que

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}. \quad (3)$$

Observe que como o lado esquerdo da equação (3) depende apenas de t e o lado direito depende apenas de x , podemos concluir que o lado esquerdo e direito da equação devem independe de x e t , ou seja,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma$$

onde σ não depende nem de x nem de t .

Podemos, assim, transformar o problema de equações diferenciais parciais, em dois problemas de equações diferenciais ordinárias.

$$F''(x) = \sigma F(x), \quad (4)$$

$$G'(t) = \sigma KG(t). \quad (5)$$

Considerando $\sigma > 0$, a solução geral para (4) é dada por

$$F(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Aplicando as condições de fronteira (2), temos que $F(0) = F(L) = 0$, isto é,

$$c_1 e^L + c_2 e^{-L} = 0, \quad c_1 + c_2 = 0.$$

Note que a única solução para o sistema é $c_1 = c_2 = 0$, o que implica em $F(x) = 0$, uma solução que não nos interessa.

Para $\sigma = 0$, a solução geral para (4) é dada por $F(x) = c_1 x + c_2$. Aplicando novamente as

condições de fronteira (2), obtemos

$$c_2 = 0, \quad c_1 L + c_2 = 0.$$

Dessa forma, $c_1 = c_2 = 0$, resultando em $F(x) = 0$ novamente.

Agora, se $\sigma < 0$, podemos escrever $\sigma = -\lambda^2$, de forma que a solução geral para (4) é

$$F(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda x). \quad (6)$$

Avaliando a função nas condições de fronteira (2), obtemos

$$c_1 = 0, \quad \operatorname{sen}(\lambda L) = 0.$$

Note que, neste caso, os valores de λ são dados por $\lambda = \frac{n\pi}{L}$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Logo, σ deve ser

$$\sigma = -\lambda^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

Portanto, para cada n , a função F dada por (6) será da forma

$$F_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Agora, a equação (4) é uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem, cuja solução geral é dada por

$$G(t) = ce^{\sigma Kt}.$$

Desde que $\sigma = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, obtemos

$$G_n(t) = c_n e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2}.$$

Assim, para cada n , segue de (1) que

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = c_n e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

é solução da equação do calor com as condições de fronteira $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

Pelo *princípio da superposição das soluções* (veja [2]), qualquer combinação linear das soluções de uma equação diferencial também é solução; dessa forma, qualquer expressão da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (7)$$

é solução do problema.

Além disso, a solução deve satisfazer a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, isto é:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

a qual é a série de Fourier de senos da função f . Assim, pelo Corolário 2.8 de [2], se a função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ e sua derivada f' são contínuas por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Exemplo 2.1. Considere uma barra de 40 cm de comprimento, isolada termicamente nos lados, com coeficiente de condutividade térmica $K = 1$, e extremidades mantidas a uma temperatura de 0°C . A temperatura inicial da barra é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq 20, \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40. \end{cases}$$

O problema de valor inicial e de fronteira é dado da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, \\ u(0, t) = 0 = u(40, t) \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 40. \end{cases}$$

Por (7), a solução deste problema é a seguinte:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{1600}}.$$

onde c_n são os coeficientes da série de Fourier de f .

Calculando esses coeficientes, obtemos

$$c_n = \frac{160 \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2 \pi^2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{160(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Assim, a solução para o problema é

$$u(x, t) = \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi x}{40} \right) e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 t}{1600}}. \quad (8)$$

Veja o comportamento do gráfico de $u(x, t)$ para diferentes valores de t e utilizando quatro termos não nulos da série:

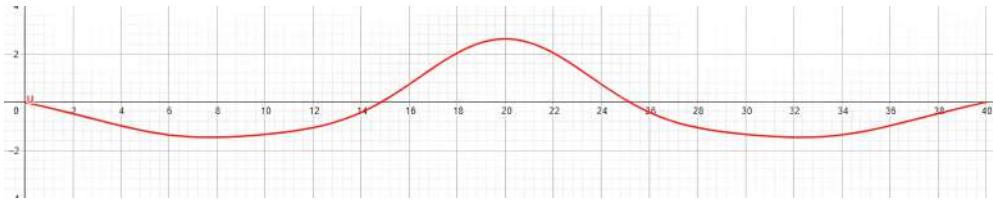


Figura 2: $u(x, 1)$

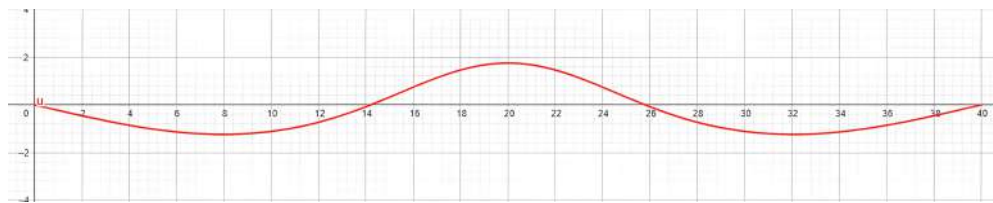


Figura 3: $u(x, 5)$

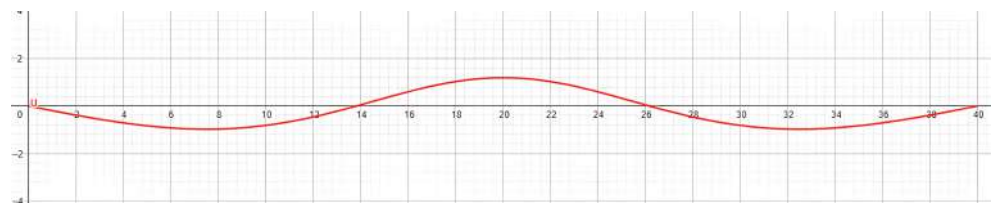


Figura 4: $u(x, 10)$



Figura 5: $u(x, 25)$

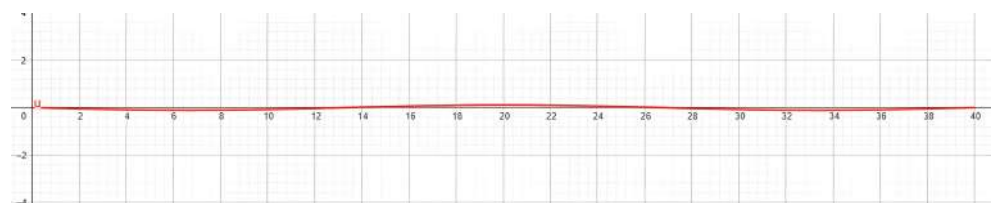


Figura 6: $u(x, 50)$

Referências

- [1] FIGUEIREDO, D.G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [2] SANTOS, R. J. **Equações Diferenciais Parciais: Uma introdução**, Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2021.



Uma abordagem de Caos e a Aplicação Shift

Geraldo Rodrigues de Melo Neto

UFU, FACOM, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
geraldo.ne@ufu.br

Catiana Casonatto

UFU, IME - Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
ccasonatto@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Sistemas Dinâmicos.
Caos.
Aplicação *shift*.

O estudo de sistemas dinâmicos visa compreender seu comportamento à medida que evoluem no tempo. Há casos de sistemas que escapam à previsão natural e dão origem ao que chamamos de fenômenos caóticos. O objetivo desse trabalho é explorar uma definição, entre tantas que existem, de caos e aplicá-la no estudo da dinâmica da aplicação *shift*. Tal definição tem a vantagem de ser prontamente verificável em diferentes e importantes sistemas dinâmicos.

1 Introdução

O estudo dos sistemas dinâmicos tem como objetivo compreender seu comportamento à medida que evoluem no tempo. Esses sistemas podem abranger desde o movimento dos planetas no sistema solar até a simples oscilação de um pêndulo. Historicamente, sua investigação remonta aos trabalhos pioneiros de Isaac Newton, que empregou equações diferenciais para descrever esses fenômenos. No entanto, foi no século XIX que o matemático Henri Poincaré destacou que, sob certas condições, tais sistemas podem gerar resultados imprevisíveis, dando origem ao que hoje chamamos de fenômenos caóticos. Um exemplo ilustrativo desse caos é a tentativa de prever o comportamento de espécies ao longo de várias gerações, uma tarefa desafiadora devido à complexidade das variáveis envolvidas.

Embora haja várias definições de caos, este trabalho adota a definição proposta por Devaney em [1], que é amplamente reconhecida e pode ser aplicada a diversos exemplos de sistemas dinâmicos caóticos. Além disso, no contexto da dinâmica simbólica, o trabalho também explora um exemplo significativo de sistema dinâmico caótico: a aplicação *shift*. Essa aplicação desempenha um papel crucial no estudo de sistemas dinâmicos caóticos, pois facilita a análise de uma variedade de outros sistemas.

2 Conceitos e Resultados Preliminares

Sejam X um espaço métrico e $F : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico.

Dado $x_0 \in X$, definimos a *órbita de x_0 pela F* como sendo a sequência de pontos

$$x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), \dots, x_n = F^n(x_0), \dots, n \in \mathbb{N}.$$

Chamamos $F^n(x_0)$ de *n -ésima iterada de F em x_0* .

Quando $F(x_0) = x_0$, e conseqüentemente $F^n(x_0) = x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que x_0 é um *ponto fixo de F* .

Quando $F^n(x_0) = x_0$ para algum $n > 0$, dizemos que x_0 é um *ponto periódico de F* . Agora, se além disso, $F^k(x_0) \neq x_0$ para todo $k < n$, dizemos que x_0 é um *ponto periódico de F de período n* e, neste caso, a órbita de x_0 é denominada *órbita periódica de período n ou n -ciclo*.

Com o intuito de definir caos, apresentamos as seguintes definições.

Definição 2.1. *Sejam X um conjunto e Y um subconjunto de X . Dizemos que Y é denso em X se, para qualquer ponto $x \in X$, existe um ponto y em Y arbitrariamente próximo de x . Equivalentemente, Y é denso em X se para qualquer $x \in X$ existe uma sequência de pontos $y_n \in Y$ que converge para x .*

A próxima definição está intimamente relacionada à propriedade do sistema dinâmico ter uma órbita densa.

Definição 2.2. Um sistema dinâmico é transitivo se para qualquer par de pontos x e y e qualquer $\epsilon > 0$ existe um terceiro ponto z distando menos de ϵ de x , cuja órbita dista menos de ϵ de y .

A próxima definição nos diz que, para qualquer ponto x , não importa o quão pequena tomarmos uma vizinhança de x , sempre podemos encontrar um y nessa vizinhança, cuja órbita eventualmente se separa da órbita de x por pelo menos β . A distância β independe de x .

Definição 2.3. Um sistema dinâmico F depende sensivelmente das condições iniciais se existe um $\beta > 0$ tal qual para qualquer ponto x e qualquer $\epsilon > 0$ existem um y , que dista de x menos de ϵ , e um k cuja distância entre $F^k(x)$ e $F^k(y)$ é pelo menos β .

Existem diversas maneiras possíveis de capturar a essência do caos. Apresentamos aqui, a definição de caos segundo Devaney [1]. Tal definição tem a vantagem de ser prontamente verificável em diferentes e importantes sistemas dinâmicos.

Definição 2.4. Um sistema dinâmico $F : X \rightarrow X$ é caótico se:

1. O conjunto dos pontos periódicos de F é denso em X .
2. F é transitivo.
3. F depende sensivelmente das condições iniciais.

2.1 Aplicação Shift

Para definirmos a aplicação *shift* precisamos introduzir o conjunto espaço de sequência em dois símbolos:

$$\Sigma = \{(s_0s_1s_2\dots); s_j = 0 \text{ ou } s_j = 1\}.$$

Note que o conjunto Σ consiste de todas as possíveis sequências de 0's e 1's.

Com o intuito de verificar se duas sequências em Σ estão próximas, consideremos a seguinte métrica em Σ (não é difícil verificar).

Definição 2.5. Sejam $s = (s_0s_1s_2\dots)$ e $t = (t_0t_1t_2\dots)$ pontos de Σ . A distância entre s e t é dada por

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

O próximo resultado nos garante que duas sequências em Σ estarão próximas se suas n primeiras entradas coincidem.

Teorema 2.6 (Teorema da Proximidade). Sejam $s, t \in \Sigma$ tais que $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Então $d[s, t] \leq 1/2^n$. Por outro lado, se $d[s, t] < 1/2^n$, então $s_i = t_i$ para $i \leq n$.

Demonstração. Seja $s_i = t_i$ para $i \leq n$ então:

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$

Caso $s_j \neq t_j$ para algum $j \leq n$, então temos:

$$d[s, t] \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}.$$

Consequentemente, se $d[s, t] < 1/2^n$, então $s_i = t_i$, para $i \leq n$. ■

Apresentamos agora a aplicação *shift* a qual é definida no espaço Σ .

Definição 2.7. A aplicação *shift* $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é dada por:

$$\sigma(s_0, s_1, s_2 \dots) = (s_1, s_2, s_3 \dots).$$

Note que σ elimina a primeira entrada de qualquer ponto em Σ . Dessa maneira, é fácil iterar σ , basta eliminar a primeira entrada em cada iterada. Com isso temos que

$$\sigma^2(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_2 s_3 s_4 \dots), \quad \sigma^3(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_3 s_4 s_5 \dots), \quad \dots, \quad \sigma^n(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_n, s_{n+1}, \dots),$$

o que torna uma tarefa fácil encontrar os pontos periódicos de σ . Se s é uma sequência repetitiva da forma

$$s = (s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots) = (\overline{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}),$$

então $\sigma^n(s) = s$.

Veremos agora que a aplicação *shift* é contínua.

Teorema 2.8. A aplicação *shift* $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é contínua em todos os pontos de Σ .

Demonstração. Seja $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ um ponto qualquer de Σ , vamos mostrar que σ é contínua em s . Para isso, dado $\epsilon > 0$, tomemos n tal que $1/2^n < \epsilon$ e escolhemos $\delta = 1/2^{n+1}$. Se t é um ponto em Σ tal que $d[s, t] < \delta$ então, pelo Teorema da Proximidade, $s_i = t_i$, para $i = 0, 1, \dots, n+1$. Isto é, $t = (s_0 \dots s_{n+1} t_{n+2} t_{n+3} \dots)$.

Note que, $\sigma(t) = (s_1 \dots s_{n+1} t_{n+2} t_{n+3} \dots)$ possui as $n+1$ primeiras entradas iguais às de $\sigma(s)$. Novamente pelo Teorema da Proximidade, temos que

$$d[\sigma(s), \sigma(t)] \leq 1/2^n < \epsilon.$$

Portanto, σ é contínua em s . Como s é um ponto arbitrário, concluímos que σ é uma função contínua. ■

3 A Aplicação Shift é Caótica

Após definir a aplicação *shift* e explorar suas propriedades no conjunto *espaço de sequência* Σ , podemos utilizar dessas observações para provar que esta aplicação atende às propriedades de caos de Devaney.

Teorema 3.1. *A aplicação shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é um sistema dinâmico caótico.*

Demonstração. Para provar que a aplicação $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é um sistema dinâmico caótico devemos mostrar que seu conjunto de pontos periódicos é denso em Σ , que σ é transitiva e que depende sensivelmente das condições iniciais.

Iniciemos com a densidade do conjunto de pontos periódicos de σ . Seja $s = (s_0s_1s_2\dots)$ um ponto qualquer de Σ . Dado $\epsilon > 0$, tomemos um inteiro n tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ e consideremos a sequência $t_n = (s_0s_1\dots s_n \overline{s_0s_1\dots s_n}) \in \Sigma$. Como as primeiras $(n + 1)$ entradas de s e t_n são iguais, segue do Teorema da Proximidade que

$$d[s, t_n] \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Note que t_n é uma sequência periódica de período $n + 1$ em σ . Portanto, como ϵ e s são quaisquer, encontramos um ponto periódico, a saber t_n , arbitrariamente próximo de qualquer ponto em Σ .

Para mostrarmos a transitiva de σ , vamos encontrar uma órbita que esteja arbitrariamente próxima a qualquer ponto em Σ . Para isso, consideremos o ponto

$$\hat{s} = (\underbrace{01}_{1\text{-blocos}} \underbrace{00011011}_{2\text{-blocos}} \underbrace{000001\dots}_{3\text{-blocos}} \underbrace{\dots}_{4\text{-blocos}})$$

isto é, \hat{s} é a sequência que consiste de todos os possíveis blocos de 0's e 1's de comprimento 1, seguido de todos os blocos de comprimento 2, em seguida todos os de comprimento 3 e assim por diante.

A órbita do ponto \hat{s} é um subconjunto denso em Σ . De fato, sejam $s = (s_0s_1s_2\dots)$ um ponto qualquer de Σ e um $\epsilon > 0$. Agora, tomemos um inteiro n tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Note que, por construção, a sequência \hat{s} possui um bloco de comprimento $n + 1$ que consiste dos dígitos $s_0s_1\dots s_n$. Suponha que s_0 é a k -ésima posição da sequência. Assim, se aplicarmos o *shift* k vezes em \hat{s} , então as primeiras $n + 1$ entradas de $\sigma^k(\hat{s})$ são exatamente $s_0s_1\dots s_n$. Logo, pelo Teorema da Proximidade,

$$d[\sigma^k(\hat{s}), s] \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon,$$

isto é, a órbita de \hat{s} dista menos de $\frac{1}{2^n}$ unidades de qualquer $s \in \Sigma$. Portanto, σ é transitiva.

Por fim, provaremos que σ depende sensivelmente das condições iniciais. Tomemos $\beta = 1$. Para quaisquer $s \in \Sigma$ e $\epsilon > 0$, escolhemos, novamente, um inteiro n tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Agora, suponhamos que $t \in \Sigma$ é tal que $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$ e $t \neq s$. Assim, pelo Teorema da Proximidade, $t_i = s_i$, para $i = 0, 1, \dots, n$.

Como $t \neq s$, existe $k > n$ tal que $s_k \neq t_k$ e, então, $|s_k - t_k| = 1$. Com isso, a primeira entrada de $\sigma^k(s)$ e de $\sigma^k(t)$ são diferentes e, portanto,

$$d[\sigma^k(s), \sigma^k(t)] \geq \frac{|s_k - t_k|}{2^0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{0}{2^i} = 1.$$

■

Agradecimentos

Este trabalho é fruto do projeto intitulado *Um primeiro estudo sobre o Caos* e cadastrado no programa de Iniciação Científica PIVIC da Universidade Federal de Uberlândia.

Referências

- [1] DEVANEY, R. L. **A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment.** Perseus Books Publishing, L.L.C, 1992.



Desvendando a Geometria dos Números Complexos

Giovanna Soares Vieira

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
giovanna.vieiral@ufu.br

Ana Carla Piantella

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
anapiantella@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Geometria.
Números complexos.
Semelhança de triângulos.

A teoria dos números complexos é uma ferramenta importante em diversas áreas, tais como a Física e a Engenharia. Ao se ensinar essa teoria nas escolas, e até mesmo nas universidades, quase nada é discutido sobre a geometria que está por detrás dos números complexos. Entretanto, existe uma forte relação entre essas duas áreas. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é estudar algumas aplicações dos números complexos na geometria plana, apresentando resultados sobre semelhança de triângulos e pontos notáveis, cujas demonstrações são feitas a partir da teoria dos números complexos.

1 Introdução

O conjunto dos números complexos surgiu no século XVI a partir da procura de alguns matemáticos por soluções de equações com grau inferior a quatro. O símbolo i foi introduzido por Leonhard Euler em 1765. Em geral, a ideia que se tem é que tais números servem apenas para se calcular raiz de um número negativo, e muito pouco se discute sobre a geometria que está implícita neles. Pode ser esse um dos motivos que causam um estranhamento por parte dos alunos quando se deparam com a teoria dos números complexos. Nesse trabalho serão estudadas algumas aplicações envolvendo colinearidade de três pontos no plano cartesiano, semelhança e pontos notáveis de um triângulo, tudo sob o ponto de vista dos números complexos. Outras aplicações interessantes podem encontradas em [1] e [2]. Precisaremos de algumas definições e resultados preliminares.

Definição 1.1. *Um número complexo é um par ordenado (a, b) de números reais com as seguintes propriedades:*

i. Dois números complexos (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

ii. A soma e o produto de dois números complexos (a, b) e (c, d) são definidos por

$$D1 : (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$

$$D2 : (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

Com as operações definidas acima o conjunto dos números complexos é um corpo. Considerando a função $f : \mathbb{R} \times 0 \rightarrow \mathbb{R} \times 0$ dada por $f(x) = (x, 0)$, pode-se mostrar que f é bijetora e, além disso,

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \quad \text{e} \quad (x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y, 0).$$

Portanto, identificando $(x, 0) = x$, o número complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito da seguinte forma

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + (0, 1)y.$$

Definindo $i = (0, 1)$, chamado de unidade imaginária, tem-se que $z = x + iy$. A representação dada anteriormente é chamada de forma algébrica ou representação algébrica do número complexo $z = (x, y)$. Denomina-se x como sendo a parte real do número complexo z , denotada por $\Re z$, e y a parte imaginária de z , denotada por $\Im z$.

A seguir será definido conjugado e módulo de um número complexo, que serão importantes para resultados posteriores.

Definição 1.2. *Se $z = (x, y) = x + iy$, o número complexo $(x, -y) = x - iy$ é chamado de conjugado complexo ou número complexo conjugado de z , o qual será denotado por \bar{z} .*

Definição 1.3. *O número $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ é chamado de módulo ou valor absoluto do número complexo $z = x + iy$.*

Além da representação algébrica de um número complexo $z = x + iy$, define-se também a sua forma polar. Para isso, seja $P = (x, y)$ o ponto que corresponde ao número complexo $z = x + iy$ no

plano cartesiano e considere o vetor \overrightarrow{OP} , onde $O = (0, 0)$. Sendo θ o ângulo entre \overrightarrow{OP} e o semieixo positivo Ox , e r o comprimento de \overrightarrow{OP} , tem-se que $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Logo, z pode ser escrito na forma $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, chamada de forma polar do número complexo z . O ângulo θ é chamado de argumento de z e denotado por \arg de z .

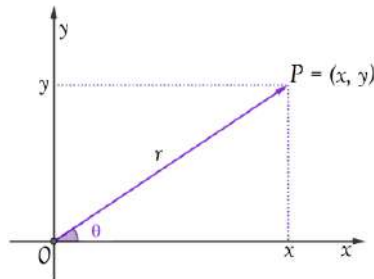


Figura 1: Forma polar de um número complexo

Observa-se que a cada número complexo $z = x + iy$ está associado o ponto de coordenadas (x, y) . Para simplificar a linguagem usaremos também z para denotar o ponto (x, y) correspondente ao número complexo z .

Considere a equação $z^n - 1 = 0$. De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, tem-se que essa equação possui exatamente n raízes, chamadas de raízes n -ésimas da unidade. Tais raízes são dadas na proposição abaixo.

Proposição 1.4. *As soluções de $z^n - 1 = 0$ são dadas por*

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Por exemplo, as raízes de $z^3 = 1$ são dadas por 1 , $w = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ e $\bar{w} = -1/2 - i\sqrt{3}/2$. É fácil verificar que $w^2 = \bar{w}$. É conhecido que as raízes n -ésimas da unidade são vértices de um polígono regular com n lados inscrito no círculo unitário. Assim, as raízes cúbicas da unidade 1 , w e w^2 são vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo unitário, com um vértice em 1 .

2 Aplicações de números complexos a geometria plana

Nessa seção serão vistas algumas aplicações dos números complexos na geometria plana. Sendo z_1 , z_2 e z_3 números complexos, denota-se por $\Delta z_1 z_2 z_3$ o triângulo cujos vértices são os pontos z_1 , z_2 e z_3 . Quando a ordem dos vértices de um triângulo for especificada, ele será dito orientado. Nesse caso, diz-se que a orientação é positiva se os vértices são orientados no sentido anti-horário e negativa quando os vértices são orientados no sentido horário.

Definição 2.1. *Sejam z_1 , z_2 , z_3 , w_1 , w_2 e w_3 números complexos. Diz-se que os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e*

$\Delta w_1 w_2 w_3$ são semelhantes com a mesma orientação, e indica-se por

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3,$$

se o ângulo em z_k é igual aquele em w_k , $k = 1, 2, 3$, e se eles possuem a mesma orientação, ou seja, estão orientados ambos no sentido anti-horário ou ambos no sentido horário. Caso os triângulos possuam orientações opostas (um no sentido horário e outro no sentido anti-horário), diz-se que eles são semelhantes com orientação oposta e escreve-se

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3 \quad (\text{opostos}).$$

Nesse caso, tem-se ainda que o vértice z_k corresponde ao vértice w_k , $k = 1, 2, 3$.

O teorema abaixo traz uma aplicação de números complexos a semelhança de triângulos.

Teorema 2.2. Os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ $\Delta w_1 w_2 w_3$, são semelhantes com a mesma orientação se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}.$$

A última igualdade é equivalente a

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstração. Dois triângulos são semelhantes se, e somente se as razões entre os comprimentos de dois lados correspondentes são iguais e os ângulos correspondentes entre os lados são iguais, levando-se em conta a orientação. Então,

$$\begin{aligned} \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3 &\Leftrightarrow \left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| = \left| \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right| \quad \text{e} \quad \arg \left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right) = \arg \left(\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} &\Leftrightarrow (z_2 - z_1)(w_3 - w_1) = (z_3 - z_1)(w_2 - w_1) \\ &\Leftrightarrow z_2 w_3 - z_2 w_1 - z_1 w_3 + z_1 w_1 = z_3 w_2 - z_3 w_1 - z_1 w_2 + z_1 w_1 \\ &\Leftrightarrow z_2 w_3 - z_2 w_1 - z_1 w_3 - z_3 w_2 + z_3 w_1 + z_1 w_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

■

Corolário 2.3. Os triângulos $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$ e $\Delta_{w_1 w_2 w_3}$ são semelhantes com orientação oposta se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\overline{w_2} - \overline{w_1}}{\overline{w_3} - \overline{w_1}}$$

A última igualdade é equivalente a

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{w_1} & 1 \\ z_2 & \overline{w_2} & 1 \\ z_3 & \overline{w_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dadas as raízes $1, w, w^2$ de $z^3 = 1$ tem-se que elas são vértices de um triângulo equilátero. Assim, para determinar se um triângulo qualquer é equilátero basta verificar se ele é semelhante ao triângulo cujos vértices são as raízes cúbicas da unidade.

Proposição 2.4. Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ e considere as raízes $1, w, w^2$ de $z^3 = 1$, Então $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$ é equilátero se, e somente se, $\Delta_{z_1 z_2 z_3} \sim \Delta_{1 w w^2}$ ou $\Delta_{z_1 z_2 z_3} \sim \Delta_{1 w^2 w}$. Equivalentemente, $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$ é equilátero se, e somente se, $z_1 + w z_2 + w^2 z_3 = 0$ ou $z_1 + w^2 z_2 + w z_3 = 0$.

Exemplo 2.5. Sejam $z_1 = 1 + i, z_2 = 5 + i, z_3 = 1 + 4i, w_1 = 0, w_2 = -4i, w_3 = -3$. Os triângulos $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$ e $\Delta_{w_1 w_2 w_3}$ são semelhantes com orientação oposta, pois

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{5 + i - 1 - i}{1 + 4i - 1 - i} = \frac{4}{3i} = \frac{-4i}{3} \quad e \quad \frac{\overline{w_2} - \overline{w_1}}{\overline{w_3} - \overline{w_1}} = \frac{4i - 0}{-3 - 0} = \frac{-4i}{3}$$

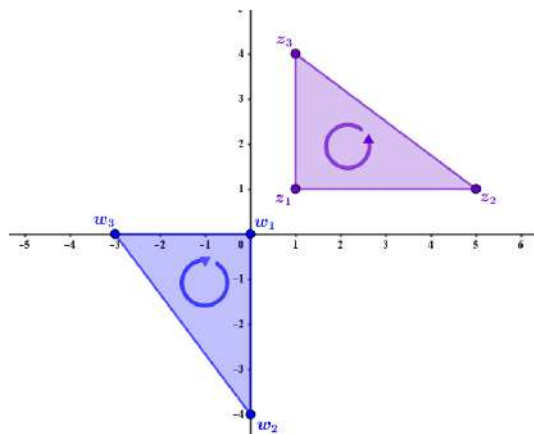


Figura 2: Triângulos semelhantes com orientação oposta

O resultado abaixo fornece uma forma de analisar quando números complexos distintos z_1, z_2, z_3 são colineares.

Proposição 2.6. Os números complexos distintos z_1, z_2 e z_3 são colineares se, e somente se, $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in \mathbb{R}$.

Note que, segue da proposição anterior que três pontos distintos z_1 , z_2 e z_3 são colineares se, e somente se $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}$, ou seja,

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Mas pelo Teorema 2.2, isso é equivalente a $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3$.

Se $\Delta z_1 z_2 z_3$ é um triângulo qualquer, então o ponto no qual as mediatrizes dos três lados do triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$ se encontram é denominado **circuncentro**. Além disso, o ponto no qual as três medianas de $\Delta z_1 z_2 z_3$ se encontram é chamado de **baricentro** ou **centróide**, e o ponto de interseção das três alturas de $\Delta z_1 z_2 z_3$ é chamado de **ortocentro**.

Utilizando a teoria dos números complexos é possível determinar tais pontos notáveis através das fórmulas dadas no teorema abaixo.

Teorema 2.7. *Sejam z_1 , z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$ os vértices de um triângulo qualquer. Então o circuncentro z_c , o baricentro z_b e o ortocentro z_o do triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$ são dados respectivamente por:*

$$z_c = \frac{|z_1|^2(z_2 - z_3) + |z_2|^2(z_3 - z_1) + |z_3|^2(z_1 - z_2)}{\bar{z}_1(z_2 - z_3) + \bar{z}_2(z_3 - z_1) + \bar{z}_3(z_1 - z_2)},$$

$$z_b = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

e

$$z_o = z_1 + z_2 + z_3.$$

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PIBIC da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica pelo fomento.

Referências

- [1] CANTALOGO, D. P. N. Pontos notáveis: uma abordagem através dos números complexos. **Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)**. Uberlândia, 2022. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/34278>>. Acesso em: 15 mar. 2024.
- [2] HAHN, L.; **Complex Numbers and Geometry**. Edição 1. Local: The Mathematical Association of America (Incorporated), 1994.



Condição Necessária e Suficiente para uma Função ser Analítica

João Otávio Mazetti de Araújo

UFU, Faculdade de Engenharia Química, Uberlândia, MG, Brasil
joao.mazetti@ufu.br

Catiana Casonatto

UFU, IME - Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brasil
ccasonatto@ufu.br

Palavras-chave

Variáveis Complexas
Funções Analíticas
Equações de Cauchy-Riemann

Resumo

Uma função de variáveis complexas é analítica se possui derivada em todos os pontos da região em que está definida. Neste trabalho, apresentamos uma maneira prática de verificar a analiticidade de uma função. Para isso, utilizamos algumas relações conhecidas como equações de Cauchy-Riemann.

1 Introdução

As funções de variáveis complexas nasceram da busca por soluções para equações que desafiavam a lógica dos números reais. No início do século XIX, matemáticos como Leonhard Euler e Carl Gauss se depararam com problemas que não podiam ser solucionados com as ferramentas matemáticas existentes na época. A necessidade de novas ferramentas impulsionou o desenvolvimento de um novo campo de estudo: a análise complexa.

No coração dessa análise estão as equações de Cauchy-Riemann, as quais estabelecem uma relação fundamental entre as partes real e imaginária de uma função complexa diferenciável. Neste trabalho, trataremos de uma condição necessária e suficiente para que uma função complexa seja analítica, a partir dessas equações.

2 Conceitos e Resultados Preliminares

Iniciemos com algumas definições básicas da teoria de funções complexas.

Dados os números $r > 0$ e z_0 complexo qualquer, chamamos *disco aberto de centro em z_0 e raio r* ao conjunto

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\},$$

isto é, ao conjunto de todos os números complexos que estão a uma distância menor que r do ponto z_0 .

Uma *vizinhança* de um ponto z_0 é um conjunto V que contém um disco de centro z_0 . Em particular, qualquer disco $D_r(z_0)$ é uma vizinhança de z_0 , a qual denotaremos por $V_r(z_0)$.

Um ponto z_0 de um conjunto C é um *ponto interior* se C é vizinhança de z_0 , isto é, existe um disco de centro z_0 inteiramente contido em C . Se todos os pontos de C são pontos interiores, dizemos que C é um *conjunto aberto*.

Um conjunto aberto é *conexo* se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um caminho todo contido no conjunto.

Finalmente, chamamos *região* a todo conjunto aberto e conexo.

Considerando funções da forma $w = f(z)$ de uma variável complexa $z = x + iy$, temos, associadas a w , duas funções reais das variáveis reais x e y , dadas por

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) \quad \text{e} \quad v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z),$$

em que $\operatorname{Re} f(z)$ e $\operatorname{Im} f(z)$ denotam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária da função f .

As definições e propriedades de limites e derivadas, bem como a continuidade e derivabilidade de funções de variáveis complexas, que omitiremos nesse trabalho, são análogas ao caso real (para mais detalhe, veja [1]).

O próximo resultado nos dá uma importante relação entre o limite de uma função complexa e os limites de suas partes real e imaginária.

Teorema 2.1. *Sejam $f = u + iv$ uma função com domínio D e $L = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, então*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = x_0 + iy_0$$

se e somente se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = x_0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = y_0$$

Demonstração. Veja Teorema 2.12 de [1]. ■

A definição de derivada de uma função de variável complexa é formalmente a mesma que no caso de função de variável real.

Definição 2.2. *Sejam f uma função cujo domínio é uma região R e z um ponto de R . Dizemos que f é derivável no ponto z se existe o limite*

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

ou, equivalentemente, se existe

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Quando esse limite existe, ele define uma nova função de z , a *derivada* ou *função derivada de f* , denotada por f' ,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Chamamos a atenção para o fato de que, para a existência da derivada, o limite acima não pode depender do modo como Δz tende a zero ou w tende a z . Em particular, w pode tender a z ao longo de diferentes raios, todos com origem em z_0 e o limite deve ser o mesmo.

As propriedades de derivadas, bem como a derivabilidade de funções de variáveis complexas, que omitiremos nesse trabalho, são análogas ao caso real (para mais detalhes, veja [1]).

No segue, apresentamos a definição de uma função analítica.

Definição 2.3. *Uma função f é analítica em uma região R se ela é derivável em cada ponto de R . A função f é analítica num ponto z_0 se f for analítica numa região contendo z_0 , por exemplo, numa vizinhança $V_\delta(z_0)$.*

3 Função Analítica e as Equações de Cauchy-Riemann

Nesta seção obteremos uma condição necessária e suficiente para que uma função f seja analítica. Tal condição será dada a partir das *equações de Cauchy-Riemann*, apresentadas abaixo.

Seja $f = u + iv$ uma função de variáveis complexas derivável num ponto $z = x + iy$. Então,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Em particular, é possível fazer Δz tender a zero por valores reais $\Delta z = k$ e, separadamente, por valores imaginários $\Delta z = it$. Obtemos, assim, duas expressões

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x+k, y) - u(x, y) + i[v(x+k, y) - v(x, y)]}{k}$$

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y) + i[v(x, y+t) - v(x, y)]}{it}$$

Pelo Teorema 2.1, a existência desses limites implica na existência, separadamente, dos limites das partes reais e imaginárias, isto é:

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x+k, y) - v(x, y)}{k} + i \lim_{k \rightarrow 0} \frac{v(x+k, y) - v(x, y)}{k}$$

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{t} - i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{t}$$

Como consequência, as funções u e v possuem derivadas parciais no ponto (x, y) e valem as seguintes relações:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{e} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Assim, igualando as partes reais e imaginárias, obtemos equações que chamamos de *equações de Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Observe que a construção acima mostra que se uma função f é analítica, então as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas. Em outras palavras, as equações de Cauchy-Riemann são uma condição necessária para a existência da derivada de uma função f . Porém, como veremos no exemplo seguinte, elas não são suficientes.

Exemplo 3.1. *Consideremos a função*

$$f(z) = \bar{z} = x - iy.$$

Claramente as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas. No entanto, f não é diferenciável em 0. De fato, tomando $\Delta z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, obtemos que

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \frac{\cos(2\pi - \theta) + i \sin(2\pi - \theta)}{e^{i\theta}} = \frac{e^{i(2\pi - \theta)}}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-2i\theta},$$

isto é, o limite acima depende do valor de θ escolhido e, portanto, $f'(0)$ não existe.

No próximo resultado, veremos que se $f = u + iv$ é uma função, em que u e v possuem derivadas parciais contínuas numa região R , então as equações de Cauchy-Riemann são suficientes para que f seja analítica.

Teorema 3.2. *Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções reais com derivadas parciais contínuas numa região R . Então a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em R se, e somente se, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em R .*

Demonstração. Resta mostrarmos que f é analítica em R . Para isto, consideremos $z = x + iy \in R$ e um número $\delta > 0$ tal que a vizinhança $V_\delta = \{(x+k) + i(y+t) : k^2 + t^2 < \delta^2\}$ esteja toda contida em R . Em particular, os segmentos zz_1 e z_1z_2 , onde $z_1 = (x+k, y)$ e $z_2 = (x+k, y+t)$, também estão contidos em R . Pelo Teorema do Valor Médio (de função de variável real), existem θ_1 e θ_2 tais que

$$u(x+k, y) - u(x, y) = ku_x(x + \theta_1 k, y) \quad (1)$$

$$u(x+k, y+t) - u(x+k, y) = tu_y(x+k, y + \theta_2 t). \quad (2)$$

Somando as equações (1) e (2), obtemos

$$\Delta u = u(x+k, y+t) - u(x, y) = ku_x(x + \theta_1 k, y) + tu_y(x+k, y + \theta_2 t). \quad (3)$$

Como as funções u_x e u_y são contínuas, podemos escrever

$$u_x(x + \theta_1 k, y) = u_x(x, y) + \delta_1$$

$$u_y(x+k, y + \theta_2 t) = u_y(x, y) + \delta_2,$$

onde $\delta_1 \rightarrow 0$ e $\delta_2 \rightarrow 0$ quando $k^2 + t^2 \rightarrow 0$. Assim, reescrevemos a equação (3) como

$$\Delta u = u(x+k, y+t) - u(x, y) = ku_x + tu_y + k\delta_1 + t\delta_2. \quad (4)$$

De maneira análoga, podemos escrever

$$\Delta v = v(x+k, y+t) - v(x, y) = kv_x + tv_y + k\delta_3 + t\delta_4 \quad (5)$$

onde $\delta_3 \rightarrow 0$ e $\delta_4 \rightarrow 0$ quando $k^2 + t^2 \rightarrow 0$. Agora, fazendo $\Delta z = h = k + it$ e usando as equações (4) e (5), obtemos:

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{h} = \frac{(ku_x + itv_y) + i(kv_x - itu_y)}{h} + \frac{k}{h}(\delta_1 + i\delta_3) + \frac{t}{h}(\delta_2 + i\delta_4).$$

Usando agora as equações de Cauchy-Riemann, obtemos

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = (u_x + iv_x) + \frac{k}{h}(\delta_1 + i\delta_3) + \frac{t}{h}(\delta_2 + i\delta_4).$$

Logo,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left((u_x + iv_x) + \frac{k}{h}(\delta_1 + i\delta_3) + \frac{t}{h}(\delta_2 + i\delta_4) \right) \\ &= u_x + iv_x, \end{aligned}$$

sendo a última igualdade válida, pois $|k/h| \leq 1$ e $|t/h| \leq 1$, enquanto $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ tendem a zero quando $\Delta z = h \rightarrow 0$. Portanto, a derivada $f'(z)$ existe e é dada por $u_x + iv_x$. ■

Para finalizarmos, apresentamos um exemplo onde aplicamos o teorema acima.

Exemplo 3.3. A função $f(x + iy) = (x^2 - y^2 - 2x) + 2iy(x - 1)$ é analítica.

De fato, temos que $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x$ e $v(x, y) = 2y(x - 1)$ e suas derivadas parciais são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x - 2, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x - 2. \end{aligned}$$

Assim, as derivadas parciais de u e v são contínuas em todo número complexo z e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em todos esses pontos. Portanto, pelo Teorema 3.2, f é analítica.

Agradecimentos

Este trabalho é fruto do projeto, ainda em andamento, intitulado *Sobre a Teorema dos Resíduos e Cálculo de Integral* cadastrado no programa de iniciação científica PIVIC da Universidade Federal de Uberlândia.

Referências

- [1] ÁVILA, G. **Variáveis complexas e aplicações**. 3 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.



Teorema de Recorrência de Poincaré

Lizandro Valentim Zapelini Billig

UFU, Faculdade de Engenharia Mecânica, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

lizandrobillig@ufu.br

Túlio Vales Deslandes Ferreira

UFU, Faculdade de Matemática, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

tuliovales@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Recorrência de Poincaré
Teoria Ergódica
Sistemas Dinâmicos

O Teorema de Recorrência de Poincaré é um resultado muito importante na teoria dos sistemas dinâmicos. Este trabalho aborda os tópicos necessários para o estudo do teorema. Foram abordados temas como enumerabilidade de conjuntos, integral de Riemann, espaços mensuráveis, integral de Lebesgue e também o Teorema de Recorrência de Poincaré bem como suas aplicações em diferentes áreas.

1 Introdução

A Teoria Ergódica é uma área muito ampla de estudos de sistemas dinâmicos com sua base sendo as funções e medidas invariantes, o estudo e compreensão da Teoria Ergódica são muito importantes para a compreensão dos resultados.

O trabalho em desenvolvimento é focado no estudo do Teorema de Recorrência de Poincaré, com sua base inicial de estudos sendo constituída por enumerabilidade de conjuntos, integral de Riemann pela definição, espaço mensurável, medidas, integral de Lebesgue e o Teorema de Recorrência de Poincaré bem como suas aplicações. Com essa linha de estudos é possível seguir com o entendimento do Teorema bem como suas aplicações.

2 Enumerabilidade de Conjuntos

Enumerabilidade de conjuntos é uma maneira de comparar conjuntos com uma quantidade infinita de elementos.

Definição 2.1. *Um conjunto A é enumerável se existe uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ bijetora. Nesse caso, denotamos como $\#A = \#\mathbb{N}$, isto é, cardinalidade de A é igual a cardinalidade de \mathbb{N} .*

Considere $A = \{10n : n \in \mathbb{N}\}$, isto é, os múltiplos positivos de 10. A função $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, definida por $f(n) = 10n$ é uma bijeção. De fato, podemos mostrar que ela é tanto injetora quanto sobrejetora sendo então satisfeita a condição de bijeção, sendo assim temos:

1. Injetividade (Função Injetora):

Uma função é injetora se, e somente se, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$.

Suponha que $f(x_1) = f(x_2)$ para alguns $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$. Isso significa que:

$$10x_1 = 10x_2.$$

Dividindo ambos os lados por 10, obtemos:

$$x_1 = x_2.$$

Portanto, a função é injetora, já que $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$.

2. Sobrejetividade (Função Sobrejetora):

Uma função é sobrejetora se, e somente se, para todo elemento $y \in A$, existe pelo menos um $x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = y$.

Considere qualquer elemento $y \in A$. Por definição de A , $y = 10n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para este n , temos $f(n) = 10n = y$. Isso mostra que para qualquer $y \in A$, existe um $n \in \mathbb{N}$ (nomeadamente, o próprio n) tal que $f(n) = y$.

Assim, a função é sobrejetora, pois para cada elemento em A , existe um correspondente em \mathbb{N} que mapeia para ele.

Podemos definir que, para qualquer n escolhido entre os naturais (\mathbb{N}), sempre vai existir uma imagem no conjunto A , e a recíproca também vale. Logo, $\#\mathbb{N} = \#A$, mostrando assim que o conjunto A é enumerável.

3 Uma função não integrável a Riemann

Vejam que a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

não é integrável com o método da integral de Riemann. De fato, a integral de Riemann sobre uma dada função f sobre um intervalo $[a, b]$ é definida pelo limite das somas (inferiores e superiores) de Riemann à medida que o número de subintervalos tende ao infinito e o comprimento do maior subintervalo tende a zero. Dizemos informalmente que quando a soma superior é igual a soma inferior, a função é Riemann integrável. Note que nesse exemplo, o máximo que a função assume em qualquer intervalo é 1 e o mínimo que a função assume em qualquer intervalo é 0. Portanto essa função não é Riemann integrável.

A função dada não é integrável devido a sua descontinuidade em todo ponto, por menor que seja a vizinhança em torno de qualquer ponto x , sempre vai existir tanto números racionais quanto números irracionais, com isso concluímos que não importa o quanto seja pequeno o intervalo em torno de x , a função assume tanto o valor 0 quanto 1 dentro desse mesmo intervalo, mostrando a descontinuidade da função. Essa função é conhecida como função de Dirichlet.

Pergunta: Existe alguma forma de integrar essa função que não seja pelo método de Riemann?

4 Espaço Mensurável e Medida

Definição 4.1. Uma σ -álgebra de um conjunto X é uma coleção β de subconjuntos de X tal que:

1. $X \in \beta$
2. Se $A \in \beta$, então $A^c \in \beta$
3. Se $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ todos estiverem em β , então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \beta$.

Exemplo 4.1. Se $X = \{a, b, c\}$ e $\beta = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$, então β é uma σ -álgebra.

Definição 4.2. Um espaço mensurável é uma dupla (X, β) onde X é um conjunto e β é uma σ -álgebra de subconjuntos de X . Os elementos de β são chamados conjuntos mensuráveis do espaço.

Definição 4.3. Uma medida μ em um espaço mensurável (X, β) é uma função $\mu : (X, \beta) \rightarrow [0, +\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ for uma família de conjuntos 2 a 2 disjuntos, então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Como visto a função de Dirichlet não é integrável pelo método de Riemann, agora é possível analisar sua integrabilidade no mundo de Lebesgue.

Definição 4.4. (Medida de Lebesgue)

Existe uma única medida μ na σ -álgebra β que contém todos os intervalos abertos (Borelianos) tal que:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{comprimento}(I_i).$$

Observação 4.1. Temos duas observações nesse caso:

1. μ_0 mede apenas intervalos.
2. μ mede todo elemento da σ -álgebra.

Definição 4.5. Uma função $s : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ é simples se existem constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ e conjuntos mensuráveis $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ tais que:

$$s(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}(x)$$

onde $\chi_{A_i}(x) = 1$ se $x \in A_i$ e $\chi_{A_i}(x) = 0$ se $x \notin A_i$, é chamada de função característica.

Definição 4.6. Considere (X, α) e (Y, β) espaços mensuráveis. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é mensurável se para todo $B \in \beta$, $f^{-1}(B) \in \alpha$.

Proposição 4.1. Se $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ é mensurável, então existe uma sequência s_n de funções simples tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$$

para todo $x \in X$, com $|s_n(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in X$.

Definição 4.7. (Integral de Lebesgue para funções simples) Seja $s : X \rightarrow [0, +\infty]$ uma função simples, e μ uma medida. Então,

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i).$$

Definição 4.8. (*Integral de Lebesgue para funções mensuráveis*) Seja $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ mensurável e μ uma medida. Então,

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\mu,$$

onde $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$ e $|s_n(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in X$.

Podemos generalizar a definição de integração para funções não necessariamente positivas. Basta considerar $f = f^+ - f^-$ onde f^+ e f^- são as partes positiva e negativa da função f .

Exemplo 4.2. Considere μ a medida de Lebesgue. Então

$$\int_{[2,5]} 2d\mu = 2\mu([2,5]) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Agora com esse novo método da integral de Lebesgue, concluímos que a função de Dirichlet é integrável por esse método.

A função de Dirichlet f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

e μ a medida de Lebesgue. A integral de Lebesgue de f sobre um intervalo $[a, b]$ é dada por

$$\int_{[a,b]} f d\mu = \mu([a, b]) = b - a.$$

Os números racionais têm medida nula, sendo assim a medida dos irracionais é total (no intervalo), e portanto temos que:

$$\int_{[0,1]} f d\mu = 1 \cdot \mu([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = 1.$$

Teorema 4.3. (*Recorrência de Poincaré*). Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e seja μ uma medida finita invariante por f . Seja $E \subset M$ qualquer conjunto mensurável com $\mu(E) > 0$. Então, para μ -quase todo ponto $x \in E$ existem infinitos de valores de n para os quais $f^n(x)$ também está em E . [1]

A demonstração desse teorema será omitida nesse resumo.

5 Aplicações

Com o auxílio do Teorema de Recorrência de Poincaré, temos como primeira aplicação, que quase todo número entre 0 e 1 tem infinitos dígitos 0 em sua expansão decimal.

Como segunda aplicação, existe uma transformação invariante que ao iterar uma imagem 241 vezes, a imagem retorna a sua posição original (pelo menos em medida dos pixels). Veja a imagem abaixo:



Figura 1: O retorno da foto de Poincaré após 241 iterações. [4]

Agradecimentos

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) que juntamente com o Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) apoiam financeiramente esse projeto. Também agradeço ao meu orientador, Túlio Vales Deslandes Ferreira, que sempre confiou em mim e me auxiliou em todos os estudos desenvolvidos.

Referências

- [1] VIANA, M.; OLIVEIRA, K. **Fundamentos da Teoria Ergódica**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.
- [2] LIMA, E. L. **Curso de Análise - Volume 1**. Coleção Projeto Euclides, IMPA, 1976.
- [3] BOCKER, C.; OLIVEIRA, K.; VIANA, M. **Uma Introdução à Teoria Ergódica**. V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 18 a 22 de Outubro de 2010.
- [4] GHYS, E. **Variations on Poincaré's recurrence theorem**. The Scientific Legacy of Poincaré, p. 193-206, 2010. (Tradução de Paulo Sad, Impa).



Explorando a Unicidade dos Limites de Sequências

Lorena Bezerra de Almeida

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
lore.1o2310@gmail.com

Elisa Regina dos Santos

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
elisars@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Sequências convergentes.
Limite de sequências.
Espaços Métricos.
Espaços Topológicos.

O presente trabalho discute a unicidade do limite de sequências. Inicialmente introduzimos a definição de sequências e de convergência de sequências em espaços \mathbb{K} e \mathbb{K}^n , onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. A partir dessas definições, vemos que o limite das sequências nesses espaços é único. Em seguida, definimos e analisamos a convergência de sequências em espaços métricos e, novamente, provamos que o limite de uma sequência em um espaço métrico é único. Por fim, vemos que nos espaços topológicos isso não ocorre, ou seja, existem sequências em espaços topológicos que convergem para mais de um ponto.

1 Introdução

Segundo [1], a importância das sequências na matemática remonta ao Antigo Egito, por volta de 3000 a.C., com a criação do calendário egípcio, que sugeriu a ideia de sequência ao estabelecer um padrão relacionado às épocas de cheias do rio Nilo. Mais tarde, em torno de 450 a.C., Zeno de Elea apresentou 40 paradoxos, alguns dos quais discutiam a soma de um número infinito de termos, tornando-se relevante então o estudo das sequências numéricas e da convergência de séries infinitas de números.

A evolução do estudo das sequências, impulsionada pelo desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, resultou em sua ampla utilização em áreas como Análise e Topologia dos Espaços Métricos, visto que podem ser utilizadas para caracterizar conceitos importantes dessas áreas. No entanto, ao considerar sequências em espaços topológicos, surge algo inesperado: a unicidade do limite, uma propriedade central das sequências, não é válida.

Considerando os aspectos históricos e matemáticos abordados sobre as sequências, neste trabalho discutiremos a unicidade dos limites de sequências em diversos ambientes matemáticos. Para isso, utilizaremos as referências [2], [3], [4] e [5].

2 Sequências em \mathbb{K} e \mathbb{K}^n

Nesta seção, vamos definir sequências convergentes em \mathbb{K} e \mathbb{K}^n , onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definição 2.1. *Seja X um conjunto não vazio. Uma **sequência** em X é uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Escrevemos $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ou $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ para denotar a sequência e x_n para denotar $f(n)$, que é chamado de **termo geral** da sequência.*

Definição 2.2. *Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}$ **converge** para $x \in \mathbb{K}$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Neste caso, dizemos que x é o **limite** da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e denotamos $x_n \rightarrow x$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.*

*A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita **convergente** em \mathbb{K} se existe $x \in \mathbb{K}$ tal que $x_n \rightarrow x$. Caso contrário, a sequência é dita **divergente**.*

Considerando as definições dadas, podemos afirmar que o limite de uma sequência em \mathbb{K} é único? A proposição a seguir responde essa pergunta.

Proposição 2.3 (Unicidade do limite). *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em \mathbb{K} . Se $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$, então $x = y$.*

Demonstração. Suponha que $x \neq y$. Como $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$, para $\varepsilon = \frac{|x - y|}{2} > 0$ existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|x_n - x| < \varepsilon$ para $n \geq n_1$ e $|x_n - y| < \varepsilon$ para $n \geq n_2$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos

$$n \geq n_0 \implies n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2 \implies |x - y| \leq |x_n - x| + |x_n - y| < 2\varepsilon = |x - y|,$$

o que é uma contradição. Portanto, $x = y$. ■

Agora, vejamos seqüências em \mathbb{K}^n . Analogamente, podemos definir:

Definição 2.4. Dizemos que uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}^n$ **converge** para $x \in \mathbb{K}^n$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana. Neste caso, dizemos que x é o **limite** da seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e denotamos como na Definição 2.2.

A seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita **convergente** em \mathbb{K}^n se existe $x \in \mathbb{K}^n$ tal que $x_n \rightarrow x$. Caso contrário, a seqüência é dita **divergente**.

Assim como em \mathbb{K} , é possível provar que os limites de seqüências em \mathbb{K}^n são únicos e a demonstração é análoga à demonstração da Proposição 2.3.

3 Espaços Métricos

Note que os conjuntos anteriormente considerados possuem uma noção de distância dada pela norma usual desses espaços. De modo geral, a distância é uma função como definimos a seguir.

Definição 3.1. Um **espaço métrico** é um par ordenado (M, d) formado por um conjunto M e uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, chamada **métrica**, satisfazendo as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

- (a) $d(x, y) \geq 0$,
- (b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (c) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdade Triangular).

A função d também é chamada de **distância**.

Definição 3.2. Dizemos que a seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço métrico (M, d) **converge** para $x \in M$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Neste caso, denotamos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ou $x_n \rightarrow x$. A seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita **convergente** se existe $x \in M$ tal que $x_n \rightarrow x$. Caso contrário, a seqüência é dita **divergente**.

Trazendo a pergunta da seção anterior para o contexto de espaços métricos: toda seqüência convergente de um espaço métrico converge para um único ponto? A proposição a seguir responde essa pergunta de maneira afirmativa.

Proposição 3.3. Sejam (M, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em M . Se $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$, então $x = y$.

Demonstração. Suponha que $x \neq y$. Considere $\varepsilon = \frac{d(x, y)}{2} > 0$, como $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para $n \geq n_1$ e $d(x_n, y) < \varepsilon$ para $n \geq n_2$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que

$$n \geq n_0 \implies n \geq n_1 \quad \text{e} \quad n \geq n_2 \implies d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) < 2\varepsilon = d(x, y),$$

o que é uma contradição. Logo, $x = y$. ■

Apresentaremos a seguir dois conceitos que usaremos na próxima seção.

Definição 3.4. *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma **bola aberta** de centro $x_0 \in M$ e raio $r > 0$ é o conjunto*

$$B(x_0, r) = \{x \in M \mid d(x, x_0) < r\}.$$

Definição 3.5. *Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que um conjunto $A \subseteq M$ é **aberto** se, para todo $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$.*

4 Espaços Topológicos

Na seção anterior, vimos que sequências convergentes em espaços métricos tem limites únicos. Notaremos que isso se deve a existência da métrica. Em espaços nos quais a noção de distância é relativa, esse fato pode não ocorrer. Nesta seção, estudaremos os chamados espaços topológicos, que são uma generalização do conceito de espaço métrico nos quais não há a necessidade de existir uma métrica. Veremos que nesses espaços existem sequências que convergem para mais de um ponto.

Definição 4.1. *Uma **topologia** em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X , chamados **conjuntos abertos**, satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (a) *Qualquer união de elementos de τ é um elemento de τ .*
- (b) *Qualquer interseção finita de elementos de τ é um elemento de τ .*
- (c) *X e \emptyset pertencem a τ .*

*Neste caso, dizemos que (X, τ) é um **espaço topológico**.*

Exemplo 4.2. *Todo espaço métrico (M, d) é um espaço topológico com topologia formada pelos abertos da Definição 3.5.*

Definição 4.3. *Uma **vizinhança** de um elemento x do espaço topológico X é um subconjunto U de X que contém um aberto V contendo x , isto é, $x \in V \subseteq U$. A coleção \mathcal{U}_x de todas as vizinhanças de x é chamada **sistema de vizinhanças de x** .*

Considerando a definição de sequência convergente em espaços métricos, é possível provar que, dada uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço métrico (M, d) ,

$$x_n \longrightarrow x \in M \iff \forall U \in \mathcal{U}_x, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n \in U, \forall n \geq n_0.$$

Essa equivalência sugere a seguinte definição:

Definição 4.4. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço topológico X **converge** para $x \in X$ se, para toda vizinhança U de x , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Neste caso, dizemos que x é o **limite** da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e denotamos por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ou $x_n \longrightarrow x$.

A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita **convergente** se existe $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Caso contrário, a sequência é dita **divergente**.

A seguir, veremos que o limite de uma sequência num espaço topológico nem sempre é único.

4.1 Espaço de Sierpinski

Considere o conjunto $X = \{a, b\}$ com $a \neq b$. Então $\tau = \{\{a, b\}, \{b\}, \emptyset\}$ é uma topologia em X e (X, τ) é chamado **espaço de Sierpinski**. Vejamos que esse espaço possui uma sequência convergente com mais de um limite.

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência constante e igual a b . Dada uma vizinhança U de b , tomando $n_0 = 1$, temos que $x_n = b \in U$ para todo $n \geq n_0$. Logo, $x_n \longrightarrow b$. Agora, dada uma vizinhança W de a , existe $V \subseteq X$ aberto tal que $a \in V \subseteq W$. Como V é aberto e $a \in V$, segue que $V = X$. Se $n_0 = 1$, então $x_n \in X = V \subseteq W$ para $n \geq n_0$. Assim, $x_n \longrightarrow a$. Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência do espaço topológico X que converge para dois pontos distintos.

4.2 Propriedade de Hausdorff

Com o exemplo anterior em mente, existe alguma condição suficiente para que uma sequência tenha limite único? Uma possível resposta para essa pergunta é dada pela seguinte propriedade:

Definição 4.5. Um espaço topológico X é um **espaço de Hausdorff** se para todos $x, y \in X$ com $x \neq y$, existem vizinhanças U de x e V de y tais que $U \cap V = \emptyset$.

Proposição 4.6 (Propriedade de Hausdorff). Se (X, τ) é um espaço topológico de Hausdorff, então toda sequência convergente tem limite único.

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X tal que $x_n \longrightarrow x$ e $x_n \longrightarrow y$. Suponha que $x \neq y$. Por X ser Hausdorff, existem vizinhanças U de x e V de y tais que $U \cap V = \emptyset$. Como $x_n \longrightarrow x$ e $x_n \longrightarrow y$, para U e V , existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_1$ e $x_n \in V$ para todo $n \geq n_2$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $x_{n_0} \in U \cap V$, o que é uma contradição, já que $U \cap V = \emptyset$. Logo, $x = y$. ■

Vejam os a seguir que todo espaço métrico tem essa propriedade. Essa seria outra maneira de verificar que toda sequência em um espaço métrico tem limite único.

Proposição 4.7. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $a, b \in M$ com $a \neq b$. Então existem $r, s > 0$ tais que $B(a, r) \cap B(b, s) = \emptyset$.*

Demonstração. Tome $r = s = \frac{d(a, b)}{2}$. Suponha que $B(a, r) \cap B(b, s) \neq \emptyset$. Então,

$$\begin{aligned} x \in B(a, r) \cap B(b, s) &\implies x \in B(a, r) \quad \text{e} \quad x \in B(b, s) \\ &\implies d(a, b) \leq d(x, a) + d(x, b) < r + s = d(a, b), \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo, $B(a, r) \cap B(b, s) = \emptyset$. ■

Por fim, a Propriedade de Hausdorff é necessária para que o limite seja único? Não. Por exemplo:

Exemplo 4.8. *Seja X um conjunto e seja $\tau = \{U \mid X - U \text{ é enumerável}\} \cup \{\emptyset\}$. Então τ é uma topologia chamada **topologia coenumerável**. Se $X = \mathbb{R}$, é possível mostrar que essa topologia não é Hausdorff e que toda sequência convergente possui um único limite.*

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

Referências

- [1] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- [2] LIMA, E. L. **Análise Real**: Funções de uma variável real. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. v. 1.
- [3] LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro: IMPA, 1970.
- [4] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [5] BOTELHO, G; PELLEGRINO, D; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.



A independência do ponto base no grupo fundamental de um espaço topológico

Mateus Fernando Araújo Silva

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
mateus.fernando@ufu.br

Francielle Rodrigues de Castro Coelho

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
francielle@ufu.br

Palavras-chave

Homotopia.
Homotopia de Caminhos.
Grupo Fundamental.
Independência do Ponto Base.

Resumo

A Teoria de Homotopia é fundamental em Topologia Algébrica e o Grupo Fundamental de um espaço topológico é um poderoso invariante algébrico que está associado a essa teoria. Neste trabalho, além de abordar conceitos e resultados sobre Homotopia, Homotopia de Caminhos e Grupo Fundamental, apresentamos um importante resultado sobre a independência do ponto base no cálculo do grupo fundamental de um espaço topológico.

1 Introdução

A Topologia Algébrica teve início com a publicação de uma série de trabalhos do matemático Henri Poincaré no final do século XIX. Ela é uma área importante da Matemática na qual se resolvem problemas de Topologia com auxílio da Álgebra. E um dos conceitos mais relevantes desta área é o de homotopia que, de modo geral, descreve deformações contínuas entre funções. Neste contexto, ainda é estudado o conceito de Grupo Fundamental de um espaço topológico.

O principal objetivo deste trabalho é apresentar a demonstração do teorema que mostra a independência da escolha do ponto base no cálculo do grupo fundamental, sob determinadas hipóteses. Para isto, antes estudamos conceitos e resultados sobre Homotopia, Homotopia de Caminhos e Grupo Fundamental.

As principais referências para o desenvolvimento deste trabalho foram [1], [2] e [3].

2 Homotopia

O conceito de homotopia é um dos mais importantes na Topologia Algébrica. Intuitivamente, duas funções f e g são homotópicas quando a imagem de f pode ser continuamente deformada na imagem de g . Durante o desenvolvimento deste trabalho sempre consideraremos $I = [0, 1]$.

Definição 2.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas. Dizemos que f e g são homotópicas (ou que f é homotópica a g) quando existe uma função contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que*

$$F(x, 0) = f(x) \text{ e } F(x, 1) = g(x),$$

para todo $x \in X$. A função F é chamada uma homotopia entre f e g . Escreve-se $f \simeq g$.

Exemplo 2.2. *Sejam f e g funções quaisquer de um espaço topológico X em \mathbb{R}^2 . Defina $F : X \times I \rightarrow Y$ por*

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

(segmento de reta ligando $f(x)$ a $g(x)$), para todo $(x, t) \in X \times I$. Temos que F está bem definida e é contínua (pois o segmento de reta ligando $f(x)$ a $g(x)$ está inteiramente contido em \mathbb{R}^2 e f e g são contínuas). Além disso, $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Logo, $f \simeq g$.

Lema 2.3. (Lema da colagem) *Seja $X = A \cup B$, onde X é um espaço topológico e A e B são fechados em X . Sejam $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A \cap B$, então é contínua a função $h : X \rightarrow Y$ definida como*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A, \\ g(x), & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Demonstração. Seja C um fechado em Y . Temos que,

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C).$$

Como f é contínua e C é fechado em Y , então $f^{-1}(C)$ é fechado em A e, conseqüentemente, $f^{-1}(C)$ é fechado em X . Da mesma forma, $g^{-1}(C)$ é fechado em B , e assim, é fechado em X . A reunião de ambos é $h^{-1}(C)$, que é fechado em X . ■

Proposição 2.4. *A relação de homotopia \simeq é uma relação de equivalência no conjunto de todas as funções contínuas $f : X \rightarrow Y$.*

Demonstração. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. A função $F : X \times I \rightarrow Y$ dada por $F(x, t) = f(x)$, para todo $(x, t) \in X \times I$, é uma homotopia entre f e f . Logo, \simeq é reflexiva.

Agora, considere $F : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g . Defina $K : X \times I \rightarrow Y$ por $K(x, t) = F(x, 1 - t)$, para todo $(x, t) \in X \times I$ e obtemos uma homotopia entre g e f . Assim, \simeq é simétrica.

Por fim, sejam $F : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g , e $K : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre g e h . Defina $L : X \times I \rightarrow Y$ como

$$L(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ K(x, 2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Temos que L está bem definida, pois se $t = \frac{1}{2}$ temos que $F(x, 2t) = g(x) = K(x, 2t - 1)$. Além disso, como L é contínua nos fechados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ e $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ de $X \times I$, então L é contínua pelo Lema 2.3. Logo, L é uma homotopia entre f e h . Portanto, a relação \simeq é transitiva. ■

2.1 Homotopia de Caminhos

Antes de definirmos o Grupo Fundamental, estudaremos um caso particular do conceito de homotopia, que se trata do conceito de homotopia de caminhos.

Definição 2.5. *Sejam $f, g : I \rightarrow X$ caminhos com $f(0) = g(0) = x_0$ e $f(1) = g(1) = x_1$. Dizemos que f é homotópico a g se existe uma função contínua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que*

$$F(s, 0) = f(s), F(s, 1) = g(s), F(0, t) = x_0 \text{ e } F(1, t) = x_1,$$

para cada $s \in I$ e para cada $t \in I$. Chamamos F de homotopia de caminhos entre f e g . Se existe uma homotopia de caminhos entre f e g , escrevemos $f \simeq_p g$.

Proposição 2.6. *A relação \simeq_p é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Seja $f : I \rightarrow X$ um caminho em X com $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. A função $F : I \times I \rightarrow X$ dada por $F(s, t) = f(s)$, para todo $(s, t) \in I \times I$, é uma homotopia de caminhos entre f e f . Logo, \simeq_p é reflexiva.

Agora, considere $F : I \times I \rightarrow X$ uma homotopia de caminhos entre f e g . Defina $K : I \times I \rightarrow X$ por $K(s, t) = F(s, 1 - t)$, para todo $(s, t) \in I \times I$ e obtemos uma homotopia entre g e f . Assim, \simeq_p é simétrica.

Por fim, sejam $F : I \times I \rightarrow X$ uma homotopia de caminhos entre f e g , e $K : I \times I \rightarrow X$ uma homotopia de caminhos entre g e h . Defina $L : I \times I \rightarrow X$ como

$$L(s, t) = \begin{cases} F(s, 2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ K(s, 2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Temos que L está bem definida, pois se $t = \frac{1}{2}$ temos que $F(s, 2t) = g(s) = K(s, 2t - 1)$. Além disso, como L é contínua nos fechados $I \times [0, \frac{1}{2}]$ e $I \times [\frac{1}{2}, 1]$ de $I \times I$, então L é contínua pelo Lema 2.3. É fácil ver que $L(s, 0) = f(s)$, $L(s, 1) = h(s)$, $L(0, t) = x_0$ e $L(1, t) = x_1$. Logo, L é uma homotopia de caminhos entre f e h . Portanto, a relação \simeq_p é transitiva. ■

Observação 2.7. Seja $f : I \rightarrow X$ um caminho em X de x_0 a x_1 . Como \simeq_p é uma relação de equivalência, vamos denotar por $[f]$ a classe de equivalência do caminho f , ou seja,

$$[f] = \{g : I \rightarrow X \mid g \text{ é um caminho de } x_0 \text{ a } x_1 \text{ e } f \simeq_p g\}.$$

Definição 2.8. Seja $x_0 \in X$. O caminho $e_{x_0} : I \rightarrow X$ com $e_{x_0}(t) = x_0$, para todo $t \in I$, é chamado caminho constante em x_0 .

Definição 2.9. Sejam $x_0, x_1 \in X$ e $f : I \rightarrow X$ um caminho com $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Caminho reverso de f é o caminho $\bar{f} : I \rightarrow X$ definido por $\bar{f}(t) = f(1 - t)$, para todo $t \in I$.

Definição 2.10. Se f é um caminho em X de x_0 a x_1 , e se g é um caminho em X de x_1 a x_2 , definimos o produto de caminhos $f * g$ de f e g como sendo o caminho h dado por

$$h(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2s - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Observação 2.11. 1) Observe que a função h está bem definida e é contínua, pelo Lema 2.3; assim h define um caminho em X de x_0 a x_2 .

2) A operação produto de caminhos $*$ induz uma operação sobre as classes de homotopia de caminhos, definida pela equação

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Para a demonstração, consulte p.326 de [3].

Teorema 2.12. *A operação $*$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) (Associatividade) *Se $[f] * ([g] * [h])$ está definido, então $([f] * [g]) * [h]$ também está definido. Além disso, $[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$.*

(ii) (Identidades à direita e à esquerda) *Se f é um caminho em X de x_0 a x_1 , então*

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \text{ e } [e_{x_0}] * [f] = [f],$$

onde e_{x_0} é o caminho constante em x_0 e e_{x_1} é o caminho constante em x_1 .

(iii) *Dado o caminho f em X de x_0 a x_1 , seja \bar{f} o caminho reverso de f . Então,*

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \text{ e } [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

Demonstração. [3], Theorem 51.2, p.326. ■

3 Grupo Fundamental e Independência do Ponto Base

Aqui daremos atenção especial às homotopias de caminhos em que os caminhos são fechados (laços, Definição 3.1), isto é, o ponto inicial e o ponto final são os mesmos.

O grupo fundamental é o invariante algébrico mais simples associado à ideia de homotopia. Veremos nesta seção a independência do ponto base do Grupo Fundamental, desde que eles pertençam a mesma componente conexa por caminhos.

Definição 3.1. *Sejam X um espaço topológico e x_0 um ponto de X . Uma função contínua $f : I \rightarrow X$ tal que $f(0) = f(1) = x_0$ é chamada um caminho fechado ou um laço baseado em x_0 .*

Observação 3.2. *Sejam X um espaço topológico e x_0 um ponto de X . Consideremos o conjunto das classes de homotopia de caminhos dos laços baseados em x_0 , com a operação $*$. Segue do Teorema 2.12 que a operação $*$, quando restrita a esse conjunto, satisfaz os axiomas da definição de grupo. De fato, dados dois laços f e g baseados em x_0 , o produto $f * g$ está sempre definido e é um laço baseado em x_0 . A associatividade, a existência de uma única identidade $[e_{x_0}]$, e a existência de um inverso $[\bar{f}]$ para $[f]$ são imediatos.*

Definição 3.3. *Sejam X um espaço topológico e x_0 um ponto de X . O conjunto das classes de homotopia de caminhos dos laços baseados em x_0 , com a operação $*$, é chamado grupo fundamental de X com base no ponto x_0 . Denotamos esse grupo por $\pi_1(X, x_0)$.*

Mas até que momento a escolha do ponto base influencia a estrutura do grupo fundamental? Para responder essa pergunta, tem-se o seguinte teorema.

Teorema 3.4. (Independência do ponto base) *Se x_0 e x_1 pertencem a mesma componente conexa por caminhos de X então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são grupos isomorfos.*

Demonstração. Suponhamos que x_0 e x_1 pertencem a mesma componente conexa por caminhos de X . Assim, existe um caminho $\alpha : I \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Defina a função $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ por

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha],$$

para todo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$.

• $\hat{\alpha}$ está bem definida pois a operação $*$ dada na Observação 2.11 (2) está bem definida.

• $\hat{\alpha}$ é homomorfismo. De fato, sejam $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$. Daí,

$$\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) = ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) = [\bar{\alpha}] * ([f] * [g]) * [\alpha] = [\bar{\alpha}] * ([f * g]) * [\alpha] = \hat{\alpha}([f * g]) = \hat{\alpha}([f] * [g]).$$

• Considere $\hat{\beta} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ dada por $\hat{\beta}([g]) = [\alpha] * [g] * [\bar{\alpha}]$, para todo $[g] \in \pi_1(X, x_1)$.

De modo análogo ao de $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ está bem definida. Além disso, $\hat{\beta}$ é o homomorfismo inverso de $\hat{\alpha}$ pois

$$\hat{\beta}([g]) * \hat{\beta}([h]) = ([\alpha] * [g] * [\bar{\alpha}]) * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) = [\alpha] * ([g] * [h]) * [\bar{\alpha}] = [\alpha] * ([g * h]) * [\bar{\alpha}] = \hat{\beta}([g * h]) = \hat{\beta}([g] * [h]), \text{ para todo } [g], [h] \in \pi_1(X, x_1).$$

$$(\hat{\alpha} \circ \hat{\beta})([g]) = \hat{\alpha}([\alpha] * [g] * [\bar{\alpha}]) = [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [g] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [g], \text{ para todo } [g] \in \pi_1(X, x_1).$$

$$(\hat{\beta} \circ \hat{\alpha})([f]) = \hat{\beta}([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) = [\alpha] * ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * [\bar{\alpha}] = [f], \text{ para todo } [f] \in \pi_1(X, x_0).$$

Portanto, $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são grupos isomorfos. ■

Corolário 3.5. Se X é um espaço topológico conexo por caminhos e x_0 e x_1 são dois pontos de X , então $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.

Demonstração. Sejam x_0 e x_1 são dois pontos de X . Como X é conexo por caminhos, segue que X tem uma única componente conexa por caminhos, que é X . Assim, x_0 e x_1 pertencem a mesma componente conexa por caminhos e pelo Teorema 3.4, $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$. ■

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

Referências

- [1] LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [2] LIMA, E. L. **Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, 1993.
- [3] MUNKRES, J. R. **Topology**. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.



Introdução aos Conjuntos Fuzzy: Uma Abordagem Prática

Otávio Daniel Dias dos Santos

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica
otavio.dias@ufu.br

Ana Paula Tremura Galves

Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística
ana.galves@ufu.br

Cássio Resende Jascoski

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica
cassiojascoski@ufu.br

Fellipe Viana Resende

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica
fellipe.resende@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Conjuntos fuzzy
Representação de conjuntos fuzzy
Operações entre conjuntos fuzzy

Os conjuntos fuzzy representam uma abordagem para lidar com situações incertas ou imprecisas de maneira mais flexível. Ao invés de simplesmente determinar se algo pertence ou não a um conjunto, como nos conjuntos tradicionais, os conjuntos fuzzy permitem expressar o grau de pertinência desse algo ao conjunto. Essa ideia emergiu como uma nova forma de modelar conceitos vagos e imprecisos.

1 Introdução

Os conjuntos fuzzy representam uma extensão dos conjuntos clássicos, permitindo uma modelagem mais flexível e realista de sistemas imprecisos ou incertos. Introduzidos por Lotfi Zadeh nos anos 60, os conjuntos fuzzy tratam a incerteza de maneira mais flexível. Em contraste com a rigidez dos conjuntos clássicos, que se limitam a "sim" ou "não", os conjuntos fuzzy possibilitam expressar o grau de pertinência de um elemento ao conjunto. Em outras palavras, eles indicam o quão fortemente um elemento pertence a um conjunto fuzzy, oferecendo uma descrição mais precisa de situações imprecisas. Os elementos podem ter diferentes graus de pertinência, representados por valores numéricos entre zero e um. Essa abordagem reflete melhor a natureza subjetiva e imprecisa de muitos fenômenos do mundo real, sendo amplamente aplicada em áreas como controle de sistemas, tomada de decisões, inteligência artificial e engenharia.

O objetivo deste trabalho é apresentar a definição de conjuntos fuzzy, demonstrar as diversas formas de representá-los por meio de exemplos e elucidar as operações entre esses conjuntos. Para tal, será utilizado como principal referência o livro [1].

2 Conjuntos fuzzy

Um *subconjunto fuzzy* A de um conjunto universo \mathcal{U} é descrito usando uma função chamada função de pertinência, denotada por u_A . Esta função associa a cada elemento x do conjunto \mathcal{U} um número $u_A(x)$ entre zero e um, que é chamado de grau de pertinência de x ao subconjunto A , ou seja,

$$u_A : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1].$$

Em essência, o grau de pertinência indica o quanto um elemento pertence ao subconjunto A , variando de nenhuma pertinência (representada por $u_A(x) = 0$) a uma pertinência total (representada por $u_A(x) = 1$). Isso permite uma descrição mais flexível e gradual da relação de pertinência dos elementos ao conjunto A .

Um subconjunto fuzzy pode ser representado por um conjunto de pares ordenados clássicos, denotado por $G = \{(x, u_A(x)) \mid x \in \mathcal{U}\}$. Este conjunto G representa graficamente a função de pertinência u_A . Em termos formais, a definição de subconjunto fuzzy é obtida ao expandir o contradomínio da função característica de um conjunto clássico, que originalmente é o conjunto $\{0, 1\}$, para o intervalo $[0, 1]$.

2.1 Abordagens e representação de conjuntos fuzzy

A representação de conjuntos fuzzy pode ser realizada de diversas maneiras, permitindo uma visualização clara e compreensível. Tradicionalmente, os conjuntos fuzzy são representados usando duas formas principais: tabelas e gráficos. As tabelas oferecem uma organização sistemática dos

elementos do conjunto universo e seus respectivos graus de pertinência ao conjunto fuzzy em questão, enquanto os gráficos proporcionam uma representação visual mais intuitiva, mostrando a distribuição dos graus de pertinência ao longo do domínio do conjunto universo. Essas abordagens fornecem ferramentas valiosas para a análise e interpretação de conjuntos fuzzy em diversos contextos, ajudando na compreensão das relações de pertinência entre os elementos e o conjunto fuzzy em questão. A seguir, apresentaremos exemplos de como essas representações funcionam.

Exemplo 2.1. Considere X como o conjunto dos estudantes de uma escola e A como o subconjunto de X , composto por Fernando, Carlos, Yuri e Danielle. Nem todos os estudantes do conjunto A estudam diligentemente, de modo que alguns têm um grau maior de dedicação aos estudos, enquanto outros têm menos, variando entre 0 e 1. Para os estudantes mencionados, A é representado pela Tabela 1:

<i>Estudantes</i>	<i>Grau de estudo</i>
<i>Carlos</i>	0,3
<i>Yuri</i>	0,7
<i>Fernando</i>	0,8
<i>Danielle</i>	0,9

Tabela 1: Estudantes e graus de estudo.

Uma maneira comum de representar um conjunto fuzzy é por meio de gráficos, os quais são amplamente preferidos devido à sua interpretação mais intuitiva. Quando representados em duas dimensões, o eixo vertical indica o grau de pertinência, variando de 0 a 1, enquanto o eixo horizontal mostra a informação que está sendo modelada. Essa representação visual facilita a compreensão do grau de pertinência dos elementos do conjunto fuzzy em relação à informação em questão.

Exemplo 2.2. Um conjunto fuzzy J compatível com o conceito de jovem deve, no mínimo, indicar que quanto menor a idade de um indivíduo, mais jovem ele será. Sua função grau de pertinência μ_J pode ser representada conforme mostrado na Figura 1.

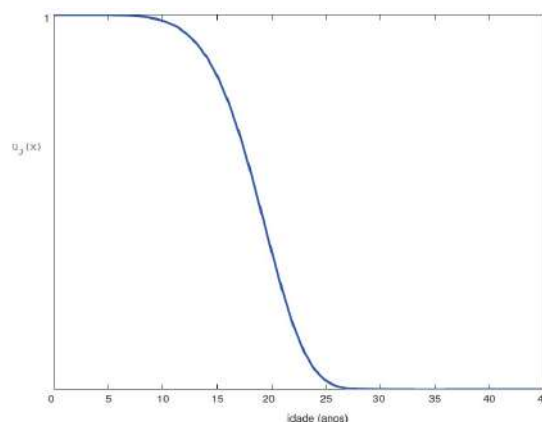


Figura 1: Função de pertinência de jovens.

Fonte: [1], página 6.

2.2 Operações entre conjuntos fuzzy

As operações entre conjuntos fuzzy são uma extensão das operações entre conjuntos clássicos para lidar com a incerteza e a imprecisão.

Em operações entre conjuntos clássicos, como união, interseção e complemento, os elementos são classificados de forma binária - ou pertencem completamente ao conjunto, representado pelo valor 1, ou não pertencem, representado pelo valor 0. Essa abordagem é precisa e determinística, mas não consegue capturar a sutileza da incerteza presente em muitos fenômenos do mundo real.

Por outro lado, as operações entre conjuntos fuzzy permitem que os elementos tenham graus variáveis de pertinência, ou seja, eles podem pertencer ao conjunto em diferentes graus, representados por valores entre 0 e 1. Isso permite modelar com mais precisão a incerteza e a imprecisão, fornecendo uma representação mais fiel de muitos conceitos do mundo real que não podem ser facilmente descritos de maneira binária.

Definição 2.3. *Dados dois subconjuntos fuzzy A e B de um conjunto universo \mathcal{U} e x um elemento de \mathcal{U} , as funções de pertinência que representam os conjuntos fuzzy união, interseção e complementar são dadas, respectivamente por:*

$$\begin{aligned} u_{A \cup B}(x) &= \max\{u_A(x), u_B(x)\}, \\ u_{A \cap B}(x) &= \min\{u_A(x), u_B(x)\}, \\ u_{A'}(x) &= 1 - u_A(x). \end{aligned}$$

As Figuras 2, 3, 4 e 5 exemplificam conjuntos fuzzy A e B e as representações gráficas das operações entre eles. As imagens foram extraídas de [1], páginas 9 e 10.

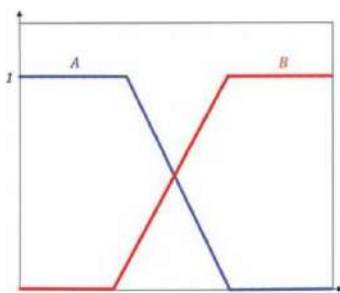


Figura 2: Conjuntos fuzzy A e B .

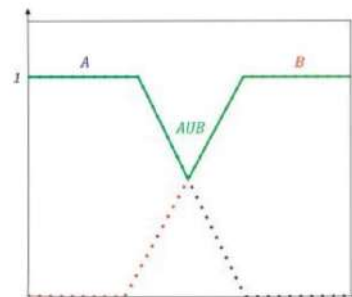
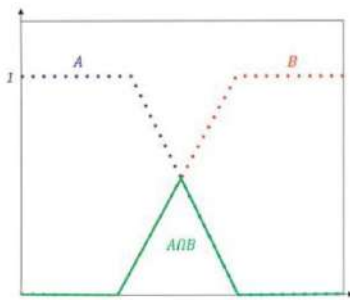
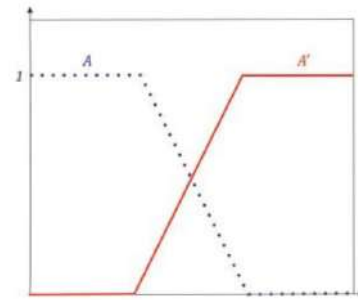


Figura 3: União dos conjuntos A e B .

Vale observar que se A é um subconjunto clássico de \mathcal{U} então $A \cap A' = \emptyset$ e $A \cup A' = \mathcal{U}$, onde A' representa o complementar de A . Na teoria fuzzy, não necessariamente ocorre essa dicotomia, como ilustrado no exemplo a seguir:

Exemplo 2.4. *Suponha que o conjunto universo \mathcal{U} seja composto pelos pacientes de uma clínica, identificados pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Sejam A e B os conjuntos fuzzy que representam os pacientes com febre e dor, respectivamente. A Tabela 2 ilustra a união, interseção e o complemento.*

Figura 4: Interseção dos conjuntos A e B .Figura 5: Complementar do conjunto A .

Paciente	Febre (u_A)	Dor (u_B)	$u_{A \cup B}$	$u_{A \cap B}$	$u_{A'}$	$u_{A \cap A'}$
1	0,7	0,6	0,7	0,6	0,3	0,3
2	1	1	1	1	0,0	0,0
3	0,4	0,2	0,4	0,2	0,6	0,4
4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
5	1	0,2	1	0,2	0,0	0,0

Tabela 2: União, interseção e complementar dos conjuntos A e B .

Nesse caso, esses sintomas poderiam auxiliar num diagnóstico precoce de uma doença e contribuir para o tratamento dos pacientes. Atualmente, os conjuntos fuzzy vêm sendo empregados na medicina na interpretação de resultados de testes médicos, como exames de imagem ou análises laboratoriais. Os conjuntos fuzzy podem ajudar a lidar com a imprecisão nos resultados e a incerteza na interpretação, auxiliando os médicos na tomada de decisões mais precisas.

3 Considerações finais

Os conjuntos fuzzy são importantes porque nos auxiliam a lidar com situações onde as coisas não são muito claras ou precisas. Eles são úteis em muitos campos, como controle de sistemas complexos, tomada de decisões em situações incertas, processamento de linguagem natural e até mesmo em aprendizado de máquina. Em essência, os conjuntos fuzzy nos permitem lidar com a incerteza de uma forma mais flexível, o que nos auxilia a tomar decisões melhores e a entender melhor o mundo ao nosso redor.

Referências

- [1] BARROS, L.C.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R.S.M. **Teoria dos conjuntos fuzzy com aplicações**. 3ª edição. São Carlos: SBMAC, 2023.



Estatística em cores: Quantização a partir de métodos de agrupamento

Pedro de Araujo Ribeiro

UFU, FACOM, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
pedro.ribeiro1@ufu.br

Pedro Franklin Cardoso Silva

UFU, FAMAT, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
pedrofranklin@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Quantização de cores.
Agrupamento.
K-médias.

Quantização de cores é uma prática comum em áreas de design gráfico e processamento de imagens. Esta técnica consiste em reduzir a paleta de cores de uma imagem preservando seu formato e atualmente é aplicada com frequência para compactar imagens. No contexto deste trabalho, empregou-se o método de agrupamento K -médias para realizar a quantização, tratando as intensidades RGB dos pixels da imagem como variáveis e atribuindo a grupos de pixels cores específicas de acordo com o centróide de cada aglomerado. Implementou-se esse processo utilizando a linguagem R. Ao aplicar o método para diferentes valores de K , observou-se uma redução no tamanho em disco das imagens resultantes.

1 Introdução

Quantização de cores é uma prática comum em áreas de design gráfico e processamento de imagens que consiste em reduzir a quantidade total de cores de uma imagem mantendo o máximo possível do seu formato original.

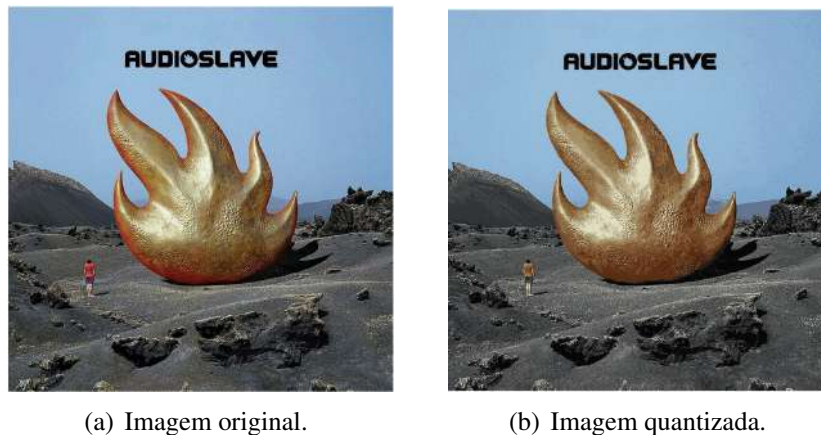


Figura 1: Imagem original (capa do álbum Audioslave) e imagem quantizada para 20 cores.

Esta técnica é usada com frequência para adequar uma imagem a um display com profundidade de cores menor que o idealizado pelo criador da imagem original ou para reduzir o espaço ocupado pelo arquivo em disco. Há diversos métodos para se atingir uma quantização satisfatória. Um dos métodos mais conhecidos é o agrupamento de pixels através do modelo K -médias. Neste modelo, os pixels são agrupados em K aglomerados e a cor de cada aglomerado será determinada pelo centróide do grupo.

2 Aplicações de quantização

Para melhor compreender o processo de quantização tal como suas aplicações é necessário um entendimento geral de como cores são expressas digitalmente.

2.1 Definição de cores

Uma imagem é, em sua forma mais simples, uma matriz de pixels, onde cada pixel é composto pelas 3 cores primárias vermelho, verde e azul, (referidas de agora em diante pelo seu acrônimo em inglês RGB, significando Red, Green e Blue). Cada cor real será representada por uma combinação diferente de intensidades de RGB.

Displays comerciais modernos possuem, usualmente, 24 bits de cores, significando que cada cor RGB será armazenada em 8 bits e, por consequência, sua intensidade irá variar de 0 a 255 (2^8 intensidades). Sendo assim, tal display é capaz de 16777216 (2^{24}) cores distintas.

Essa lógica se estende para mais ou menos bits de cores. Câmeras de última geração podem atingir 30 ou 36 bits de cor enquanto monitores mais antigos estão restritos a 18, 16 ou até mesmo 8 bits de cor.

2.2 Aplicações reais

Considerando a disponibilidade de displays modernos, a aplicação mais frequente da quantização se tornou a compactação de imagens. Reduzir o espaço em disco de uma imagem ou vídeo é extremamente útil e pode ser observado no dia a dia. A plataforma de vídeos YouTube utiliza de diversos métodos para reduzir o custo de banda larga da transmissão de seus conteúdos, sendo um deles a redução da paleta de cores total de um dado quadro de um vídeo (Figura 2).



(a) Vídeo em 1080p.



(b) Vídeo em 1080p.

Figura 2: Comparação de um vídeo com diferentes resoluções.

Outra possível aplicação se dá na área de aprendizado de máquina e algoritmos de reconhecimento de imagem. O artigo publicado pela Australian National University "Learning to Structure an Image with Few Colors"[1] aborda com extensivos detalhes os pontos positivos e negativos de quantizar uma imagem antes de aplicá-la em um algoritmo de detecção.

As metodologias e especificidades do estudo fogem do escopo desta análise, porém os resultados dos experimentos são indicativos de que qualquer redução na paleta de cores impacta negativamente a acurácia de um modelo (Figura 3). Ainda assim, há um ganho referente a simplificação dos dados a serem analisados, o que também leva a tempos de execução mais curtos.

3 K-médias para quantização

Para esta análise uma imagem será representada como uma matriz de pixels P_{ij} onde cada pixel é uma tripla (R_{ij}, G_{ij}, B_{ij}) . Desta forma, o método de agrupamento estatístico K -médias poderá ser aplicado ao tratar cada elemento da tripla como uma variável e cada pixel como uma observação.

De maneira simplificada, o modelo consiste em estabelecer previamente K aglomerados e preenchê-los com observações de tal modo que a variação entre as observações dentro de cada grupo seja a

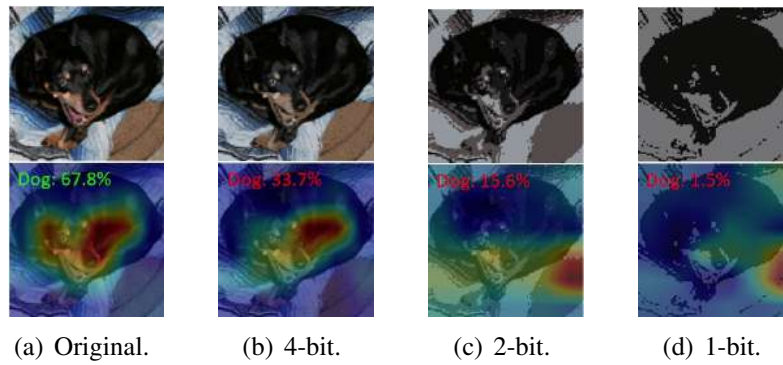


Figura 3: Resultado de um experimento inicial do estudo [1].

mínima possível. De acordo com [2], as etapas para a realização do agrupamento por K -médias são:

1. Associar de forma aleatória os K grupos às n observações disponíveis.
2. Calcular os centróides dos grupos através da fórmula abaixo, onde cada centróide, tal como os pixels, é uma tripla.

$$C_K = \frac{P_{11} + P_{12} + \dots + P_{ij}}{n}.$$

3. Calcular a semelhança de cada observação em relação aos centróides calculados. Há diversas medidas de semelhança válidas para métodos de agrupamento, porém a mais comum é a distância euclidiana abaixo:

$$d(P_{ab}, P_{ij}) = \sqrt{(R_{ab} - R_{ij})^2 + (G_{ab} - G_{ij})^2 + (B_{ab} - B_{ij})^2},$$

em que $P_{ab} = (R_{ab}, G_{ab}, B_{ab})$ e $P_{ij} = (R_{ij}, G_{ij}, B_{ij})$. A fórmula anterior é válida tanto para distâncias entre observações quanto observações e centróides.

4. Atribuir as observações ao grupo do centróide mais próximo e depois calcular a soma das taxas de variação interna de cada grupo, que se dá a partir da média da soma dos quadrados das distâncias entre todas as observações:

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{|C_k|} \sum_{i,l \in C_k} \sum_{j=1}^p (P_{ij} - P_{lj})^2.$$

5. Repetir as etapas 2 a 4 até que a soma das taxas de variação interna dos grupos pare de mudar a cada iteração, sinalizando que as observações foram agrupadas de tal forma que se minimizou a taxa de variação do conjunto e concluindo o agrupamento.
6. Para todos os pixels de um dado grupo, atribuir a seus valores RGB os valores do centróide do grupo, concluindo assim a quantização.

4 Codificação

A codificação foi realizada na linguagem R de programação e executada no programa RStudio. Abaixo, o código para a quantização de cores de uma imagem a partir do modelo K -médias. No repositório github [3] encontram-se descrições das funções utilizadas tal como as imagens geradas nos experimentos.

```
library(jpeg)
library(dplyr)
library(ggplot2)

imagem <- readJPEG("Audioslave_Album.jpg")
imagemRGB <- tibble(
  x = rep(1:dim(imagem)[2], each = dim(imagem)[1]),
  y = rep(dim(imagem)[1]:1, dim(imagem)[2]),
  R = as.vector(imagem[, , 1]),
  G = as.vector(imagem[, , 2]),
  B = as.vector(imagem[, , 3])
)
k <- 2
kMeans <- kmeans(imagemRGB[, c("R", "G", "B")], centers = k, iter.max = 30)
imagemRGB %>% mutate(kColours = rgb(kMeans$centers[kMeans$cluster,])) %>%
  ggplot(aes(x = x, y = y, color = I(kColours))) +
  geom_point(show.legend = FALSE) +
  labs(title = paste("k-Means(k=", k, " cores)")) +
  theme_minimal()
```

5 Experimentos

A metodologia aplicada consistiu em selecionar uma imagem (neste caso, a capa do álbum “Audioslave” do supergrupo musical “Audioslave” lançado em 2002), aplicar a quantização de cores com K -médias para diferentes valores de K e comparar seus espaços em disco.

Foram geradas imagens para $K = 500, 20, 5$ e 2 cores, cada imagem foi exportada com dimensões 1024×1024 utilizando a função Export > Save as Image da plataforma RStudio, garantindo que nenhuma imagem seria menor que as demais por conter menos pixels. Os resultados encontrados estão na Tabela 1, enquanto as imagens geradas estão na Figura 4.

$K =$	2	5	20	500
<i>Kilobytes</i> :	36	88	197	1110

Tabela 1: Quantidade de cores por espaço em disco

A partir da Tabela 1 é possível verificar que uma quantização com menor quantidade de cores produz uma imagem que ocupa menos espaço em disco. Já a Figura 4, apresenta o impacto da quantização em uma imagem. Embora a quantidade de cores seja menor na imagem (d), percebe-se que as formas da imagem original foram preservadas.

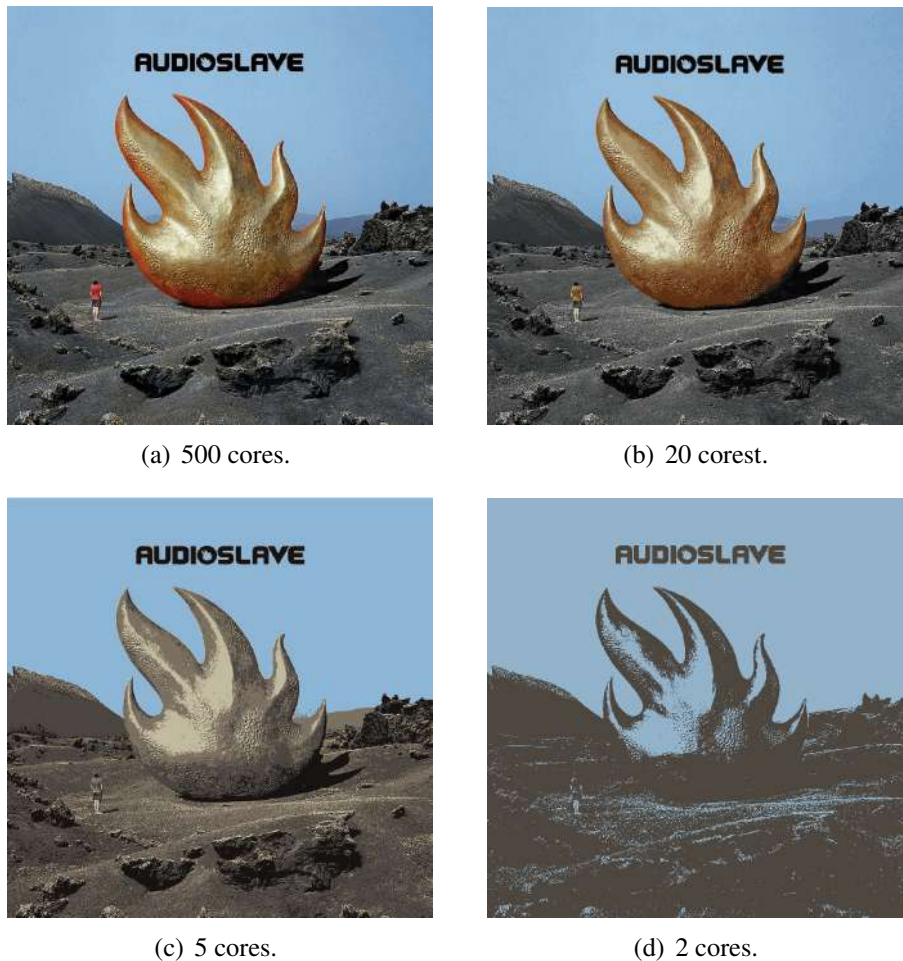


Figura 4: Processo de quantização de uma imagem com diferentes quantidades de cores.

Referências

- [1] HOU, Y; ZHENG, L; GOULD, S; Learning to structure an image with few colors. **IEEX Xplore**,10116-10125, Australian National University.
- [2] JAMES, G;WITTEN, D;HASTIE, T;TIBSHIRANI, R; **An Introduction To Statistical Learning**. Segunda edição. Springer, 2021.
- [3] RIBEIRO, P. A.; Codificação e explicação das funções do experimento. **Mostra13Quantizacao**. Uberlândia, 2024. Disponível em: <<https://github.com/PedroRibeiroA123/Mostral3Quantizacao/blob/main/Quantizacao%20de%20cores.R>>.



Impacto da Pandemia: Investigando Mudanças dos Valores e Volumes de Venda Dos Carros Mais Vendidos

Rhuan Flores Cunha Fernandes

UFU, Faculdade de Computação, Monte Carmelo, Minas Gerais, Brasil
rfcf10@gmail.com

Vânia de Fatima Lemes de Miranda

UFU, Faculdade de Matemática, Monte Carmelo, Minas Gerais, Brasil
vaniaflm@ufu.br

Jair Rocha do Prado

UFU, Faculdade de Matemática, Monte Carmelo, Minas Gerais, Brasil
jairrp@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Venda de Automóveis.
Pandemia.
Indústria Automotiva.

O artigo conduz uma análise descritiva e inferencial do impacto da pandemia do COVID-19 no comércio de automóveis novos. Para alcançar o objetivo, comparou-se dados de preços, volume e tipos dos 30 automóveis mais vendidos nos períodos pré e pós pandemia. Para produzir resultados, utilizou-se métodos da estatística descritiva para processar as variáveis de estudo referentes aos automóveis em cada período. Foi observado que a maioria das vendas de 2019 eram automóveis populares, principalmente Hatchs e Sedans, de em média, R\$76500,00, realidade explicada pela facilidade de financiamentos e uma economia melhor. Contexto transformado em 2022 com a pandemia agredindo a economia global, aumentando preços dos automóveis de 15% à 37%, duplicando taxas de juros e modificando o poder de compra brasileiro. Como resultado, o perfil de venda do mercado foi modelos SUV de, em média, R\$125000,00.

1 Introdução

Com informações da Organização Pan-Americana de Saúde [OPAS] (2023) [9] no dia 11 de março de 2020 a Organização Mundial de Saúde (OMS) classificou o COVID-19, uma doença infecciosa causada pelo coronavírus SARS-CoV-2, como pandemia. Em consequência dessa ação, o Brasil e diversos Países entraram em estado de isolamento, classificado pela restrição da circulação das pessoas em lugares públicos e funcionando, apenas, serviços considerados essenciais (supermercados, farmácias e hospitais). Assim, restringiu-se o setor de distribuição de veículos no Brasil que, em anos anteriores, com dados da Federação Nacional de Distribuição de Veículos Automotores [FENABRAVE] (2014) [5], produzia uma receita anual de R\$ 287,9 bilhões e gerava cerca de 400 mil empregos diretos.

Mediante essa ótica, o Banco Central do Brasil [BCB] (2020) [1] relatou que a economia mundial, incluindo a brasileira, passa por momento de elevado grau de incerteza devido à pandemia, provocando desaceleração da atividade econômica, queda nos preços das commodities e aumento da volatilidade nos preços de ativos financeiros. Sob esta perspectiva, de acordo com o estudo de Schultz et al. (2023) [10] a indústria automobilística, com as concessionárias fechadas, o clima de incerteza econômica, a falta e o aumento do preço de insumos para fabricação de automóveis repassaram os novos custos para o consumidor, disparando o preço dos carros novos e seminovos.

Com base nos dados apresentados, o objetivo do presente artigo é fazer uma análise descritiva e inferencial acerca do impacto da pandemia no setor de venda de automóveis. Os dados foram coletados da Tabela Fipe, que expressa preços médios para pagamento à vista na revenda de veículos para o consumidor final brasileiro, servindo como um parâmetro para negociações ou avaliações e da FENABRAVE, que é a entidade representativa do setor de Distribuição de Veículos no Brasil, na qual reúne 52 Associações de Marca de automóveis comerciais, implementos rodoviários, motocicletas e máquinas agrícolas. Dessa forma, analisando a mudança nos preços, volume e modelos vendidos antes e depois da pandemia, buscamos entender quais são os perfis de venda e preferências de cada período, assim como a lei de oferta e demanda afeta a indústria nesse novo contexto.

2 Material e Métodos

Este estudo tem como base a abordagem de pesquisa descritiva que, de acordo com Lakatos e Marconi (2011) [8], tem como finalidade analisar aspectos mais profundos em relação a determinado fato ou objeto, gerando análises mais específicas sobre certas atitudes, investigações e tendências de comportamento.

O artigo foi desenvolvido com dados de 61 carros, 30 de 2022 e 31 de 2019, coletados da Tabela Fipe [7] e do relatório de emplacamentos da FENABRAVE de 2019 [3] e 2022 [4]. As informações foram processadas em tabelas, analisando os valores e volumes de vendas dos automóveis em evidência, produzindo as variáveis que serão utilizadas no estudo: quantidade de vendas, tipo do automóvel e preço médio das transações nos anos de 2019 e 2022.

Desta maneira, o informativo de emplacamentos da FENABRAVE, representam o *ranking* de emplacamentos acumulados de carros novos, por outra ótica, a quantidade acumulada de vendas de carros novos. Vale ressaltar que em 2019 foi lançado um modelo novo de Onix, o “Onix Plus”, e o relatório da FENABRAVE soma suas vendas, entretanto, no presente estudo, consideramos as duas quantidades diferentes, dessa forma a amostra de 2019 possui um carro a mais que a de 2022. Para a definição do preço dos automóveis mais vendidos, foi utilizado a referência da Tabela Fipe nos meses de dezembro/2018 e março/2022, para mostrar, respectivamente, o preço inicial dos veículos de 2019 e o último dos modelos de 2022, e para o "Onix Plus" foi considerado preço de lançamento.

Na definição do preço médio de um veículo foi considerado uma média do valor da sua versão mais cara e da mais barata, visto que são diversas versões e acessórios que mudam o preço final (manual/automático, acabamentos, etc). Vale ressaltar também que um mesmo veículo pode possuir construções diferentes, por exemplo Hatch e Sedan, mas as vendas contabilizadas no relatório da FENABRAVE já fazem essa distinção.

Mediante essa perspectiva, foi feita a análise descritiva, utilizando o *software* estatístico R, comparando e processando os valores de cada época, validando-os pelos testes de hipótese com 5% de significância. Produzindo, assim, os resultando de valores médios de venda, preços e tipo de automóveis, para entender qual seria o perfil das vendas dos veículos em cada período em evidência. Nesse contexto, comparou-se cada uma das variáveis de estudo, valores médios de quantidades de vendas e dos preços médios, em sua respectiva época (pré ou pós pandemia) com o teste t-pareado, além de produzir gráficos comparativos acerca dos tipos de veículos predominantes.

3 Resultados e Discussão

Acerca das variáveis de estudo da média de vendas, foi constatado que a média amostral de 2019 é 60804,54 com desvio padrão de 27905 e 2022 com média 53659,81 com desvio padrão 23920, entretanto foi constatado (p -valor = 0,06443) que a diferença de vendas em 2019 e 2022 é estatisticamente irrelevante. Os resultados acima podem ser visualizados na Figura 1.

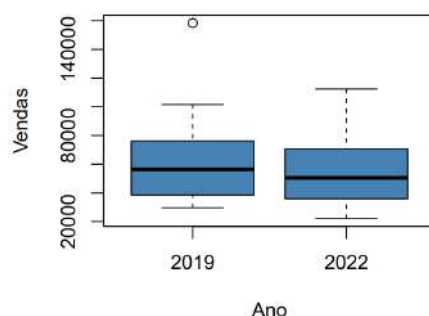


Figura 1: Quantidades de Vendas por Ano

Posteriormente estudou-se o valor médio dos carros vendidos, sendo a média amostral de 2019 igual à R\$ 76520,08 e 2022 referente à R\$ 125047,59 com desvios padrões, respectivamente, 30191 e

49156, concluindo que ($p\text{-valor} = 2,882e-06$) os automóveis em 2022 estavam em média mais caros do que em 2019. Os resultados acima podem ser visualizados na Figura 2.

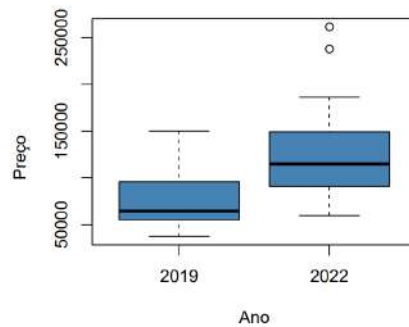


Figura 2: Preço dos Veículos por Ano

A última variável de estudo foi o tipo dos carros vendidos, considerando duas maneiras de visualização, a distribuição de tipos pelas posições do ranking na Figura 3, e a quantidade de vendas por período na Figura 4.

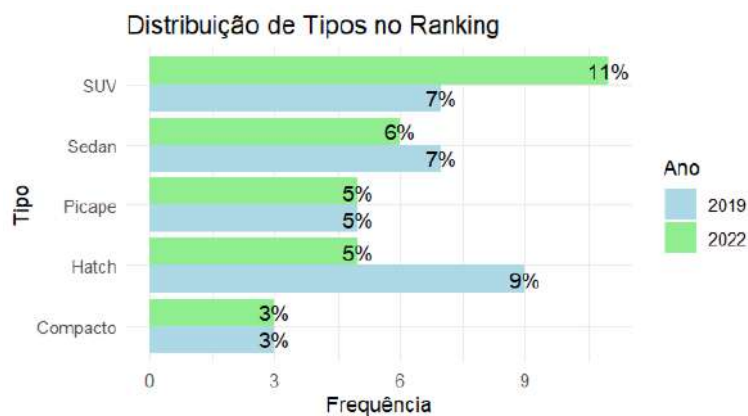


Figura 3: Distribuição de Tipos no Ranking

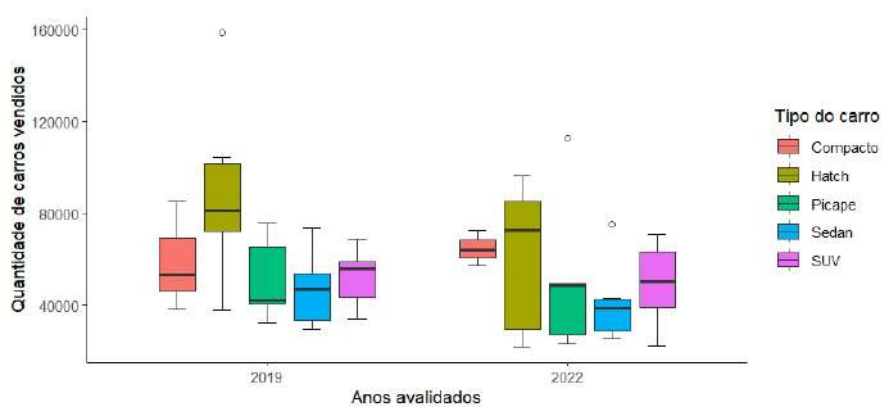


Figura 4: Quantidade de Vendas por Tipo de Veículo

É evidente que em 2019 havia uma preferência maior por carros Hatchs, Sedans e SUVs, fato este

que mudou bastante em 2022, visto que os modelos SUV tomaram a preferência total, diminuindo a quantidade dos outros. As picapes e os compactos se mantiveram basicamente nos mesmos lugares, com vendas e posições bastante semelhantes nos dois períodos.

Levando em consideração o estudo de Schultz et al. (2023) [10], que determinava o impacto da pandemia nos valores de carros novos e seminovos em 2020 até 2022. Concluiu-se que as dificuldades no setor automotivo levaram ao aumento do preço de carros de 15% até 37%. O presente artigo constata essa tese, analisados uma amostra (carros mais vendidos), que refletem o aumento do preço relatado no mercado por inteiro.

Além disso, de acordo com a Federação Nacional das Associações dos Revendedores de Veículos Automotores [FENAUTO] (2021) [6], as vendas de automóveis usados aumentaram em 55%. O artigo constata que essa realidade não é refletida na venda de carros zero quilômetro. Esse movimento pode ser explicado pela elevação de preço dos carros zero quilômetros em conjunto do aumento dos juros de financiamento, que de acordo com o BCB (2023) [2] em 2022 a taxa Selic girou em torno de 10,75% até 13,75% ao ano, e em 2019 era em média 4,5% ao ano. Assim, diversos consumidores de 2019 mudaram para o mercado de seminovos ou não trocaram seus veículos devido as incertezas econômicas e o aumento dos valores, visto que arcar com as dívidas de um financiamento ou investir em um carro novo se tornou mais complicado.

Por fim, um último fator é a continuidade das picapes em posições altas, visto que elas são de extrema importância para setores empregatícios no Brasil. Mesmo com o aumento de preço elas mantiveram suas vendas quase constantes, uma das conclusões é que a economia do país necessita das camionetes para desempenharem uma função chave de transporte em todas as áreas (agropecuário, transporte de mercadorias, mudanças etc), tornando um investimento necessário.

4 Considerações finais

A pandemia abalou toda a estrutura socioeconômica brasileira por conta da lei de oferta e demanda e o setor automotivo não ficou de fora. Por isso, os valores dos carros dispararam como uma forma de receber o capital perdido pela pandemia. Por causa disso e da incerteza econômica (falta de empregos, juros altos, inflação alta) as vendas diminuíram bastante causando lesões nos produtores e vendedores de automóveis.

Mediante esse novo contexto, o perfil das vendas de veículos novos no Brasil mudou, antes, pré-pandemia, eram preferíveis veículos populares, Hatchs, Sedans e SUVs, por causa da facilidade de financiamentos e de uma economia melhor. Com as dificuldades ocasionadas pela pandemia, isso foi transformado para uma realidade de veículos mais caros e menos consumidores, com uma preferência dos SUVs entre todos os tipos de veículos.

Referências

- [1] BCB – Banco Central do Brasil. **Relatório de Inflação**. Vol. 22, n. 1, 2020. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/content/ri/relatorioinflacao/202003/ri202003p.pdf>>. Acesso em: 1 abr. 2024.
- [2] BCB – Banco Central do Brasil. **Taxa de Juros Básica - Histórico**. 2024. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/historicotaxasjuros>>. Acesso em: 1 abr. 2024.
- [3] Federação Nacional da Distribuição de Veículos Automotores [FENABRAVE]. **Informativo - Emplacamentos 2019**. Ed. 204. São Paulo, 2020. Disponível em: <<https://online.fliphtml5.com/ordey/nyhj/#p=6>>. Acesso em: 1 abr. 2024.
- [4] Federação Nacional da Distribuição de Veículos Automotores [FENABRAVE]. **Informativo - Emplacamentos 2022**. Ed. 240. São Paulo, 2023. Disponível em: <<https://online.fliphtml5.com/ordey/msoq/#p=6>>. Acesso em: 1 abr. 2024.
- [5] Federação Nacional da Distribuição de Veículos Automotores [FENABRAVE]. **Livro FENABRAVE 50 anos**. 2014. Disponível em: <<https://www.fenabrave.org.br/downloads/LivroFenabrave50Anos.pdf>>. Acesso em: 1 abr. 2024.
- [6] Federação Nacional das Associações dos Revendedores de Veículos Automotores [FENAUTO]. **Segmento de Carros Usados Comemora Vendas em Agosto**. 2021. Disponível em: <<https://www.fenauto.org.br/news/segmento-de-carros-usados-comemora-vendas-em-agosto>>. Acesso em: 1 abr. 2024.
- [7] Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas [FIPE]. **Tabela Fipe**. Disponível em: <<https://veiculos.fipe.org.br>>. Acesso em: 1 abr. 2024.
- [8] MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Metodologia do trabalho científico: procedimentos básicos, pesquisa bibliográfica, projeto e relatório, publicações e trabalhos científicos**. 7. ed. 6.reimpr. São Paulo: Atlas, 2011.
- [9] OPAS - Organização Pan-Americana da Saúde. **Histórico da pandemia COVID-19**. Disponível em: <<https://www.paho.org/pt/covid19/historico-da-pandemia-covid-19>>. Acesso em: 1 abr. 2024.
- [10] SCHULZ, A. et al. **Impacto da pandemia (covid-19) na valorização de carros novos e seminovos no período compreendido entre 2020 a 2022**. Revista Interdisciplinar da FA-RESE, v. 4, jan. 2023. Disponível em: <<https://revista.grupofaveni.com.br/index.php/revistainterdisciplinardafarese/article/view/930>>. Acesso em: 1 abr. 2024.



Irracionalidade de e Através de Frações Contínuas

Robert Vieira de Araujo

UFU, IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
robert.araujo@ufu.com

Victor Gonzalo Lopez Neumann

UFU, IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
victor.neumann@ufu.com

Resumo

Palavras-chave

Número neperiano.
Frações contínuas.
Irracionalidade.

Temos como objetivo para este trabalho o estudo da irracionalidade do número neperiano utilizando conceitos como frações contínuas e séries. Durante o texto mostraremos como as frações contínuas são construídas e como podemos utilizá-las para representar números racionais e irracionais. Além disso, chegaremos à conclusão de que o número de Euler, representado por e , é irracional para qualquer potência da forma $\frac{2}{a}$, onde a é inteiro positivo, em particular e e e^2 são irracionais.

1 Introdução

O número neperiano conhecido também como número de Euler, e representado por e , possui diversas propriedades, como por exemplo, e é irracional. Apesar disso, pouco se discute sobre esta constante nos cursos de graduação. Outro assunto que não é mencionado são as frações contínuas.

As frações contínuas são ferramentas utilizadas para representação de números tanto racionais quanto irracionais e nos permite trabalhar com estes números com certa especificidade. Veja [1] para um maior aprofundamento em sua origem histórica e propriedades.

Com isso em mente, trabalharemos a construção do conceito das frações contínuas e suas representações, e faremos uso desta poderosa ferramenta para mostrar que existem infinitas potências para as quais e é irracional, em particular, e e e^2 são irracionais.

2 Princípios Fundamentais

Teorema 2.1 (Princípio da Boa Ordenação). *Todo subconjunto não vazio \mathcal{A} de números naturais possui um elemento mínimo, isto é, existe $n_0 \in \mathcal{A}$, tal que $n_0 \leq n$, para todo $n \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. Veja [3, página 7]. ■

Teorema 2.2 (Princípio Fundamental da Teoria dos Números). *Dado $m \in \mathbb{Z}$, não existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $m < n < m + 1$.*

Demonstração. Veja [2, página 8]. ■

Definição 2.3 (Máximo divisor comum). *O Máximo divisor comum (MDC) de dois inteiros a e b (a ou b diferente de 0) denotado por (a, b) ou $\text{mdc}(a, b)$, é o maior inteiro que divide a e b .*

3 Frações Contínuas

Dado um número racional $\frac{u_0}{u_1}$, com $\text{mdc}(u_0, u_1) = 1$ e $u_1 > 0$, aplicamos o algoritmo da divisão de Euclides, que pode ser encontrado em [1, página 3], para obter as seguintes equações:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_1 a_0 + u_2, & 0 < u_2 < u_1 \\ u_1 &= u_2 a_1 + u_3, & 0 < u_3 < u_2 \\ & & \vdots \\ u_{j-1} &= u_j a_{j-1} + u_{j+1}, & 0 < u_{j+1} < u_j \\ & & u_j = u_{j+1} a_j \end{aligned}$$

Escrevendo $\zeta_i = \frac{u_i}{u_{i+1}}$ para $0 \leq i \leq j$, então as equações acima tornam-se:

$$\zeta_i = a_i + \frac{1}{\zeta_{i+1}}, \quad 0 \leq i \leq j-1 \text{ e } \zeta_j = a_j.$$

Quando $i = 0$ e $i = 1$, temos $\zeta_0 = a_0 + \frac{1}{\zeta_1}$ e $\zeta_1 = a_1 + \frac{1}{\zeta_2}$. Combinando as igualdades, temos:

$$\zeta_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\zeta_2}},$$

substituindo $\zeta_2 = a_2 + \frac{1}{\zeta_3}$,

$$\zeta_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\zeta_3}}},$$

continuando esse processo, obtemos

$$\frac{u_0}{u_1} = \zeta_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_j}}} \quad (1)$$

Essa é a expansão em fração contínua de $\frac{u_0}{u_1}$. Presumimos que $\frac{u_0}{u_1}$ tem denominador positivo, mas não podemos fazer suposição similar para u_0 e conseqüentemente a_0 pode ser positivo, negativo ou zero.

Usaremos a notação $\langle a_0; a_1, \dots, a_j \rangle$ para representar a fração contínua em (1). Em geral, para quaisquer x_0, x_1, \dots, x_j números reais positivos, exceto possivelmente x_0 , podemos escrever $\langle x_0; x_1, \dots, x_j \rangle$ no formato como em (1). Tal fração contínua é chamada de *simples*, se todos os x_i são inteiros.

Temos ainda as seguintes relações:

$$\langle x_0; x_1, \dots, x_j \rangle = x_0 + \frac{1}{\langle x_1; \dots, x_j \rangle} = \left\langle x_0; x_1, \dots, x_{j-1} + \frac{1}{x_j} \right\rangle.$$

Além disso, temos também $\langle x_0; x_1, \dots, x_{j-1}, x_j \rangle = \langle x_0; x_1, \dots, x_{j-1}, x_j - 1, 1 \rangle$.

Um fato interessante sobre as frações contínuas é que qualquer número racional pode ser expresso como uma fração contínua simples e finita, como vimos no início desta seção. Reciprocamente, qualquer fração contínua simples e finita representa um número racional. Este fato pode ser verificado em [2, página 10].

Dados a_0, a_1, \dots uma seqüência infinita de inteiros, todos positivos, exceto possivelmente a_0 , definimos duas seqüências de inteiros $(h_n)_n$ e $(k_n)_n$ recursivamente do seguinte modo:

$$\begin{aligned} h_{-2} &= 0, & h_{-1} &= 1, & h_i &= a_i h_{i-1} + h_{i-2}, & \forall i \geq 0; \\ k_{-2} &= 1, & k_{-1} &= 0, & k_i &= a_i k_{i-1} + k_{i-2}, & \forall i \geq 0. \end{aligned}$$

Proposição 3.1. Para qualquer número real $x > 0$, temos $\langle a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, x \rangle = \frac{xh_{n-1} + h_{n-2}}{xk_{n-1} + k_{n-2}}$.

Demonstração. Veja [2, página 11]. ■

Proposição 3.2. Se $r_n := \langle a_0; \dots, a_n \rangle$ para todo $n \geq 0$, então $r_n = \frac{h_n}{k_n}$.

Demonstração. Aplicando a proposição anterior para $x = a_n$, temos:

$$r_n = \langle a_0; \dots, a_n \rangle = \frac{a_n h_{n-1} + h_{n-2}}{a_n k_{n-1} + k_{n-2}} = \frac{h_n}{k_n}.$$

■

Proposição 3.3. As equações $h_i k_{i-1} - h_{i-1} k_i = (-1)^{i-1}$ e $r_i - r_{i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{k_i k_{i-1}}$ são válidas para $i \geq 1$. Além disso, as identidades $h_i k_{i-2} - h_{i-2} k_i = (-1)^i a_i$ e $r_i - r_{i-2} = \frac{(-1)^i a_i}{k_i k_{i-2}}$ são válidas para $i \geq 2$.

Demonstração. Veja [2, página 12]. ■

Teorema 3.4. A sequência $(r_n)_n$, definida na proposição 3.2, satisfaz $r_0 < r_2 < \dots < r_3 < r_1$. Além disso, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ existe e $r_0 < r_2 < r_4 < \dots < \lim_{n \rightarrow \infty} r_n < \dots < r_5 < r_3 < r_1$.

Demonstração. Veja [2, página 12]. ■

Definição 3.5. A sequência infinita de inteiros a_0, a_1, a_2, \dots todos positivos, exceto possivelmente a_0 , determinam uma fração contínua simples e infinita $\langle a_0; a_1, \dots \rangle$. O valor de $\langle a_0; a_1, \dots \rangle$ é definido como $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_0; a_1, \dots, a_n \rangle$

Teorema 3.6. O valor de qualquer fração contínua simples e infinita é irracional.

Demonstração. Seja $\theta = \langle a_0; a_1, \dots \rangle$. Pela Definição 3.5, $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_0; a_1, \dots, a_n \rangle$. Entretanto, pelo Teorema 3.4, $r_n < \theta < r_{n+1}$. Logo, $0 < |\theta - r_n| < |r_{n+1} - r_n|$. Usando a identidade $r_{n+1} - r_n = \frac{(-1)^n}{k_{n+1} k_n}$, temos

$$0 < |\theta - r_n| < \frac{1}{k_n k_{n+1}}.$$

Multiplicando essa desigualdade por k_n ,

$$0 < |k_n \theta - r_n k_n| < \frac{1}{k_{n+1}} \Rightarrow 0 < |k_n \theta - h_n| < \frac{1}{k_{n+1}}.$$

Suponha que $\theta = \frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$. Então

$$0 < \left| k_n \frac{a}{b} - h_n \right| < \frac{1}{k_{n+1}} \Rightarrow 0 < |k_n a - h_n b| < \frac{b}{k_{n+1}}.$$

Como $k_{n+1} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b < k_{n_0+1}$, ou seja, $0 < |k_{n_0} a - h_{n_0} b| < 1$. Causando uma contradição, já que $k_{n_0} a - h_{n_0} b \in \mathbb{Z}$. Portanto, θ é irracional. ■

Lema 3.7. Dada a série $S_m = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^m(m+i)!}{i!(2m+2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m}$, temos que $S_m - (2m+1)aS_{m+1} = S_{m+2}$, para todo $m \geq 0$.

Demonstração. Sabendo que

$$S_m = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^m(m+i)!}{i!(2m+2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m} \text{ e } S_{m+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{m+1}(m+1+i)!}{i!(2m+2+2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m+1},$$

temos que $S_m - (2m+1)aS_{m+1}$ é igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^m(m+i)!}{i!(2m+2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m} - (2m+1)a \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{m+1}(m+1+i)!}{i!(2m+2+2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^m(m+i)!}{i!(2m+2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{m+2}(m+1+i)!}{i!(2m+2+2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m} - \frac{2^{m+1}(m+1+i)!}{i!(2m+2+2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{m+1}(m+1+i)!}{i!(2m+2+2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m} [2m+1+2i-2m-1] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{m+1}(m+1+i)!}{i!(2m+2+2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m} \quad (2i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{m+2}(m+1+i)!}{(i-1)!(2m+2+2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m}. \text{ Tomando } k = i-1, \text{ temos que} \\ & S_m - (2m+1)aS_{m+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{m+2}(m+k+1)!}{k!(2m+4+2k)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2k+m+2} = S_{m+2}. \end{aligned}$$

■

Teorema 3.8. Se a é um inteiro positivo, então $\frac{e^{\frac{2}{a}} + 1}{e^{\frac{2}{a}} - 1} = \langle a; 3a, 5a, 7a, \dots \rangle$.

Demonstração. Considere para todo $m \geq 0$, a série

$$S_m = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^m(m+i)!}{i!(2m+2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m}$$

Observe que $\frac{2^m(m+i)!}{i!(2m+2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m} \leq \frac{2^m}{a^m} \frac{1}{i!} \left(\frac{1}{a^2}\right)^i$, ou seja, $S_m \leq e^{\frac{1}{a^2}} \left(\frac{2}{a}\right)^m$. Logo, as séries S_m convergem para cada m . Veja que tomando $m = 0$ e $m = 1$, temos

$$S_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i} = \frac{e^{\frac{1}{a}} + e^{-\frac{1}{a}}}{2} \text{ e } S_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{2i+1} = \frac{e^{\frac{1}{a}} - e^{-\frac{1}{a}}}{2}.$$

Definimos então, $D_m = \frac{S_m}{S_{m+1}}$. Logo,

$$D_0 = \frac{S_0}{S_1} = \frac{\frac{e^{\frac{1}{a}} + e^{-\frac{1}{a}}}{2}}{\frac{e^{\frac{1}{a}} - e^{-\frac{1}{a}}}{2}} = \frac{e^{\frac{2}{a}} + 1}{e^{\frac{2}{a}} - 1}.$$

Pelo Lema 3.7, temos que $D_m = (2m + 1)a + \frac{1}{D_{m+1}}$. Em particular,

$$D_0 = a + \frac{1}{D_1}, D_1 = 3a + \frac{1}{D_2}, D_2 = 5a + \frac{1}{D_3}, \dots$$

Assim,

$$\frac{e^{\frac{2}{a}} + 1}{e^{\frac{2}{a}} - 1} = a + \frac{1}{D_1} = a + \frac{1}{3a + \frac{1}{D_2}} = \dots = \langle a; 3a, 5a, \dots \rangle.$$

■

Corolário 3.9. *O número de Euler e o seu quadrado são irracionais.*

Demonstração. Aplicando o Teorema 3.8 para $a = 1$ e $a = 2$ temos respectivamente que

$$\frac{e^2 + 1}{e^2 - 1} = \langle 1; 3, 5, 7, \dots \rangle \text{ e } \frac{e + 1}{e - 1} = \langle 2; 6, 10, 14, \dots \rangle$$

são números irracionais pelo Teorema 3.6. Portanto e e e^2 são irracionais.

■

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, o primeiro autor agradece ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento. O segundo autor agradece pelo apoio financeiro dos projetos FAPEMIG APQ-00470-22 e RED-00133-21, e CNPq 307924/2023-8.

Referências

- [1] BREZINSKI, C. **History of Continued Fractions and Padé Approximants**, 1 ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1991.
- [2] MARQUES, D. **Teoria dos Números Transcendentes**, 1 ed., Rio de Janeiro: Editora SBM - Coleção Textos Universitários, 2013. v. 1.
- [3] MARTINEZ, F. E. B. et al. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**, Rio da Janeiro: Editora SBM.



Grupos Solúveis

Rodrigo Carneiro

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
r-carneiro@ufu.br

Victor Gonzalo Lopez Neumann

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
victor.neumann@ufu.br

Palavras-chave

Teoria de Grupos
Grupos solúveis.
Grupos Simétricos.

Resumo

De acordo com a teoria de Évariste Galois, a solubilidade de grupos está intimamente ligada com a resolução de equações por meio de radicais. A essência desse trabalho consiste em apresentar propriedades e resultados de Teoria de Grupos e Solubilidade de Grupos, afim de aplicar tais resultados para provar que o grupo simétrico de 4 elementos é solúvel.

1 Introdução

Se tomarmos um polinômio $p(x)$ a coeficientes racionais, podemos definir K como o menor corpo que contém todas as raízes de $p(x)$ e também os racionais, o qual recebe o nome de corpo de decomposição do polinômio sobre os racionais. Quando analisamos o conjunto de todos os isomorfismos de K em K que fixam os racionais, no fim, cada isomorfismo corresponde simplesmente a uma permutação das raízes do polinômio. Por outro lado, é possível demonstrar que esse conjunto de isomorfismos de K é um grupo e, ainda mais, é finito. Évariste Galois demonstrou que é possível encontrar as soluções de $p(x)$ por radicais, ou seja, utilizando operações elementares se, e somente se, tal grupo é solúvel.

2 Teoria de grupos

Definição 2.1. *Seja G um conjunto não vazio onde está definida uma operação entre os pares de G , denotada por*

$$\begin{aligned} * : G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\rightsquigarrow x * y. \end{aligned}$$

*Dizemos que o par $(G, *)$ é um grupo se são válidas as seguintes propriedades:*

- $a * (b * c) = (a * b) * c, \quad \forall a, b, c \in G;$
- $\exists e \in G$ tal que $a * e = e * a = a, \quad \forall a \in G;$
- $\forall a \in G, \exists b \in G$ tal que $a * b = b * a = e.$

*Se em $(G, *)$ vale também $a * b = b * a$ para todos $a, b \in G$, dizemos que G é um grupo abeliano.*

Observação 2.2. *Por simplicidade de notação nos limitaremos a escrever G quando nos referirmos a um grupo e ab para o resultado de a operado por b . Ademais, b é único e representaremos por $b = a^{-1}$, o qual recebe o nome de inverso de a em relação à operação $*$.*

Proposição 2.3. *Sejam G um grupo e H um subconjunto de G . H é subgrupo de G se possui elemento neutro, o inverso de todo elemento de H está em H e se a, b são dois elementos de H , então $ab \in H$.*

Demonstração. Ver [2, Proposição 1]. ■

Definição 2.4. *A classe de equivalência que contém x é o conjunto $\{y \in G \mid y \sim_e x\} = \{xh \mid h \in H\}$; o qual denotaremos por xH e chamaremos de classe lateral à esquerda de H . De forma análoga, define-se classe lateral à direita de H . Em adição, para x em G se $xH = Hx$, dizemos que H é subgrupo normal de G e denotaremos por $H \triangleleft G$.*

Definição 2.5. *O número de classes laterais à esquerda de H em G é denotado por $(G : H)$ e é chamado de índice de H em G .*

Definição 2.6. *Seja G um grupo finito. A ordem de G é o número de elementos de G e esse número é denotado por $|G|$.*

Teorema 2.7 (Lagrange). *Sejam G um grupo finito e H um subgrupo de G . Então $|G| = |H|(G : H)$; em particular, a ordem e o índice de H dividem a ordem de G .*

Demonstração. Ver [1, Teorema V.3.5]. ■

Proposição 2.8. *Seja G um grupo. Se H é subgrupo de G de índice 2, então H é subgrupo normal de G .*

Demonstração. Ver [1, Item 4, página 154]. ■

Definição 2.9. *Sejam G um grupo e H um subgrupo normal de G . O conjunto de suas classes laterais, com a operação de G , é um grupo denominado grupo quociente de G por H e denotaremos por G/H .*

Definição 2.10. *Sejam $(G, *)$ e (\mathcal{G}, \times) dois grupos. Uma função $f: G \rightarrow \mathcal{G}$ é um homomorfismo se*

$$f(a * b) = f(a) \times f(b), \quad \forall a, b \in G.$$

Se f for bijetora, dizemos que f é um isomorfismo.

Definição 2.11. *Seja $f: (G, *) \rightarrow (\mathcal{G}, \times)$ um homomorfismo de grupos. Denomina-se núcleo de f o conjunto $\ker f := \{x \in G \mid f(x) = e_{\mathcal{G}}\}$. O núcleo de f é subgrupo normal de G .*

Definição 2.12. *Seja G um grupo e g um elemento de G . Dizemos que G é um grupo cíclico gerado por g se para cada elemento h em G existe um inteiro k tal que $h = g^k$, onde g^k é g operado consigo mesmo k vezes.*

Teorema 2.13 (Cauchy). *Seja p um divisor primo da ordem de um grupo finito G . Então existe $a \in G$ tal que $|a| = p$.*

Demonstração. Ver [2, Teorema 6]. ■

Teorema 2.14. *Todo grupo cíclico é abeliano.*

Demonstração. Sejam G um grupo cíclico gerado por g e x, y elementos arbitrários de G . Então existem inteiros m, n tal que $x = g^m$ e $y = g^n$. Como a adição é comutativa, isso é, $m + n = n + m$ então $g^{m+n} = g^{n+m}$, logo, $xy = yx$. Portanto, G é abeliano. ■

3 Grupos solúveis

Definição 3.1. *Seja G um grupo. Uma série subnormal de G é uma cadeia de subgrupos*

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{e\}, \quad (1)$$

onde G_{i+1} é um subgrupo normal de G_i , para $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Os grupos quocientes da série são os grupos G_i/G_{i+1} , $i = 0, 1, \dots, n-1$. Em uma série subnormal, o mesmo subgrupo pode ser repetido e, portanto, alguns dos grupos quocientes podem ser triviais. Um refinamento da série subnormal supracitada é uma série subnormal obtida pela inserção de alguns (ou nenhum) subgrupos. O refinamento é dito **próprio** se algum subgrupo distinto dos já existentes é inserido na série. Ademais, a série (1) é uma **série de composição** se não admite refinamento próprio. Por fim, duas séries subnormais de G são ditas **equivalentes** se existe uma bijeção entre os grupos quocientes não triviais das séries, de modo que os grupos quocientes correspondentes são isomorfos. Sejam H_1 e H_2 duas séries subnormais de G , utilizaremos a notação $H_1 \simeq H_2$ quando H_1 for equivalente a H_2 .

Teorema 3.2. *Duas séries subnormais de um grupo G possuem refinamentos que são equivalentes.*

Demonstração. Ver [1, Teorema VII.1.7]. ■

Teorema 3.3 (Jordan-Hölder). *Seja G um grupo. Então todas as séries de composição de G são equivalentes.*

Demonstração. Sejam G^1 e G^2 duas séries de composição de G . Os refinamentos R_i possíveis de G^1 ou G^2 são refinamentos não-próprios, portanto, são refinamentos equivalentes à série de composição dada, ou seja, $R_i = G^1$ ou $R_i = G^2$. Contudo, séries de composição são, em particular, séries subnormais, assim, pelo Teorema 3.2, $G^1 \simeq G^2$. ■

Grupos que possuem séries de composição cujos grupos quocientes são cíclicos de ordem prima desempenham um papel fundamental na teoria dos grupos finitos. Portanto, apresentaremos algumas particularidades destes grupos. Se H e K são dois subgrupos de um grupo G , definimos seu grupo de comutadores por $[H, K] := \langle hkh^{-1}k^{-1} \mid h \in H, k \in K \rangle$, em particular, o grupo de comutadores de G é $G' = [G, G]$. Definimos, por indução, $G^{(0)} = G$ e $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$, ou seja, $G^{(i+1)}$ é o subgrupo de comutadores do grupo $G^{(i)}$, para cada $i = 0, 1, 2, \dots$.

Proposição 3.4. *Seja G um grupo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *O grupo G possui uma série subnormal cujos grupos quocientes são abelianos.*
2. *Existe um inteiro n tal que $G^{(n)} = \{e\}$.*
3. *O grupo G possui uma série de composição cujos grupos quocientes são abelianos (cíclicos de ordem prima).*

Demonstração. Ver [1, Proposição VII.2.1]. ■

Observação 3.5. *Se G satisfaz as condições supracitadas, G é nomeado **grupo solúvel**.*

Teorema 3.6. *Sejam G um grupo e H subgrupo de G . Se G é solúvel, então H é solúvel. Por outro lado, se H é subgrupo normal de G , então G é solúvel se, e somente se, H e G/H são solúveis.*

Demonstração. Ver [1, Teorema VII.2.8]. ■

Teorema 3.7. *Seja G um grupo finito. Se para todo inteiro a tal que $|G| = ab$ com $\text{mdc}(a, b) = 1$, existe H subgrupo de G , onde $|H| = a$, então G é solúvel.*

Demonstração. Ver [3, Theorem 9.3.3]. ■

4 Grupos simétricos

Definição 4.1. *Se $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, o grupo de todas as funções bijetoras de I_n em I_n é denotado por S_n e é chamado de **grupo simétrico de grau n** .*

Observação 4.2. *Os elementos de S_n são chamados de permutações e serão denotados por letras gregas minúsculas. Em adição, o grupo simétrico S_n possui exatamente $n!$ elementos.*

Notação 4.3. *Seja $\alpha \in S_n$ uma permutação. Utilizaremos a notação*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

para indicar que $\alpha(1) = \alpha_1, \alpha(2) = \alpha_2, \dots, \alpha(n) = \alpha_n$.

Definição 4.4. *Sejam i, j inteiros positivos distintos do conjunto $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. O símbolo (i, j) representa a permutação $\alpha \in S_n$ definida por $\alpha(i) = j, \alpha(j) = i$ e $\alpha(s) = s$ para todo $s \notin \{i, j\}$. A permutação (i, j) é chamada de **transposição**.*

Proposição 4.5. *Toda permutação de S_n se escreve como produto de transposições.*

Teorema 4.6. *Se uma permutação $\alpha \in S_n$ se escreve de duas formas distintas como produto de transposições, isto é,*

$$\alpha = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_r \quad e \quad \alpha = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_s,$$

com $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ transposições, então r e s têm mesma paridade.

Demonstração. Ver [2, Teorema 10]. ■

Definição 4.7. *Seja $\alpha \in S_n$ uma permutação que se escreve como um produto de r transposições. Dizemos que α é uma **permutação par** se r é par e dizemos que α é uma **permutação ímpar** se r é ímpar.*

Definição 4.8. *O conjunto de todas as permutações pares de S_n é um grupo. Este grupo é chamado de **grupo alternado de grau n** e é denotado por A_n .*

Proposição 4.9. *Para $n > 1$, o grupo alternado A_n tem ordem $\frac{n!}{2}$.*

Demonstração. Ver [2, Exemplo 13, páginas 132-133]. ■

Teorema 4.10. A_4 é subgrupo normal de S_4 e ambos são solúveis.

Demonstração. Pela Proposição 2.8, A_4 é normal em S_4 já que o índice de A_4 em S_4 é $(S_4 : A_4) = |S_4|/|A_4| = 2$. Como S_4/A_4 é um grupo de ordem 2, pelo Teorema 2.13, S_4/A_4 possui um elemento de ordem 2. Logo, esse elemento gera S_4/A_4 , o que significa que S_4/A_4 é cíclico. Em particular, S_4/A_4 é solúvel. Dessa forma, pelo Teorema 3.6, temos que S_4 é solúvel se, e somente se, A_4 é solúvel.

Para provar que A_4 é solúvel, usemos o Teorema 3.7. Como $|A_4| = 12$ e a única forma de escrever $12 = a \cdot b$, com $\text{mdc}(a, b) = 1$, é $12 = 3 \cdot 4$, então só precisamos provar que A_4 possui um subgrupo de ordem 4 e um subgrupo de ordem 3. Considere as seguintes permutações pares $\tau_1 = (1, 2)(3, 4)$, $\tau_2 = (1, 3)(2, 4)$ e $\tau_3 = (1, 4)(2, 3)$. Denotando por id a permutação identidade, podemos verificar que $\tau_1^2 = id$, $\tau_2^2 = id$, $\tau_3^2 = id$ e $\tau_1\tau_2 = \tau_3$. A partir disso, é fácil verificar que $H = \{id, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ é um subgrupo de A_4 de ordem 4.

Veja que $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (12)(23)$ é uma permutação par. Além disso, $\alpha^2 \neq id$ e $\alpha^3 = id$.

Dessa forma $K = \langle \alpha \rangle = \{id, \alpha, \alpha^2\}$ é um subgrupo de ordem 3 em A_4 .

Pelas observações acima, e pelo Teorema 3.7, A_4 é solúvel. ■

5 Considerações finais

Pelo Teorema 4.10, o grupo de permutações de 4 elementos e, portanto, todos os seus subgrupos são solúveis. Assim, de acordo com as considerações da introdução, as raízes de todo polinômio de grau no máximo 4 podem ser escritas por meio de radicais. Esse último resultado, bem conhecido na literatura, é a motivação principal para o estudo da teoria de Galois e a relação entre resolução de equações por meio de radicais e grupos solúveis.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece a FAPEMIG pelo apoio financeiro. O segundo autor agradece pelo apoio financeiro dos projetos FAPEMIG APQ-00470-22, RED-00133-21 e CNPq 307924/2023-8.

Referências

- [1] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2022.
- [2] GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. 6ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.
- [3] HALL, M. **The Theory of Groups**. New York: Dover Publications, 2018.



Explorando o desenvolvimento do conceito de Volume em uma perspectiva Lógico-Histórica

Tamiris Teixeira de Carvalho

UFU, IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

tamiris.carvalho@ufu.br

Ana Cláudia Molina Zaqueu Xavier

UFU, IME, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

ana.zaqueu@ufu.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é oferecer uma breve síntese do movimento lógico-histórico do conceito de volume, na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino. Este estudo é parte de uma pesquisa de Trabalho de Conclusão de Curso, na qual investigamos as percepções demonstradas por graduandas em Pedagogia ao vivenciarem uma prática pedagógica que aborda os conceitos de volume e capacidade.

Palavras-chave

Atividade Orientadora de Ensino.
Educação Matemática.
Movimento lógico-histórico.
Volume.

1 Introdução

Este artigo é fruto de uma investigação realizada como parte de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado: “Uma Prática Pedagógica Para o Ensino dos Conceitos Geométricos de Volume e Capacidade com Licenciandas em Pedagogia”. Nele buscamos responder a seguinte questão de pesquisa: *Que impressões licenciandos(as) de um curso de Pedagogia*

expressam ao vivenciar uma prática pedagógica envolvendo os conceitos geométricos de volume e capacidade?

Um dos capítulos do TCC discorre sobre o movimento lógico-histórico do conceito de volume. Foi necessário fazer esse estudo para produção de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA) delineada dentro da Atividade Orientadora de Ensino (AOE) proposta por Moura (2002).

Nosso objetivo nesse trabalho é apresentar parte do estudo realizado sobre esse conceito, mas antes, faremos uma breve contextualização do que é a Atividade Orientadora de Ensino.

2 Breve síntese da Atividade Orientadora de Ensino

A Atividade Orientadora de Ensino (AOE) proposta, inicialmente, por Manoel Oriosvaldo de Moura, cujo pressupostos são a Teoria Histórico-Cultural (THC) e a Teoria da Atividade (TA), pode ser “tomada como um modo geral de organização da atividade pedagógica, compreendida como uma unidade entre a atividade de ensino, realizada pelo professor, e a atividade de aprendizagem da criança” (Moura, Araújo e Serrão, 2019, p. 421).

Ela é orientadora, pois é dividida em duas etapas: Atividade de Ensino (AE), realizada pelo professor ao estudar e elaborar propostas; e Atividade de Aprendizagem (AA), realizada pelo aluno ao formular hipóteses e solucionar o problema. Nessa perspectiva, temos as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem, onde um dos seus objetivos é fomentar a necessidade de “apropriação do conceito pelo estudante, de modo que suas ações sejam realizadas em busca da solução de um problema que o mobilize para a atividade de aprendizagem - a apropriação dos conhecimentos” (Moura et al. 2010, p. 101).

As referências de SDA podem ser o jogo, a história virtual do conceito ou uma situação emergente do cotidiano. Todas compartilham o objetivo de proporcionar aos alunos uma situação problema semelhante à vivida no passado, quando o conceito em questão foi desenvolvido (Moura *et al.*, 2010). Diante disso, surge a necessidade de realizar um estudo do movimento lógico-histórico dos conteúdos que o professor pretende abordar em suas SDA para produzi-las de acordo com a real necessidade que originou o estudo do conceito envolvido. O termo "histórico" está relacionado à necessidade humana, enquanto o "lógico", ao desenvolvimento científico.

A seguir apresentamos um breve esquema que exemplifica como é dividida a AOE. Salientamos que o movimento lógico-histórico do conceito não está no esquema, mas seu estudo é fundamental para as produções das SDA e, por isso, pode ser visto como pano de fundo para a elaboração delas.

Figura 1: Breve esquema da AOE



Fonte: autoria própria

Após essa breve contextualização, apresentaremos um estudo do movimento lógico-histórico do conceito de Volume.

3 Uma síntese do Movimento Lógico-Histórico do Conceito de Volume

Tratando-se de contexto histórico, Magalhães (2014) diz que o estudo do cálculo de volume teve origem na época em que o ser humano começou a transportar e armazenar, especialmente na agricultura, onde era fundamental guardar as colheitas. De acordo com ele, as noções de volume eram perceptíveis em registros egípcios cerca de 3500 anos atrás, algo que, segundo Moura *et al.* (2018), também estavam documentadas em textos babilônicos da mesma época. Isso demonstra que esse movimento era necessário e ocorria em várias regiões distintas.

Em um contexto lógico, esse avanço científico estava documentado nos papiros de Moscou e de Rhind, que continham cálculos de volume semelhantes aos que utilizamos hoje em dia. Além disso, nos estudos de Moura *et al.* (2018), é mencionado um evento relevante para esse desenvolvimento: o livro "Os Elementos" de Euclides, onde um dos volumes discute a relação entre

o volume de um prisma e de uma pirâmide, bem como a relação entre o volume de um cone e o de um cilindro.

Ao longo da história, alguns matemáticos desempenharam um papel significativo no desenvolvimento desse conceito, incluindo Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), Joannes Kepler (1571-1630) e Cavalieri (1598-1647).

A necessidade de elaborar conhecimentos relacionados ao conceito de volume por Arquimedes surgiu a partir de uma solicitação do rei, que o encarregou de determinar se sua coroa era feita de ouro puro. Após um banho de imersão em uma banheira, Arquimedes observou que a quantidade de água que escoava correspondia ao seu próprio volume. Com isso em mente, ele decidiu realizar um experimento similar com a coroa, submergindo-a em uma certa quantidade de água, e também com outro objeto de ouro puro que tinha a mesma massa da coroa. Ao perceber que os objetos deslocavam quantidades diferentes de água, Arquimedes concluiu que a coroa não era feita de ouro puro. Esse experimento deu origem ao que hoje é conhecido como "Princípio de Arquimedes" ou "Lei da Hidrostática", que afirma que um corpo colocado em um fluido recebe uma força de baixo para cima, também chamada de empuxo, que vai se opor ao peso do objeto" (Silva, 2023, p. 16).

A demanda que levou Kepler a sua pesquisa surgiu em uma época em que o escambo predominava como forma principal de comércio, demandando a padronização de recipientes para facilitar as transações comerciais. Após negociações com um comerciante de vinho ele se sentiu enganado, e começou a questionar o método empregado para mensurar o volume e o preço dos barris. Essa insatisfação o impulsionou a iniciar estudos para determinar o formato ideal do barril, visando maximizar seu volume. Após uma série de experimentos, Kepler concluiu que o volume do barril poderia ser aproximado pela soma dos volumes de vários cilindros empilhados, sendo que quanto mais próximos estivessem esses cilindros, melhor seria a aproximação do formato e do volume do barril. Esse conceito é reconhecido hoje como "métodos infinitesimais".

A necessidade que levou Cavalieri a suas pesquisas estava ligada à medição de volumes de sólidos com formatos variados. Ele começou seus estudos com o intuito de descobrir maneiras de calcular esses volumes. Após suas investigações, Cavalieri desenvolveu o que hoje é reconhecido como o "Princípio de Cavalieri", utilizado nos conceitos de área e volume. Este princípio estabelece que

Se os segmentos determinados pela intersecção de qualquer reta perpendicular a uma direção fixa com duas figuras planas tiverem sempre o mesmo comprimento, então, as superfícies têm a mesma área. 2. Se as áreas das secções por qualquer plano perpendicular a uma direção fixa de dois sólidos forem iguais, então, os sólidos têm volumes iguais (Brolezzi, 2002, p. 49).

Esses eventos mencionados são apenas alguns dos muitos que marcaram a trajetória histórica e lógica do desenvolvimento do conceito de volume.

4 Considerações finais

Neste trabalho, oferecemos uma apresentação sucinta do desenvolvimento lógico-histórico do conceito de Volume, acompanhada por uma contextualização da Atividade Orientadora de Ensino. Esperamos que o conteúdo apresentado possa contribuir para uma compreensão mais abrangente desses temas, promovendo reflexões relevantes para a prática educativa.

Referências

- [1] BROLEZZI, A.C. Princípio de Cavalieri e o cálculo de volume. In: Cerri, C. **Matemática**. São Paulo: Fundação Vanzolini, 2002, p.49.
- [2] MAGALHÃES, Marcos. **Produção de sentidos e de significados de estudantes do ensino médio sobre o conceito de volume e capacidade de prismas**. 2014. 135 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014
- [3] MOURA, M. O. **A atividade de ensino como ação formadora**. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. (Orgs.). *Ensinar a ensinar: didática para a escola fundamental e média*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.
- [4] MOURA, M. O. DE; ARAUJO, E. S.; SERRÃO, M. I. B. Atividade Orientadora de Ensino: fundamentos. **Linhas Críticas**, v. 24, 13 fev. 2019.
- [5] MOURA, M. O. *et al.* **Atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem**. Rev. Diálogo Educ., Curitiba, v.10, n.29, p.205-229, jan./abr.2010.
- [6] MOURA, M. O *et al.* **Atividades para o ensino de Matemática nos anos iniciais da Educação Básica**. Volume II: Medidas. São Paulo: Câmara Brasileira do livro, 2018.
- [7] SILVA, C.F.M. **uma proposta de ensino do princípio de arquimedes através do uso de experimentos demonstrativos simples e recursos digitais**. Monografia (Licenciatura em Física), Universidade Federal Fluminense. Niterói, p.36. 2023.



Ações de Grupos e Espaços Homogêneos

Theo Marques Rodrigues Teófilo

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brasil

theo.teofilo@ufu.br

Luciana Aparecida Alves

UFU, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brasil

luciana.alves@ufu.br

Resumo

Palavras-chave

Grupos.
Ações de grupos.
Espaços homogêneos.

Uma ação de grupo de um grupo G em um conjunto X é um homomorfismo de grupo de G para algum grupo (sob composição de funções) de funções de X para si mesmo. Já um espaço homogêneo para um grupo G é um grupo quociente sobre o qual G atua transitivamente. Introduziremos tais conceitos usando teoria básica de grupos, explorando e exemplificando com espaços como grupos de matrizes e a circunferência unitária.

1 Introdução

A principal motivação deste trabalho é introduzir o estudo dos espaços homogêneos. Um espaço homogêneo M é um espaço com uma ação transitiva de um grupo de Lie. Em uma ação transitiva existe apenas uma única órbita, logo podemos concluir que M é isomorfo ao espaço quociente G/H_x , onde H_x é o subgrupo de isotropia em $x \in M$. Tal conceito é utilizado em muitas áreas importantes da Matemática, tais como Geometria Riemanniana, Teoria de Lie, Grupos Algébricos e Topológicos. Embora este assunto possua uma certa complexidade, este trabalho tem por finalidade introduzir tal conceito de maneira acessível com elementos básicos da teoria de grupos. Para isto, exploramos o estudo com exemplos, principalmente grupos de matrizes e apresentamos alguns espaços comuns que são, na verdade, espaços homogêneos.

2 Grupos

Definição 2.1. Um grupo é um conjunto não vazio G munido de uma operação interna que satisfaz certas propriedades. Dizemos que $(G, *)$ (G munido com a operação $*$) é um grupo se, para todo $g, h, k \in G$:

$$i) \quad g * (h * k) = (g * h) * k \text{ (propriedade associativa);}$$

$$ii) \quad \text{Existe um elemento neutro em } G, \text{ tal que } g * e = e * g = g \text{ (existência de elemento neutro);}$$

$$iii) \quad \text{Para todo } g \in G, \text{ existe } g^{-1} \text{ tal que } g * g^{-1} = e = g^{-1} * g \text{ (existência de elemento inverso).}$$

Um grupo $(G, *)$ é dito abeliano se satisfaz a propriedade comutativa, ou seja, $g * h = h * g$, para todo $g, h \in G$.

Exemplo 2.2. Seja $S^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta); \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Defina a seguinte operação interna em S^1 :

$$(\cos \theta_1, \sin \theta_1) * (\cos \theta_2, \sin \theta_2) = (\cos(\theta_1 + \theta_2), \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Temos que $(S^1, *)$ é um grupo abeliano com esta operação.

Exemplo 2.3. Sejam (G, \cdot) e $(H, *)$ dois grupos e consideremos seu produto cartesiano

$$G \times H = \{(g, h); g \in G \text{ e } h \in H\}.$$

Defina a seguinte operação interna em $G \times H$:

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 * h_2),$$

para $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$. Temos que $(G \times H, \circ)$ é um grupo. É claro que se G e H são grupos abelianos, então $G \times H$ também será um grupo abeliano.

Tomando $G = H = S^1$, temos que $S^1 \times S^1$ é um grupo abeliano com a operação definida anteriormente. O grupo $S^1 \times S^1$ é chamado de toro e denotado por \mathbb{T}^2 .

Poderíamos também tomar $G = S^1$ e $H = \mathbb{R}$, assim o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ é um grupo.

Exemplo 2.4. Denote por $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes quadradas $n \times n$. Seja

$$\text{Gl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}); \det(A) \neq 0\}.$$

Note que $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ é um grupo com a operação interna do produto de matrizes.

Definição 2.5. Seja $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto não vazio de G . Se H com a mesma operação $*$ de G for um grupo, dizemos que H é um subgrupo de G . Se $(H, *)$ for um grupo abeliano, dizemos que H é um subgrupo abeliano de G .

Proposição 2.6. Um subconjunto $H \neq \emptyset$ de um grupo $(G, *)$ é um subgrupo se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

i) Se $g, h \in H$, então $g * h \in H$;

ii) Se $g \in H$, então $g^{-1} \in H$.

Demonstração. Veja Proposição 2.10 de [1]. ■

Exemplo 2.7. Defina

$$\begin{aligned} \text{Sl}(2, \mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Gl}(2, \mathbb{R}) : ad - bc = 1 \right\} \\ &= \{A \in \text{Gl}(2, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}. \end{aligned}$$

Consideramos a operação interna em $\text{Sl}(2, \mathbb{R})$ dada pelo produto usual de matrizes. É fácil ver que $\text{Sl}(2, \mathbb{R})$ é um subgrupo de $\text{Gl}(2, \mathbb{R})$, assim como $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ é um subgrupo de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$.

Exemplo 2.8. Seja

$$O(n) = \{A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R}) : A^{-1} = A^t\}.$$

Temos que $O(n)$ é um subgrupo de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$, chamado de grupo ortogonal.

Exemplo 2.9. Podemos definir o seguinte subgrupo de $O(n)$:

$$\text{SO}(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n); \det(A) = 1\}.$$

Este grupo é chamado de grupo ortogonal especial ou grupo de rotação. Para $A \in \text{SO}(2, \mathbb{R})$, existe uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 tal que

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Note que $SO(2, \mathbb{R})$ é um subconjunto de $Sl(2, \mathbb{R})$, já que

$$\det \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1.$$

Além disso, $SO(2, \mathbb{R})$ é um subgrupo de $Sl(2, \mathbb{R})$.

Exemplo 2.10. $SO(n)$ é subgrupo de $O(n)$. De fato, é claro que $SO(n) \subset O(n)$. Ainda temos que as condições da Proposição 2.6 são satisfeitas:

i) Sejam $A, B \in SO(n)$: $\det(AB) = \det(A) \det(B) = 1 \Rightarrow AB \in SO(n)$;

ii) Seja $A \in SO(n)$. Já sabemos que $A^{-1} \in O(n)$, logo: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1$, isto é, $A^{-1} \in SO(n)$.

Na próxima seção, precisaremos dos seguintes conceitos e resultados.

Definição 2.11. Sejam (G, \cdot) e $(H, *)$ dois grupos. Uma aplicação $\phi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo se satisfaz a seguinte propriedade:

$$\phi(g \cdot h) = \phi(g) * \phi(h).$$

Proposição 2.12. Seja $\phi : G \rightarrow H$ um homomorfismo entre dois grupos cujos elementos neutros são $e \in G$ e $f \in H$. Então, $\phi(e) = f$ e $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$.

Demonstração. Veja Proposição 2.31 de [1]. ■

3 Ações de grupos

Suponha que (G, \cdot) é um grupo e X é um conjunto qualquer. Denote por $\mathcal{B}(X)$ o conjunto das aplicações bijetivas sobre X ; tal conjunto é um grupo com a operação de composição de aplicações.

Definição 3.1. Uma ação à esquerda de G em X é um homomorfismo $\alpha : G \rightarrow \mathcal{B}(X)$.

Note que, pela Proposição 2.12, $\alpha(e) = \operatorname{Id}_X$, onde $\operatorname{Id}_X : X \rightarrow X$ é o elemento neutro de $\mathcal{B}(X)$, e $\alpha(g^{-1}) = (\alpha(g))^{-1}$. Além disso, para $g, h \in G$, $\alpha(g \cdot h) = \alpha(g) \cdot \alpha(h)$.

Quando existe uma ação à esquerda de G em X , dizemos que G age em X . Podemos denotar $\alpha(g)(x) = g \cdot x$ (desde que não haja confusão para a notação utilizada em grupo).

Analogamente, podemos definir ação à direita como um anti-homomorfismo $\beta : G \rightarrow \mathcal{B}(X)$ tal que $\beta(e) = \operatorname{Id}_X$ e, para $g, h \in G$, $\beta(g \cdot h) = \beta(h) \cdot \beta(g)$.

Observe que, se G é um grupo abeliano, então toda ação à direita também é uma ação à esquerda.

Exemplo 3.2. O grupo $Gl(2, \mathbb{R})$ age em \mathbb{R}^2 da seguinte forma:

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \cdot (x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

De maneira geral, o grupo $Gl(n, \mathbb{R})$ age em \mathbb{R}^n .

Exemplo 3.3. O grupo $SO(2, \mathbb{R})$ age em $S^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$ da mesma maneira que $Gl(2, \mathbb{R})$ age em \mathbb{R}^2 , ou seja,

$$\begin{aligned} \alpha\left(\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}\right) \cdot (\cos \theta_1, \sin \theta_1) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \\ -\sin \theta \cos \theta_1 + \cos \theta \sin \theta_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - \theta) \\ \sin(\theta_1 - \theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definição 3.4. Seja G um grupo agindo à esquerda em um conjunto X . A órbita de um elemento $x \in X$ é definida como o seguinte conjunto

$$G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

Com a definição anterior, podemos definir a seguinte relação em X :

$$x \sim y \text{ se, e só se, existe } g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

Proposição 3.5. A relação \sim definida acima é uma relação de equivalência.

Demonstração. Veja Proposição 2.53 de [1]. ■

Pela definição de \sim , temos que cada órbita é uma classe de equivalência desta relação. Assim,

$$X = \bigcup_{x \in X} G \cdot x.$$

No exemplo 3.2, a ação $Gl(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ possui apenas duas órbitas $\{(0, 0)\}$ e $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Já a ação $SO(2, \mathbb{R}) \times S^1 \rightarrow S^1$ possui apenas uma única, a própria S^1 .

Definição 3.6. Seja G um grupo agindo à esquerda em um conjunto X . Se existe $x \in X$ tal que $G \cdot x = X$, dizemos que a ação de G em X é transitiva ou, ainda, que G age transitivamente em X .

Em outras palavras, dizemos que uma ação é transitiva quando, para quaisquer $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$. A ação $SO(2, \mathbb{R}) \times S^1 \rightarrow S^1$, vista no exemplo 3.3, é transitiva.

Definição 3.7. *Seja G um grupo agindo à esquerda em um conjunto X . Dado $x \in X$, o conjunto*

$$H_x = \{g \in G; g \cdot x = x\},$$

é dito subgrupo de isotropia.

Proposição 3.8. *O conjunto H_x definido acima é um subgrupo de G .*

Proposição 3.9. *Suponha que um grupo G age transitivamente em um conjunto X e tome $x \in X$. Então a aplicação $\psi : G/H_x \rightarrow X$ definida por $\psi(gH_x) = g \cdot x$ é uma aplicação bijetiva.*

Demonstração. Mostremos inicialmente que esta aplicação está bem definida. Se $g_1H_x = g_2H_x$, então por definição de classe lateral temos que $g_1^{-1} * g_2 \in H_x$. Da definição de H_x , segue que $(g_1^{-1} * g_2) \cdot x = x$. Fazendo g_1 agir nos dois lados da igualdade anterior, obtemos que $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$, e, portanto, $\psi(g_1H_x) = \psi(g_2H_x)$. Para mostrar a injetividade de ψ , suponhamos que $\psi(g_1H_x) = g_1 \cdot x = g_2 \cdot x = \psi(g_2H_x)$. Fazendo g_1^{-1} agir na igualdade anterior, temos que $(g_1^{-1} * g_2) \cdot x = x$, ou seja, $g_1^{-1} * g_2 \in H_x$. Portanto, $g_1H_x = g_2H_x$, mostrando a injetividade de ψ . A sobrejetividade segue imediatamente da transitividade da ação de G em X . ■

Definição 3.10. *Para $x \in X$, o conjunto G/H_x é dito um espaço homogêneo do grupo G .*

Exemplo 3.11. *A ação $\text{Gl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é transitiva em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. O subgrupo de isotropia de $(1, 0)$ em \mathbb{R}^2 é o conjunto*

$$H_{(1,0)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : c \neq 0 \right\}.$$

Logo, existe uma bijeção entre $\text{Gl}(2, \mathbb{R})/H_{(1,0)}$ e $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Ou seja, $\text{Gl}(2, \mathbb{R})/H_{(1,0)}$ é um espaço homogêneo.

Exemplo 3.12. *Temos que \mathbb{S}^1 é um espaço homogêneo que pode ser visto como $O(2)/O(1)$.*

Referências

- [1] BARROS, C. J. B.; SANTANA, A. J.. **Estruturas Algébricas: com ênfase em elementos da teoria de Lie.** Maringá: EDUEM, 2011.